5. kapitola

KONVERGENCE V METRICKÉM PROSTORU

Připomeňme nejprve některé pojmy a tvrzení o posloupnostech reálných čísel.

Budiž tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a budiž a_0 reálné číslo.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* a_0 [a zapíšeme to symbolem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \quad \text{nebo} \quad a_n \to a_0] \tag{67}$$

jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$*) tak, že pro všechna $n > N$ je

$$|a_n - a_0| < \varepsilon \tag{68}$$

Řekneme-li, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* (nebo že *je konvergentní*), míníme tím, že existuje nějaké číslo a_0 tak, že

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Zřejmě platí: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a_0 právě tehdy, když posloupnost $\{a_n - a_0\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule (tj. k číslu nula).

Jsou-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti a platí-li:

$$|b_n| \leqq |a_n| \text{ pro všechna } n > N$$

*) Tím opět zdůrazňujeme, že číslo N může záviset na čísle ε.

kde N je nějaké přirozené číslo, a je-li navíc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, je také $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Platí tzv. **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium:** Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, platí-li: Ke každému kladnému číslu ε existuje číslo $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $m > N_1$ a $n > N_1$ je

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \tag{69}$$

Tolik tedy na zopakování. Vidíme, že podstatné při konvergenci je, aby *vzdálenost* čísel a_m a a_0 (tj. číslo $|a_n - a_0|$) byla pro dosti velká n dostatečně malá. Lze proto očekávat, že pomocí metriky, která vzdálenost zobecňuje, lze zavést pojem konvergence i v obecných metrických prostorech.

Definice 11. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor, x_0 prvek množiny M a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k prvku* x_0 (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) [a zapíšeme to symbolem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{nebo} \quad x_n \underset{(1)}{\rightarrow} x_0] \tag{70}$$

jestliže posloupnost nezáporných čísel $a_n = \varrho(x_n, x_0)$ konverguje k nule, tj. platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0 \tag{71}$$

Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* nebo *je konvergentní* (v $\{M, \varrho\}$), existuje-li prvek x_0 z M, k němuž konverguje. Tento prvek x_0 pak nazýváme *limitou* nebo *limitním prvkem* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 20. Rozepíšeme-li vztah (71) podle definice konvergence číselných posloupností z úvodu této kapitoly, znamená konvergence $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$ toto:

Ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $n > N$ je

$$\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \tag{72}$$

Musí tedy být dostatečně malá vzdálenost (v $\{M, \varrho\}$!!) prvků x_n a x_0. Zde je ihned vidět analogii vztahu (72) se vztahem (68).

Příklad 55. Konvergence číselných posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jak jsme o ní hovořili na začátku kapitoly, není nic jiného než konvergence v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_1, d\}$.

Příklad 56. Budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů prostoru E_3: $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}]$. Konvergence této posloupnosti k bodu $x_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_3, p\}$ znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} (|x_{n1} - x_{01}| + |x_{n2} - x_{02}| + \\ + |x_{n3} - x_{02}|) = 0$$

Protože $0 \leqq |x_{ni} - x_{0i}| \leqq p(x_n, x_0)$ pro $i = 1, 2, 3$, konverguje k nule také číselná posloupnost $\{x_{ni} - x_{0i}\}_{n=1}^{\infty}$ neboli posloupnost $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu x_{0i} ($i = 1, 2, 3$). Konvergence $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{\mathsf{E}_3, p\}$ tedy znamená konvergenci *tří* číselných posloupností:

$$x_{n1} \to x_{01}; \quad x_{n2} \to x_{02}; \quad x_{n3} \to x_{03}$$

Jinými slovy: Posloupnost prvních složek (souřadnic) bodů x_n konverguje k první složce (souřadnici) limitního bodu x_0, posloupnost druhých složek (souřadnic) bodů x_n konverguje k druhé složce (souřadnici) bodu x_0 a posloupnost třetích složek (souřadnic) bodů x_n konverguje ke třetí složce (souřadnici) bodu x_0. Proto o konvergenci v $\{E_3, p\}$ hovoříme jako o *konvergenci po složkách* nebo o *konvergenci po souřadnicích.*

Příklad 57. V příkladu 14 jsme zavedli metrický prostor $\{P, \pi\}$. Definujme nyní v tomto prostoru posloupnost polynomů $x_n = x_n(t)$ takto:

$$x_n(t) = \frac{1}{n} t^n + 1 \quad \text{pro } 0 \leqq t \leqq 1 \text{ a } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{P, \pi\}$ k prvku (polynomu) $x_0 = x_0(t)$ definovanému takto: $x_0(t) = 1$ pro všechna t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Je totiž

$$\pi(x_n, x_0) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{0 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{1}{n} t^n + 1 - 1 \right| =$$

$$= \max_{0 \leqq t \leqq 1} \left| \frac{1}{n} t^n \right| = \frac{1}{n}$$

tj. posloupnost $\{\pi(x_n, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a ta konverguje k nule. Je tedy $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ v $\{P, \pi\}$.

Příklad 58. Budiž $\{M, \varrho\}$ libovolný metrický prostor a budiž v něm dána posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která má tuto vlastnost: Od jistého indexu N_0 počínaje se v ní opakuje stále *týž* prvek x_0 z M, tj. pro $n \geqq N_0$ je $x_n = x_0$; prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{N_0-1}$ přitom mohou být libovolné prvky z M. Pak platí:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \text{v} \quad \{M, \varrho\}$$

Stačí totiž ke každému kladnému číslu ε volit za číslo $N = N(\varepsilon)$ z definice 11 naše číslo N_0: Pro $n > N_0$ je $x_n = x_0$ a tedy $\varrho(x_n, x_0) = 0 < \varepsilon$, takže je splněna podmínka (72).

Příklad 59. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika na M, daná vzorcem (45). Pak platí: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M konverguje k prvku x_0 z M právě tehdy, jsou-li od jistého indexu N_0 počínaje všechny prvky posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ totožné s prvkem x_0. Plyne to z předcházejícího příkladu a z toho, že kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby pro *každé* $N > 0$ existoval nějaký index $n > N$ tak, že by bylo $x_n \neq x_0$, bylo by $\varrho(x_n, x_0) = 1$ a podmínka (72) by nemohla být (při $\varepsilon < 1$) splněna pro *všechna* $n > N$. — Konvergentní posloupnosti v našem metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ mají tedy velmi jednoduchou strukturu — vypadají asi takto:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, x_0, x_0, \ldots\}$$

tj. od jistého indexu N se neustále opakuje týž prvek x_0, který je také limitním prvkem této posloupnosti (číslo N může být i dosti velké a může být pro různé posloupnosti tohoto typu různé). Jiné *konvergentní* posloupnosti v tomto metrickém prostoru nejsou.

Úloha 12. Dokažte, že podobná situace nastane i v metrickém prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27.

Příklad 60. Budiž $\{M, \varrho\}$ libovolný metrický prostor a nechť množina M obsahuje alespoň dva *různé* prvky x_1 a x_2. Posloupnost

$$\{x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots\} \tag{73}$$

pak *není* konvergentní v $\{M, \varrho\}$. Dokážeme to sporem:

Protože je $x_1 \neq x_2$, je $\varrho(x_1, x_2) = r > 0$. Předpokládejme, že naše posloupnost má limitu x_0, a zvolme za ε v definici 11 číslo $\frac{1}{2} r$. Pak existuje N tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2} r$, tj. je $\varrho(x_1, x_0) < \frac{1}{2} r$ a také $\varrho(x_2, x_0) < \frac{1}{2} r$ (mezi prvky x_n se pro $n > N$ střídají prvky x_1 a x_2). Ale z trojúhelníkové nerovnosti **C** plyne

$$r = \varrho(x_1, x_2) \leqq \varrho(x_1, x_0) + \varrho(x_0, x_2) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$$

tj. $r < r$, a to je hledaný spor. Posloupnost (73) proto *nemá limitu* v $\{M, \varrho\}$.

Čtenář si jistě snadno sestrojí další příklady posloupností, které nekonvergují. Platí však tato věta:

Věta 14. *Konvergentní posloupnost v $\{M, \varrho\}$ může mít jen jednu limitu.*

Důkaz: Budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M a nechť existují prvky x_0 a y_0 z M tak, že $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$ a současně $x_n \underset{①}{\rightarrow} y_0$ v $\{M, \varrho\}$. Ukážeme, že musí být $x_0 = y_0$. Předpokládejme proto, že $x_0 \neq y_0$, a označme $\varrho(x_0, y_0) = r > 0$. Zvolme za ε v definici 11 číslo $\frac{1}{2} r$. Protože $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$, existuje číslo $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N_1$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2} r$. Protože $x_n \underset{①}{\rightarrow} y_0$, existuje číslo $N_2 = N_2(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N_2$ je $\varrho(x_n, y_0) <$

$< \frac{1}{2} r$. Označíme-li N větší z čísel N_1, N_2, bude pro $n > N$ podle trojúhelníkové nerovnosti platit

$$r = \varrho(x_0, y_0) \leqq \varrho(x_0, x_n) + \varrho(x_n, y_0) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r,$$

tj. $r < r$. To je však spor s předpokladem $x_0 \neq y_0$, a proto musí být $x_0 = y_0$.

Poznámka 21. Vraťme se ještě k definici 11 a k poznámce 20. Vztah (72) říká, že v kouli $K(x_0, \varepsilon)$ leží prvek posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ [dokonce tam leží všechny prvky posloupnosti počínaje $(N + 1)$ — ním!]. Můžeme to vyslovit takto: Je-li prvek x_0 limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{M, \varrho\}$, leží v *každé* kouli $K(x_0, \varepsilon)$ (tj. pro každé $\varepsilon > 0$) nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. To nás přivádí k tomuto novému pojmu:

Definice 12. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M. Řekneme, že prvek x_0 z M je *hromadným bodem* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže v každé kouli $K(x_0, r)$ (tj. pro každé $r > 0$) leží *nekonečně mnoho* prvků posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Srovnání definice 12 s poznámkou 21 dovoluje vyslovit ihned toto tvrzení:

Každá limita posloupnosti je hromadným bodem této posloupnosti.

Opak ovšem neplatí; ukazuje to následující příklad.

Příklad 61. Vraťme se k posloupnosti z příkladu 60. Ta nemá žádnou limitu, má však hromadný bod. Hromadným bodem je prvek x_1, neboť každá koule $K(x_1, r)$

obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti (73): první, třetí pátý atd., zkrátka všechny prvky s lichým indexem. — Ze stejných důvodů je také prvek x_2 hromadným bodem posloupnosti (73).

Tento příklad také ukazuje, že pro hromadné body posloupnosti neplatí analogie věty 14!

Podobně jako pojmy z předcházejících kapitol závisí také pojem konvergence na metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, s nímž pracujeme. Ukazuje to následující příklad; nejprve však dokážeme jednu jednoduchou větu:

Věta 15. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $S \subset M$. Dále budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z S. Jestliže tato posloupnost konverguje v $\{S, \varrho\}$ k prvku x_0, konverguje i v $\{M, \varrho\}$ k témuž prvku.*

Důkaz: Protože je $S \subset M$, je podle věty 1 také $\{S, \varrho\}$ metrický prostor. Jestliže posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{S, \varrho\}$, znamená to, že existuje prvek x_0 z S tak, že $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, čili že ke každému kladnému číslu ε existuje číslo N tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Ale protože x_0 patří také do M a metrika je v M i v S stejná, znamená to, že $x_n \underset{(1)}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$, a věta je dokázána.

Příklad 62. Budiž I otevřený interval (0,1). Pak je $I \subset \mathsf{E}_1$ a $\{I, d\}$ je podle věty 1 metrický prostor. Zvolme v I posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž prvky jsou definovány takto: $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Umíme ukázat, že *číselná* posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 1; to podle příkladu 55 znamená, že

$$x_n \underset{(1)}{\rightarrow} 1 \quad \text{v } \{\mathsf{E}_1, d\}$$

Ovšem v metrickém prostoru $\{I, d\}$ posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nekonverguje*. Dokážeme to sporem: Předpokládejme, že existuje prvek x_0 z I, který je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{I, d\}$. Prvek x_0 leží v I, tj. je $0 < x_0 < 1$. Podle věty 15 konverguje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ k x_0 i v $\{\mathsf{E}_1, d\}$. To znamená, že naše posloupnost konverguje v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ současně k 1 a k x_0. Podle věty 14 pak musí být $x_0 = 1$, a to je spor s tím, že $x_0 < 1$.

Podle věty 15 plyne z konvergence v „menším" metrickém prostoru $\{S, \varrho\}$ už konvergence ve „větším" metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, kdežto obrácená implikace nemusí platit — to ukazuje příklad 62. Má-li platit obrácená implikace, musí být množina S uzavřená v $\{M, \varrho\}$.

Věta 16. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a budiž $S \subset M$ uzavřená množina v $\{M, \varrho\}$. Jestliže je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z S, která konverguje v $\{M, \varrho\}$, pak konverguje také v $\{S, \varrho\}$.*

Důkaz: Protože posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{M, \varrho\}$, existuje prvek x_0 z M a číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že

$$(*) \qquad \varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{pro } n > N$$

Ale prvky x_n leží v S, a srovnáme-li poznámku 21 s definicí 10, vidíme, že prvek x_0 leží v uzávěru $\overline{S}$ množiny S. Množina S je však uzavřená v $\{M, \varrho\}$, tj. $S = \overline{S}$ podle věty 11, a tedy leží prvek x_0 v S. Pak však vztah $(*)$ znamená, že $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ v $\{S, \varrho\}$ (metrika je v obou prostorech stejná), a věta je tím dokázána.

Příklad 63. Množina I z příkladu 62 nebyla uzavřená v $\{\mathsf{E}_1, d\}$, neboť to je koule $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Kdybychom za množinu I zvolili polouzavřený interval $(0,1\rangle$, odpadly by potíže s posloupností $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ale stejné komplikace by nastaly např. s posloupností $\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ (rozmyslete si to!). Teprve když za I zvolíme uzavřený interval $\langle 0,1\rangle$, bude pro každou posloupnost prvků z I konvergence v $\{I, d\}$ totožná s konvergencí v $\{E_1, d\}$.

V předcházejících příkladech jsme uvažovali dva metrické prostory $\{M_1, \varrho_1\}$ a $\{M_2, \varrho_2\}$, které se lišily pouze základními množinami. Uvažujme nyní naopak tutéž základní množinu, ale *různé* metriky na ní. Platí

Věta 17. *Buďte ϱ_1, ϱ_2 dvě metriky definované na množině M a nechť existuje kladná konstanta c tak, že pro všechny prvky x a y z M platí*

$$\varrho_2(x, y) \leqq c\varrho_1(x, y) \tag{74}$$

Pak platí: Je-li posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M konvergentní v $\{M, \varrho_1\}$, je konvergentní i v $\{M, \varrho_2\}$ a má tam tutéž limitu.

Důkaz: Nechť $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho_1\}$ a budiž ε kladné číslo. Pak existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon/c \quad \text{pro } n > N$$

Podle (74) je však potom

$$\varrho_2(x_n, x_0) \leqq c\varrho_1(x_n, x_0) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \text{ pro } n > N$$

a to znamená, že $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho_2\}$.

Příklad 64. Ve větě 3 jsme k metrice ϱ na M sestrojili další metriku ϱ_1 danou vzorcem

$$\varrho_1(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \tag{75}$$

Protože platí (viz str. 50)

$$\varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

plyne podle věty 17 z konvergence v $\{M, \varrho\}$ také konvergence v $\{M, \varrho_1\}$.

Z věty 17 plyne ihned toto tvrzení:

Jsou-li ϱ_1 a ϱ_2 dvě ekvivalentní metriky definované na množině M (viz definici 3), *pak je každá posloupnost, která konverguje v $\{M, \varrho_1\}$, konvergentní i v $\{M, \varrho_2\}$, a naopak je každá posloupnost, která konverguje v $\{M, \varrho_2\}$, konvergentní i v $\{M, \varrho_1\}$.*

Důkaz: Pro obě ekvivalentní metriky platí nejen vztah (74); existuje také kladná konstanta C tak, že pro všechna x a y z M je

$$\varrho_1(x, y) \leqq C\varrho_2(x, y)$$

a odtud plyne podle věty 17, že posloupnost konvergentní v $\{M, \varrho_2\}$ konverguje (k téže limitě) i v $\{M, \varrho_1\}$.

Příklad 65. Protože metriky d, p, m jsou na E_2 ekvivalentní (viz příklad 9), konverguje (resp. nekonverguje) posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů roviny současně ve všech prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ a $\{\mathsf{E}_2, m\}$ a má v případě konvergence všude tutéž limitu. Protože podobně jako v příkladu 56 lze ukázat, že konvergence v $\{\mathsf{E}_2, p\}$ znamená konvergenci po souřadnicích, znamená konvergenci po souřadnicích i konvergence v $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a $\{\mathsf{E}_2, m\}$.

Nerovnost (74) ovšem nemůžeme přeceňovat. Je to postačující podmínka pro to, aby se konvergence přenášela z prostoru $\{M, \varrho_1\}$ do prostoru $\{M, \varrho_2\}$, nikoliv však podmínka nutná. Ukazuje to tento příklad:

Příklad 66. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a ϱ_1 metrika z příkladu 64. Předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{M, \varrho_1\}$ k prvku x_0. To znamená, že k danému kladnému číslu η existuje číslo $N = N(\eta)$ tak, že pro $n > N$ je $\varrho_1(x_n, x_0) < \eta$. Zvolme číslo η poněkud speciálně ve tvaru $\eta = \dfrac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, kde je $0 < \varepsilon$. Pak je tedy

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \text{pro } n > N \tag{76}$$

Upravíme-li postupně první z těchto nerovností, dostáváme:

$$(1 + \varepsilon)\, \varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon$$

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon - \varepsilon\varrho_1(x_n, x_0) = \varepsilon(1 - \varrho_1(x_n, x_0))$$

$$\frac{\varrho_1(x_n, x_0)}{1 - \varrho_1(x_n, x_0)} < \varepsilon$$

ale vzhledem k formuli (75) máme

$$\frac{\varrho_1(x_n, x_0)}{1 - \varrho_1(x_n, x_0)} = \varrho(x_n, x_0), \text{ a tedy}$$

$$\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > N \tag{77}$$

To však znamená, že $x_n \underset{①}{\to} x_0$ také v $\{M, \varrho\}$. To doplňuje příklad 64: z konvergence v $\{M, \varrho_1\}$ plyne také konvergence v $\{M, \varrho\}$. Tento závěr bychom mohli dostat také z věty 17, kdybychom věděli, že existuje kladné číslo C tak, že pro všechny prvky x a y z M je

$$\varrho(x, y) \leqq C\varrho_1(x, y)$$

Takový vztah však obecně *nemusí* platit: stačí zvolit za $\{M, \varrho\}$ metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a pak je metrika ϱ_1 omezená, zatím co metrika ϱ (tj. metrika d) omezená není (viz též poznámku 16).

V úvodu této kapitoly jsme se zmiňovali o Bolzanově-Cauchyově kritériu konvergence číselných posloupností. Podívejme se, zda něco podobného platí v obecných metrických prostorech.

Definice 13. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z M. Řekneme, že tato posloupnost je *cauchyovská* (v $\{M, \varrho\}$), jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $m > N$ a $n > N$ je

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{78}$$

Poznámka 22. Nerovnost (78) má v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_1, d\}$ tvar (69). V tomto metrickém prostoru však podle zmíněného kritéria ze (78) už plyne (67) nebo (68). V obecném metrickém prostoru pak platí tato věta:

Věta 18. *Je-li posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v $\{M, \varrho\}$, je už cauchyovská v $\{M, \varrho\}$.*

Důkaz: Budiž x_0 limita posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že k číslu $\varepsilon > 0$ lze najít číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Toto číslo N je už oním hledaným číslem z definice 13: pak je totiž také $\varrho(x_m, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $m > N$ a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro tato m a n je

$$\varrho(x_m, x_n) \leqq \varrho(x_m, x_0) + \varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

To však znamená, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Bolzanovo-Cauchyovo kritérium lze vyslovit též takto: *Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ je konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská.* Zde byla důležitá slova „v $\{\mathsf{E}_1, d\}$“. V obecném metrickém prostoru však z toho, že posloupnost je cauchyovská, ještě *nemusí* plynout, že je konvergentní (opačnou implikaci zaručuje věta 18):

Příklad 67. Uvažujme metrický prostor $\{I, d\}$ z příkladu 62. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_n = \frac{n}{n+1}$, je cauchyovská v $\{I, d\}$: Je totiž

$$(*) \qquad d(x_m, x_n) = \left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{m}{m+1} - 1\right)\right| \leqq \left|1 - \frac{m}{m+1}\right| +$$

$$+ \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

Stačí nyní k danému $\varepsilon > 0$ zvolit $N = N(\varepsilon)$ tak, aby bylo $N \geqq \frac{2}{\varepsilon} - 1$, neboť pro $m > N$ je $m > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ čili $m + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ čili $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ a podobně pro $n > N$ je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže z (*) máme:

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

pro $m > N$ a $n > N$. Přitom však posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *nekonverguje* v $\{I, d\}$, takže v $\{I, d\}$ nelze větu 18 „obrátit".

Poznámka 23. Důkaz toho, že posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\{I, d\}$, který jsme provedli v předchozím příkladu, byl zbytečně komplikovaný, protože jsme vztah (78) dokazovali *přímo*. Lze to však dokázat i zprostředkovaně a bez složitých odhadů: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ k jedné, a je proto podle věty 18 cauchyovská v $\{\mathsf{E}_1, d\}$. To znamená, že

$$\text{pro } m > N = N(\varepsilon) \quad \text{a} \quad n > N \text{ je } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Poslední vztah však platí i v $\{I, d\}$, neboť metrika je zde stejná a prvky x_n patří do I. Naše posloupnost je tedy cauchyovská i v $\{I, d\}$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 68. Uvažujme metrický prostor $\{P, \pi\}$ z příkladu 14 a v něm posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou takto:

$$x_1 = x_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t\,; \quad x_2 = x_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$$

$$x_3 = x_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 ; \ldots$$

$$x_n = x_n(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}t^n ; \ldots$$

$0 \leqq t \leqq 1$. Tato posloupnost je cauchyovská v $\{P, \pi\}$: Je

$$x_m(t) - x_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}t^{n+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}t^m =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \ldots + \left(\frac{t}{2}\right)^{m-n+1}\right)$$

(můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m > n$). Součet v závorce není větší než součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{2}{2-t}$, takže máme

$$x_m(t) - x_n(t) \leqq \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1}\frac{2}{2-t} \leqq \frac{1}{2^{n+1}}.2 = \frac{1}{2^n}$$

(použili jsme toho, že je $0 \leqq t \leqq 1$). Proto je

$$\pi(x_m, x_n) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x_m(t) - x_n(t)| \leqq \frac{1}{2^n}$$

a tedy bude pro $n > N(\varepsilon) \geqq \lg \frac{1}{\varepsilon} \Big/ \lg 2$ platit $\pi(x_m, x_n) < < \varepsilon$. — Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ však *není konvergentní* v $\{P, \pi\}$. Uvažujeme-li totiž číselnou posloupnost $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ pro pevné t z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je $x_n(t)$ částečný součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{2}{2-t} = x_0(t)$$

To platí pro *každé* t z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a lze dokonce ukázat, že také $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n, x_0) = 0$. Funkce $x_0(t)$ však není polynom, a *nepatří* tedy do množiny P.

Předcházející příklady ukazují, že v řadě metrických prostorů neplatí analogie Bolzanova-Cauchyova kritéria. Vydělíme proto z množiny všech metrických prostorů zvláštní skupinu:

Definice 14. Řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z M má v $\{M, \varrho\}$ limitu (tj. konverguje).

Spolu s větou 18 tedy definice 14 říká, že v *úplném* metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ platí analogie zmíněného kritéria: *Posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *prvků z* M *je cauchyovská v* $\{M, \varrho\}$ *právě tehdy, konverguje-li v* $\{M, \varrho\}$.

Příklad 69. Metrický prostor $\{\mathsf{E}_1, d\}$ je úplný — plyne to z Bolzanova-Cauchyova kritéria a z příkladu 55. Úplnými metrickými prostory jsou také prostory $\{\mathsf{E}_i, d\}$, $\{\mathsf{E}_i, p\}$ a $\{\mathsf{E}_i, m\}$ pro $i = 2, 3$. Pro prostor $\{\mathsf{E}_3, p\}$ to plyne např. z příkladu 56: Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\{\mathsf{E}_3, p\}$, $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}]$, je také

$$|x_{mi} - x_{ni}| \leqq p(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{pro } n > N$$

tj. posloupnosti $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou cauchyovské v $\{\mathsf{E}_1, d\}$. Protože tento poslední prostor je úplný, existují čísla $x_{0i} = \lim_{n\to\infty} x_{ni}$ $(i = 1, 2, 3)$ a bod $x_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ je limitním bodem posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{\mathsf{E}_3, p\}$. Pro

$\{E_3, d\}$ a $\{E_3, m\}$ plyne úplnost z ekvivalence metrik p, m a d (dokažte!).

Příklad 70. Metrické prostory $\{P, \pi\}$ a $\{I, d\}$ *nejsou* úplné — plyne to z příkladů 68 a 67.

Příklad 71. Uvažujme na přímce E_1 množinu R všech racionálních čísel. Podle věty 1 je $\{R, d\}$ metrický prostor; není to však úplný metrický prostor. Označíme-li totiž $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, jsou x_n racionální čísla a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupností v R. Tato posloupnost je přitom cauchyovská v $\{R, d\}$; plyne to např. stejně jako v poznámce 23 z toho, že má v $\{E_1, d\}$ limitu — Eulerovo číslo e. Přitom však posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *není konvergentní* v $\{R, d\}$, neboť číslo e není racionální a nepatří tedy do R.

Dokázat úplnost nějakého konkrétního metrického prostoru není vždy snadná záležitost. Většina nejdůležitějších metrických prostorů však je úplných; když si přitom čtenář připomene neúplné metrické prostory, s nimiž jsme se zde zatím setkali, vidí, že většinou je možno množinu M „doplnit" vhodnými prvky tak, aby vznikla o něco obsáhlejší množina $\widetilde{M}$ a aby přitom metrický prostor $\{\widetilde{M}, \varrho\}$ už byl úplný. Tak např. v příkladu 71 tvořila množinu M všechna racionální čísla a doplněním této množiny o čísla iracionální dostaneme množinu $\widetilde{M} = E_1$ a úplný metrický prostor $\{E_1, d\}$; v příkladu 67 tvoří množinu M otevřený interval $(0, 1)$ a doplněnou množinu $\widetilde{M}$ uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$. Tento poznatek lze zobecnit, to však zde nebudeme probírat. Uvedeme ještě jeden příklad úplného metrického prostoru:

Příklad 72. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika daná vzorcem (45). Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je úplný: Podobně jako v příkladu 59 lze totiž ukázat, že k tomu, aby posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M byla cauchyovská, je nutné a stačí, aby měla tvar

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_0, x_0, x_0, x_0, \ldots\}$$

to jsou však právě ty posloupnosti, které podle příkladu 59 konvergují v $\{M, \varrho\}$.

Poznámka 24. Pojem konvergence je velmi důležitý v matematice i v jejích aplikacích. Často totiž nějaký jev nemůžeme popsat či vyjádřit přímo a vytváříme posloupnost přibližných popisů, přičemž při každém kroku chceme, aby tento popis byl přesnější, aby vzniklá posloupnost „konvergovala" k původnímu jevu. Zvláště markantní je to např. při různých početních záležitostech. — V metrickém prostoru jsme ve výhodném postavení: konvergenci můžeme zavést pomocí metriky. Někdy jsme však postaveni před skutečnost, že máme dánu množinu M a na ní už je předem nějak definována konvergence (bez použití metriky). Lze si nyní položit tuto otázku: Existuje nějaká metrika ϱ na množině M tak, aby konvergence v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ byla právě onou předem danou konvergencí? Je-li odpověď na tuto otázku kladná, řekneme, že množina M je *metrizovatelná.* — Je ovšem třeba poznamenat, že taková metrika nemusí vždy existovat, že se mohou vyskytnout množiny M s konvergencí, které nejsou metrizovatelné.

Příklad 73. Uvažujme množinu F všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (viz příklad 17). — (1) Definujme na množině F konvergenci takto:

Řekneme, že $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, kde $x_0 = x_0(t)$ a $x_n = x_n(t)$

($n = 1, 2, 3, \dots$) jsou funkce definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, jestliže pro každé t z tohoto intervalu konverguje číselná posloupnost $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ k číslu $x_0(t)$.

(Je to tzv. *bodová konvergence.*) Lze ukázat, že pak neexistuje *žádná* metrika na F, která by tuto konvergenci realizovala (důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámce této knížky). — (2) Definujme na množině F jiný typ konvergence takto:

Řekneme, že $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, jestliže existuje index N (závisející na posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) tak, že pro $n > N$ a pro každé t z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je $x_n(t) = x_0(t)$.

Tuto konvergenci realizuje metrika ϱ, daná vzorcem (45).