Co asi nevíte o vzdálenosti

3. kapitola. Otevřené množiny

In: Alois Kufner (author): Co asi nevíte o vzdálenosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1974. pp. 56–76.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403830

3. kapitola

OTEVŘENÉ MNOŽINY

Metrika je zobecněním pojmu eukleidovské vzdálenosti v E_2 nebo v E_3, je přenesením tohoto pojmu na obecné množiny. Můžeme proto naopak v těchto obecných množinách zavést pojmy, které známe důvěrně z roviny či z prostoru.

Budiž $a = [a_1, a_2, a_3]$ resp. $a = [a_1, a_2]$ bod v E_3 resp. v E_2 a budiž r kladné číslo. *Koule* (v E_3) resp. *kruh* (v E_2) se středem v bodě a a o poloměru r je množina těch bodů x z E_3 resp. z E_2, které mají od bodu a vzdálenost (eukleidovskou!) menší než r: jsou to ty body x, pro něž platí

$$d(x, a) < r$$

Ty body x, pro které platí

$$d(x, a) = r$$

tvoří *kulovou plochu* (sféru) v E_3 resp. *kružnici* v E_2.

Při definici koule a sféry je tedy důležitý pojem vzdálenosti. Použitím metriky můžeme analogické pojmy zavést v metrickém prostoru.

Definice 6. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor, a prvek množiny M a r kladné číslo. Množinu těch prvků x z M, které vyhovují nerovnosti

$$\varrho(x, a) < r \tag{48}$$

označíme $K(a, r)$ a nazveme *otevřenou koulí* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r. — Množinu těch prvků x z M, pro které platí

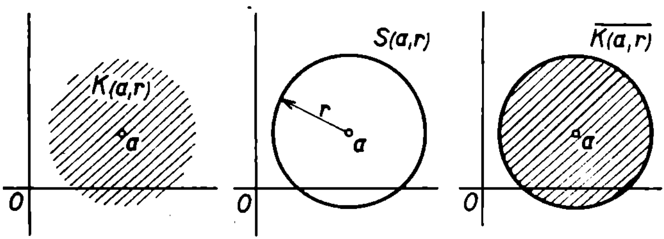
$$\varrho(x, a) = r \tag{49}$$

označíme $S(a, r)$ a nazveme *sférou* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r. — Množinu těch prvků x z M, pro které platí

$$\varrho(x, a) \leqq r \tag{50}$$

označíme $\overline{K(a, r)}$ a nazveme *uzavřenou koulí* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r.

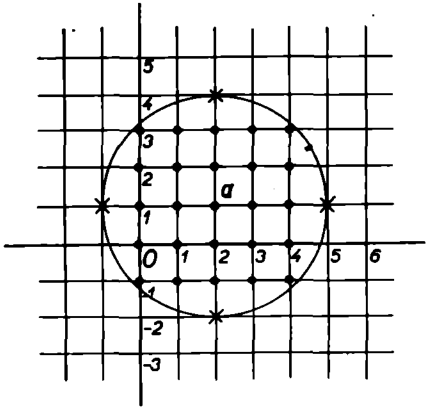
Příklad 26. V metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$ je $K(a, r)$ kruh (přesněji v n i t ř e k kruhu) o středu a a o poloměru



Obr. 17

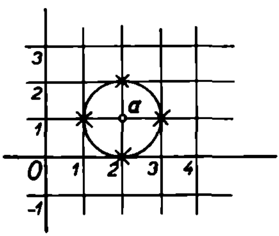
r, $S(a, r)$ je kružnice, která tento kruh ohraničuje, a $\overline{K(a, r)}$ je kruh *včetně* kružnice (viz obr. 17).

Příklad 27. Budiž M množina těch bodů $x = [x_1, x_2]$ z roviny E_2, jejichž souřadnice x_1, x_2 jsou *celá* čísla. Pak je $M \subset \mathsf{E}_2$ a podle věty 1 je $\{M, d\}$ opět metrický prostor. Zvolme za bod a bod [2,1]. Množina $K(a, 3)$ se skládá z 25 bodů, znázorněných na obr. 18 kroužkem, množina $S(a, 3)$ pak ze čtyř bodů znázorněných křížkem.

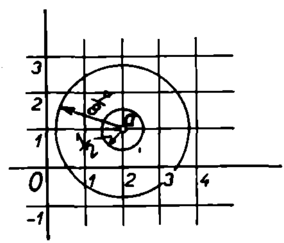


Obr. 18

kem. Množina $K(a, 1)$ se skládá z *jediného* bodu a, množina $S(a, 1)$ pak ze čtyř bodů [1,1], [2,2], [3,1] a [2,0] (viz obr. 19). Množina $K\left(a, \frac{1}{2}\right)$ obsahuje opět



Obr. 19



Obr. 20

jen bod a, množina $S\left(a, \frac{1}{2}\right)$ pak neobsahuje *žádný* bod, stejně jako množina $S\left(a, \frac{7}{8}\right)$ (viz obr. 20).

Příklad 28. Uvažujme metrický prostor $\{M, d\}$ z předcházejícího příkladu. Pro dva *různé* body y, z z M je zřejmě $d(y, z) \geqq 1$. Uvažujme množinu $S \subset M$ a vzdálenost $d(x, S)$ bodu x z M od podmnožiny S (viz definici 5). Pak jsou dvě možnosti: (α) buď je x z S, a pak je podle příkladu 23 $d(x, S) = 0$, (β) nebo prvek x nepatří do S, a pak je $d(x, y) \geqq 1$ pro každé $y \in S$, a tedy také $d(x, S) \geqq 1$. Situace je tedy podobná jako v příkladu 24.

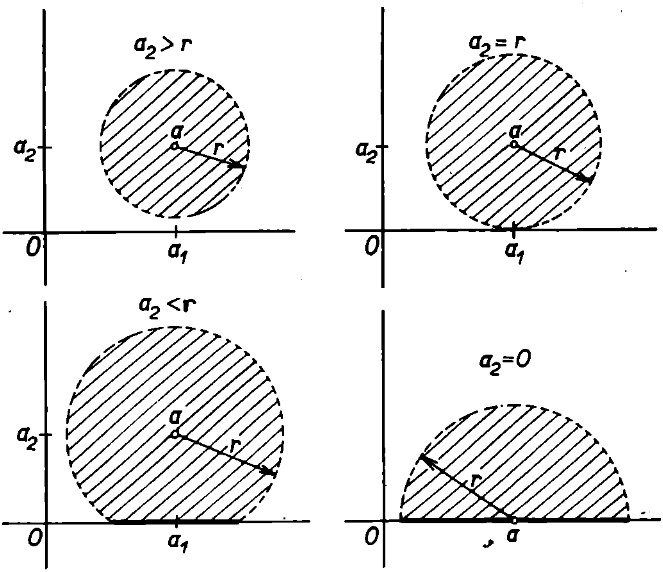
Příklad 29. Uvažujme v $\{\mathsf{E}_3, d\}$ otevřenou kouli $K(a, r)$, kde zvolíme $a = [0,0,0]$, a označme tuto otevřenou kouli písmenem S. Pak bod $x = [r, 0, 0]$ ($r > 0$!) *neleží* v S; přesto však je

$$d(x, S) = 0$$

Dokážeme to: Je $d(x, y) \geqq 0$ pro všechna y z S, a tedy je také $d(x, S) \geqq 0$. Kdyby bylo $d(x, S) = \alpha > 0$, muselo by být $d(x, y) \geqq \alpha$ pro *všechna* y z S. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\alpha < r$. Zkoumejme nyní bod $y = \left[r - \frac{1}{2}\alpha, 0, 0\right]$; tento bod leží v S, neboť $d(y, a) = r - \frac{1}{2}\alpha < r$. Přitom však je $d(x, y) = \sqrt{\left[r - \left(r - \frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2} = \frac{1}{2}\alpha$, tj. našli jsme bod y v S, který je od bodu x vzdálen o méně než α. To je spor s tím, že $d(x, y) \geqq \alpha > 0$ pro všechna y z S, a tedy musí být $\alpha = 0$, tj. $d(x, S) = 0$. — Tento příklad tedy ukazuje, že implikaci (a) v poznámce 11 nelze obrátit.

Poznámka 12. V dalším budeme obvykle místo termínu „otevřená koule" užívat prostě termínu „koule", zatím co u uzavřené koule $\overline{K(a, r)}$ uzavřenost vždy zdůrazníme. — Upozorněme též, že množina $K(a, r)$ se často nazývá *okolím* (nebo přesněji *r-okolím*) bodu a (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).

Příklad 30. Budiž M množina těch bodů $x = [x_1, x_2]$ z E_2, pro jejichž druhou souřadnici platí $x_2 \geqq 0$ (množina M je tedy horní polorovina včetně osy x_1). Podle věty 1 je $\{M, d\}$ opět metrický prostor; geometrický tvar



Obr. 21

koule $K(a, r)$ v $\{M, d\}$ závisí na poloze bodu a (viz obr. 21): je-li $a = [a_1, a_2]$ a $a_2 \geqq r$, tvoří kouli $K(a, r)$ celý vnitřek kruhu; je-li $0 < a_2 < r$, tvoří kouli $K(a, r)$ jen část vnitřku tohoto kruhu a do $K(a, r)$ patří i body na tětivě; je-li konečně $a_2 = 0$, tvoří kouli $K(a, r)$ vnitřek půlkruhu (opět včetně průměru).

Příklad 31. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika z věty 2, daná vzorcem (45). Pak se koule $K(a, r)$ skládá

(α) jen z bodu a, je-li $r \leqq 1$

(β) ze *všech* bodů množiny M, je-li $r > 1$

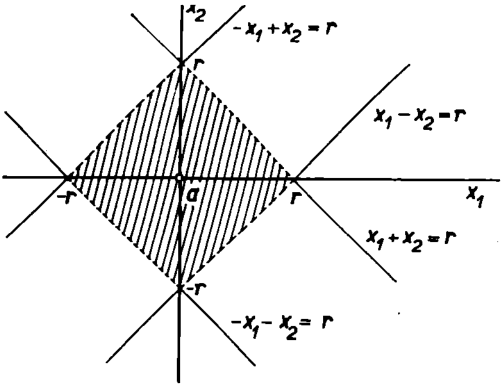
Sféra $S(a, r)$ neobsahuje *žádný* bod, je-li $r < 1$ nebo $r > 1$; je-li $r = 1$, patří do $S(a, r)$ [tj. do $S(a, 1)$] všechny body množiny M *vyjma* bod a samotný.

Protože se celý život pohybujeme v prostoru E_3 a jsme zvyklí na eukleidovskou vzdálenost $d(x, y)$, žijeme v představě, že koule musí být vždy „kulatá". Tuto představu trochu narušily předcházející příklady. 27, 30 a 31. Ale i v rovině, v níž vzdálenost měříme poměrně přirozenou „pošťáckou" metrikou $p(x, y)$, ztrácí koule svůj „kulatý" charakter:

Příklad 32. Uvažujme v $\{\mathsf{E}_2, p\}$ bod $a = [0, 0]$. Koule $K(a, r)$ je pak tvořena všemi těmi body $x = [x_1, x_2]$, pro něž je

$$|x_1| + |x_2| < r$$

Snadný rozbor této nerovnosti ukazuje, že jí vyhovují ty body $[x_1, x_2]$, které leží v oboru ohraničeném přímkami $x_1 + x_2 = r$, $x_1 - x_2 = r$, $-x_1 + x_2 = r$ a $-x_1 - x_2 = r$ (viz obr. 22). V $\{\mathsf{E}_2, p\}$ je tedy koule $K(a, r)$ *čtverec* (přesněji v n i t ř e k čtverce) o straně $r\sqrt{2}$, který má střed v bodě a a jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Sféra $S(a, r)$ je pak tvořena obvodem tohoto čtverce.



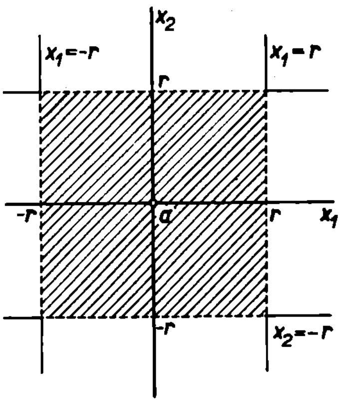
Obr. 22

Příklad 33. Podobně jako v $\{E_2, p\}$ má také koule v metrickém prostoru $\{E_2, m\}$ „hranatý" tvar: Zvolíme-li bod a jako v příkladu 32, bude koule $K(a, r)$ tvořena těmi body $x = [x_1, x_2]$, pro něž je

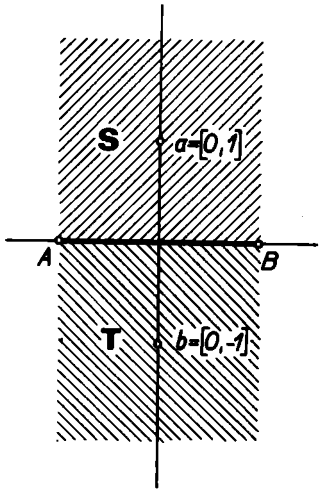
$$\max(|x_1|, |x_2|) < r$$

této nerovnosti vyhovují všechny ty body $[x_1, x_2]$, které leží v oboru ohraničeném přímkami $x_1 = r$, $x_1 = -r$, $x_2 = r$ a $x_2 = -r$ (viz obr. 23). V $\{E_2, m\}$ je tedy koule $K(a, r)$ opět *čtverec* o straně $2r$, který má střed v bodě a a jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Sféra $S(a, r)$ je pak tvořena obvodem tohoto čtverce.

Příklad 34. Uvažujme v metrickém prostoru $\{E_2, m\}$ z příkladu 33 dvě otevřené koule: $S = K(a, 1)$, $T = K(b, 1)$, kde $a = [0, 1]$ a $b = [0, -1]$ (viz obr. 24).



Obr. 23



Obr. 24

Tyto množiny nemají *žádný společný bod*, přitom však je jejich vzdálenost nulová:

$$m(S, T) = 0$$

Označíme-li totiž P úsečku AB z obr. 24, lze ukázat, že platí

$$m(x, S) = 0\,, \quad m(x, T) = 0 \quad \text{pro každý bod } x \text{ z } P$$

důkaz se vede sporem podobně jako v příkladu 29. Podle „trojúhelníkové nerovnosti" z úlohy 6 je

$$0 \leqq m(S, T) \leqq m(S, x) + m(x, T) = 0 + 0 = 0$$

čili je $m(S, T) = 0$. — Tento příklad tedy ukazuje, že implikaci (b) v poznámce 11 nelze obrátit.

Úloha 7. Rozmyslete si, jak budou vypadat koule v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_3, p\}$ a $\{\mathsf{E}_3, m\}$. (Budou to jisté *krychle.*)

Geometrický tvar koule $K(a, r)$ v rovině E_2 tedy může být při různých metrikách dosti odlišný. Dokonce lze *naopak* k danému geometrickému útvaru v rovině (který ovšem musí splňovat jisté podmínky) najít metriku ϱ tak, aby ve výsledném metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ znázorňoval tento útvar kouli (o poloměru 1).

Budiž tedy v rovině dán nějaký rovinný útvar $\mathcal{U}$, který má tyto vlastnosti:

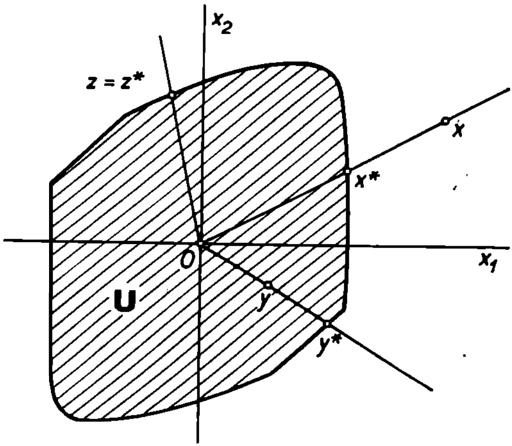
(1) obsahuje počátek [0, 0]

(2) je *konvexní* (tj. jsou-li x a y dva body z $\mathcal{U}$, leží úsečka, která tyto body spojuje, celá v $\mathcal{U}$)

(3) je *symetrický* vzhledem k počátku (tj. leží-li v $\mathcal{U}$ bod $[x_1, x_2]$, leží v $\mathcal{U}$ i bod $[-x_1, -x_2]$)

(4) je *otevřený* (tj. je-li x bod z $\mathcal{U}$, existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že „koule" $K(x, \varepsilon)$ — při použití eukleidovské metriky, tj. koule v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$ — leží také v $\mathcal{U}$; číslo ε přitom může záviset na bodu x)

Protože obor $\mathcal{U}$ je konvexní, protne každá přímka, vycházející z počátku, hranici oboru $\mathcal{U}$ právě v jednom bodě. Je-li nyní x libovolný bod z E_2, označme x^* průsečík polopřímky, určené bodem x a počátkem 0, s hra-



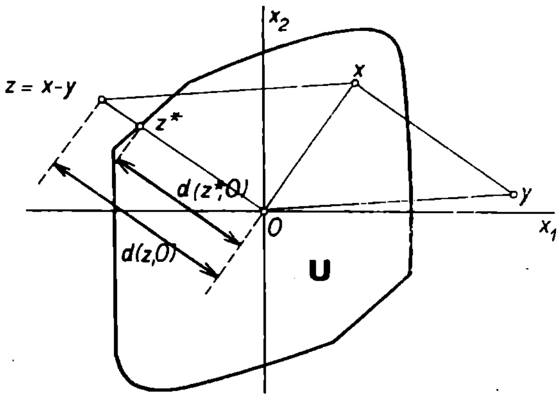
Obr. 25

nicí oboru $\mathcal{U}$ (viz obr. 25). Bod x^* je bodem x určen jednoznačně. Definujme nyní metriku ϱ takto:

$$\varrho(x, y) = \frac{d(z, 0)}{d(z^*, 0)} \tag{51}$$

kde $z = x - y = [x_1 - y_1, x_2 - y_2]$ a z^* je bod na hranici oboru $\mathcal{U}$, odpovídající bodu z (viz obr. 26).

Nebudeme zde dokazovat, že vzorcem (51) je skutečně definována metrika, tj. že $\varrho(x, y)$ má vlastnosti **A** až **C** z definice 1. Poznamenejme jen, že vlastnost (3) — tj. symetrie oboru $\mathcal{U}$ podle počátku — je podstatná pro symetrii metriky ϱ, tj. pro vlastnost **B**, a že vlastnost (2) — tj. konvexita (vypuklost) útvaru $\mathcal{U}$ — se využívá



Obr. 26

pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti, tj. pro vlastnost **C**.

Pomocí metriky ϱ z (51) dostáváme tedy metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ a platí toto tvrzení:

Koule $K(0, 1)$ *v metrickém prostoru* $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ *je totožná s rovinným útvarem* $\mathcal{U}$.

Důkaz: (a) Je-li x bod z $\mathcal{U}$, leží odpovídající bod x^* na polopřímce $0x$ *za* bodem x; je tedy $d(x, 0) < d(x^*, 0)$ čili

$$\varrho(x, 0) < 1$$

To znamená, že všechny body z $\mathcal{U}$ leží současně v kouli $K(0,1)$ čili že $\mathcal{U} \subset K(0, 1)$.

(b) Neleží-li bod x v oboru $\mathscr{U}$, jsou dvě možnosti: (b-1) leží na hranici oboru $\mathscr{U}$ — pak je $x^* = x$ čili $d(x, 0) = d(x^*, 0)$ čili $\varrho(x, 0) = 1$; (b-2) bod x^* leží na polopřímce $0x$ *před* bodem x čili je $d(x^*, 0) < d(x, 0)$ čili $\varrho(x, 0) > 1$. V případě (b) je tedy

$$\varrho(x, 0) \geqq 1$$

čili takový bod x *neleží* v kouli $K(0, 1)$.

Doporučujeme čtenáři, aby si předchozí úvahy ilustroval na obrázku. Případu (a) odpovídá bod y z obr. 25, případu (b-1) bod z a případu (b-2) bod x. — Současně si čtenář při těchto úvahách všiml, že hranice oboru $\mathscr{U}$ je totožná se sférou $S(0, 1)$. Všude jsme se ovšem spoléhali na to, že z geometrického názoru víme, co je míněno *hranicí* oboru $\mathscr{U}$. V dalším budeme tento pojem precizovat (viz kap. 4).

Poznámka 13. Dovedeme tedy k jistému rovinnému útvaru $\mathscr{U}$ sestrojit metriku ϱ tak, že tvar oboru $\mathscr{U}$ předurčuje tvar koule $K(0, 1)$ v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$. Čtenář jistě snadno upraví podmínky (1)—(4), které obor $\mathscr{U}$ musel splňovat, i pro případ trojrozměrného útvaru $\mathscr{U}$. Je ovšem třeba zdůraznit, že přenesení těchto úvah z roviny E_2 či z prostoru E_3 na *obecné* množiny M *není vždy možné.* Aby bylo možno k nějaké podmnožině $\mathscr{U}$ v množině M sestrojit takovou metriku ϱ, že by množina $\mathscr{U}$ byla totožná s jistou koulí v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, musí mít množina M už předem jistou strukturu: musí být definován součet dvou prvků z M a α-násobek prvku z M, aby bylo možno vůbec hovořit o „úsečce“ v $\mathscr{U}$ [viz vlastnost (2)] nebo o „symetrických prvcích“ [viz vlastnost (3)]. S podobnou situací jsme se setkali už na str. 16 při úvaze o vlastnostech **D** a **E** metriky d.

Nyní už můžeme zavést důležitý pojem otevřené množiny:

Definice 7. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $S \subset M$ je *otevřená* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), jestliže ke každému prvku x z S existuje kladné číslo $r = r(x)$*) tak, že koule $K(x, r)$ leží celá v S.

Poznámka 14. Kdybychom užili terminologie, o níž se zmiňujeme v poznámce 12, mohli bychom říci, že množina $S \subset M$ je otevřená (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), jestliže s každým bodem x z S leží v S i jisté okolí tohoto bodu.

Příklad 35. Množina M, která tvoří základ metrického prostoru $\{M, \varrho\}$, je otevřenou množinou (v $\{M, \varrho\}$). Každá koule $K(x, r)$ v $\{M, \varrho\}$ je totiž už podle definice 6 tvořena výhradně body množiny M a leží tedy automaticky celá v množině M. — Také *prázdná* množina (tj. množina, neobsahující *žádné* prvky — označme ji v dalším $\emptyset$) je otevřenou množinou v $\{M, \varrho\}$: Pak je totiž také každá „koule" se „středem" v $\emptyset$ prázdnou množinou a leží tedy celá v prázdné množině $\emptyset$. Dokázali jsme tedy tuto větu:

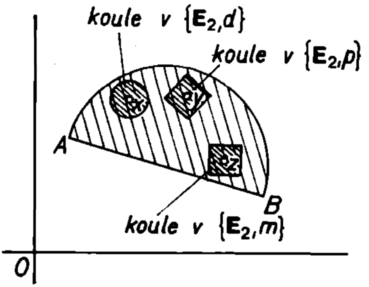
Věta 4. *Množina M a prázdná množina $\emptyset$ jsou otevřené množiny v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$.*

Příklad 36. Uvažujme v rovině E_2 tři množiny (viz obr. 27): Množinu S_1 tvoří půlkruh bez oblouku $\widehat{AB}$ i bez úsečky $\overline{AB}$, množinu S_2 půlkruh bez oblouku $\widehat{AB}$, ale

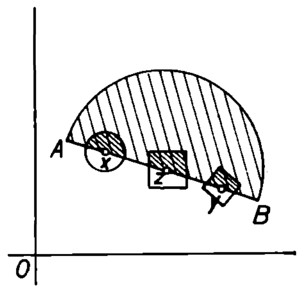
---

*) Tímto zápisem zdůrazňujeme skutečnost, že číslo r může záviset na prvku x.

včetně úsečky $\overline{AB}$, a množinu S_3 tvoří půlkruh včetně oblouku $\widehat{AB}$ i úsečky $\overline{AB}$. — Množina S_1 je otevřená v metrických prostorech $\{E_2, d\}$, $\{E_2, p\}$, $\{E_2, m\}$, neboť pro každý bod x z S_1 lze v příslušných prostorech sestrojit koule se středem v x tak, aby celá koule ležela opět v S_1 (tyto koule jsou znázorněny na obr. 27a — srv.



Obr. 27a



Obr. 27b

též s příklady 32 a 33). Množina S_2 naproti tomu *není* otevřená v žádném z těchto metrických prostorů, a stejně je tomu s množinou S_3: zvolíme-li totiž bod x na úsečce $\overline{AB}$ (a tedy v S_2 i v S_3), bude část koule v každém z těchto prostorů ležet *mimo* množiny S_2 a S_3 (na obr. 27b je to nezašrafovaná část příslušných koulí).

Úloha 8. Ukažte, že koule $K(a, r)$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je otevřená množina v tomto prostoru.

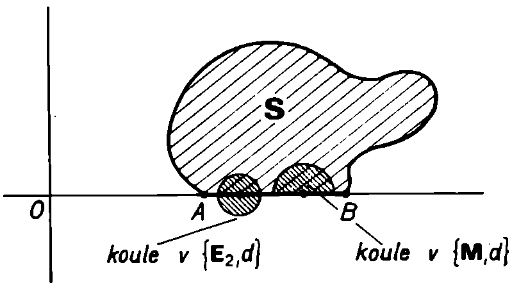
Příklad 37. Uvažujme množinu S_2 z příkladu 36 a metrický prostor $\{S_2, p\}$. Podle věty 4 *je* množina S_2

otevřená v metrickém prostoru $\{S_2, p\}$, podle příkladu 36 však *není* otevřená v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, p\}$.

Příklad 38. Uvažujme v rovině E_2 množinu S, tvořenou *jediným* bodem a. Tato množina není otevřená v žádném z metrických prostorů z příkladu 36: Každá koule $K(a, r)$ v některém z těchto metrických prostorů totiž podle příkladů 26, 32 a 33 obsahuje vedle bodu a ještě řadu dalších bodů roviny a nemůže proto ležet celá v S (což by v tomto případě znamenalo: být totožná s bodem a).

Podobná situace jako v příkladu 37 nastane v následujícím příkladu:

Příklad 39. Uvažujme obor S v rovině E_2, znázorněný na obr. 28. Úsečka $\overline{AB}$ nechť přitom *patří* do množiny S,



Obr. 28

zbytek křivky, ohraničující obor S, nechť do S *nepatří*. Pak je množina S otevřená v metrickém prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 30, ale *není* otevřená v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$. Důvod je patrný z obrázku: u prostoru

$\{E_2, d\}$ „vadí“ — podobně jako u množiny S_2 z příkladu 36 — opět body na úsečce $\overline{AB}$, neboť pro takové body x každá koule $K(x, r)$ v $\{E_2, d\}$ obsahuje body, které v S neleží; naproti tomu koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{M, d\}$ zůstává i pro tyto body x v množině S — viz příklad 30.

Z příkladů 37 a 39 plyne, že *táž* množina S může být v jednom metrickém prostoru $\{M_1, \varrho_1\}$ otevřená, zatím co v druhém metrickém prostoru $\{M_2, \varrho_2\}$ otevřená být nemusí (musí být ovšem $S \subset M_1$ i $S \subset M_2$). Proto jsme v definici 7 důsledně říkali, že množina je „otevřená (v $\{M, \varrho\}$)“. V dalším budeme dodatek „v $\{M, \varrho\}$“ vynechávat, bude-li ze souvislosti jasné, o *jaký* metrický prostor se jedná.

V příkladech 37 a 39 byly metriky ϱ_1 a ϱ_2 vždy stejné (byla to metrika p v příkladu 37 a metrika d v příkladu 39) a vlastnost množiny S „býti otevřená v $\{M, \varrho\}$“ závisela jen na množině M. Z dalších příkladů vyplyne, že tuto vlastnost množiny S může ovlivnit také metrika ϱ.

Dokážeme nejprve toto tvrzení:

Věta 5. *Budiž M libovolná množina a budiž ϱ metrika z věty* 2, *daná vzorcem* (45). *Pak platí: V metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je každá množina $S \subset M$ otevřená.*

Důkaz: Budiž S libovolná množina v M a budiž x bod z S. Zvolíme-li $r < 1$, je koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ tvořena *jen* bodem x (viz příklad 31), a leží tedy celá v S. To platí pro každý bod z S, a proto je množina S otevřená v $\{M, \varrho\}$.

Příklad 40. Zvolíme-li ve větě 5 za množinu M rovinu E_2, je v metrickém prostoru $\{E_2, \varrho\}$ otevřená *každá* množina roviny, tedy i množiny S_2 a S_3 z příkladu 36 a jednobodová množina z příkladu 32, které *nejsou* otevřenými množinami v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$.

Metrika ϱ z věty 2 je sice velmi jednoduchá, ale z věty 5 plyne, že pomocí této metriky asi nebude možné nějak blíže charakterizovat a roztřídit podmnožiny S množiny M. Příklad 40 to konečně názorně ilustruje: v $\{E_2, \varrho\}$ jsou všechny množiny z hlediska otevřenosti stejně „kvalitní", zatím co např. v $\{E_2, d\}$ je struktura podmnožin S z tohoto hlediska podstatně mnohotvárnější.

Nechť je dána množina M a nechť jsou ϱ_1, ϱ_2 dvě metriky na M. Označme dále $\mathscr{S}_1$ soustavu všech otevřených množin v $\{M, \varrho_1\}$ a $\mathscr{S}_2$ soustavu všech otevřených množin v $\{M, \varrho_2\}$. Pak je často užitečné znát odpověď na tento problém: Za jakých podmínek na metriky ϱ_1 a ϱ_2 platí: patří-li množina $S \subset M$ do soustavy $\mathscr{S}_1$, pak patří také do soustavy $\mathscr{S}_2$?

Na tuto otázku odpovídá zčásti následující věta.

Věta 6. *Buďte ϱ_1 a ϱ_2 dvě metriky definované na množině M a nechť existuje kladná konstanta c tak, že pro všechny prvky x a y z M platí*

$$\varrho_1(x, y) \leqq c\varrho_2(x, y) \tag{52}$$

Pak platí: Je-li množina $S \subset M$ otevřená v $\{M, \varrho_1\}$, je otevřená i v $\{M, \varrho_2\}$.

Důkaz: Označme $K_1(a, r)$ kouli v $\{M, \varrho_1\}$ a $K_2(a, r)$ kouli v $\{M, \varrho_2\}$. Nechť je množina S otevřená v $\{M, \varrho_1\}$. To znamená, že pro každý prvek x z S existuje číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K_1(x, r)$ leží celá v S.

Uvažujme nyní v $\{M, \varrho_2\}$ kouli $K_2(x, r/c)$, kde c je konstanta z nerovnosti (52). Je-li z bod z této koule, znamená to, že

$$\varrho_2(x, z) < \frac{r}{c}$$

Z nerovnosti (52) pak plyne

$$\varrho_1(x, z) \leqq c\varrho_2(x, z) < c\frac{r}{c} = r$$

To však znamená, že $\varrho_1(x, z) < r$ neboli že bod z z koule $K_2(x, r/c)$ leží v kouli $K_1(x, r)$.

To platí pro *každý* bod z koule $K_2(x, r/c)$, takže tato koule leží celá v kouli $K_1(x, r)$. Ale koule $K_1(x, r)$ leží celá v množině S, a proto leží v S i celá koule $K_2(x, r/c)$. Tím jsme k danému prvku x z S našli požadované kladné číslo r/c, a množina S je tedy otevřená v $\{M, \varrho_2\}$.

Poznámka 15. Použijeme-li pro soustavy otevřených množin v metrických prostorech z věty 6 označení $\mathscr{S}_1$ a $\mathscr{S}_2$, lze tvrzení věty 6 vyslovit takto: *Platí-li* (52) *a patří-li množina $S \subset M$ do soustavy $\mathscr{S}_1$, patří i do soustavy $\mathscr{S}_2$*. Z (52) tedy plyne

$$\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2 \tag{53)]}$$

Soustava $\mathscr{S}_2$ ovšem může být mnohem „bohatší" než soustava $\mathscr{S}_1$; mohou existovat množiny S, které jsou otevřené v $\{M, \varrho_2\}$ a nejsou otevřené v $\{M, \varrho_1\}$.

Poznámka 16. Nerovnost (52) není možno přeceňovat. Z předchozích příkladů totiž plyne (viz např. příklad 40), že každá množina, která je otevřená v $\{\mathsf{E}_2, d\}$, je otevřená i v $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$, kde ϱ je metrika z vzorce (45). Přitom však pro obě metriky analogie vztahu (52) neplatí: pak by totiž musela existovat kladná konstanta c tak, že pro všechny body x, y v rovině by bylo

$$d(x, y) \leqq c\varrho(x, y) \leqq c \tag{54}$$

neboť — jak víme — $\varrho(x, y) \leqq 1$. Nerovnost (54) však *není* splněna pro všechny body roviny: stačí zvolit $x = [0, 0]$ a $y = [2c, 0]$.

Z věty 6 plyne toto tvrzení:

Jsou-li ϱ_1 *a* ϱ_2 *dvě ekvivalentní metriky, definované na množině* M (viz definici 3), *jsou všechny otevřené množiny v* $\{M, \varrho_1\}$ *otevřené i v* $\{M, \varrho_2\}$ *a naopak všechny otevřené množiny v* $\{M, \varrho_2\}$ *jsou otevřené i v* $\{M, \varrho_1\}$.

Důkaz: Jsou-li metriky ϱ_1 a ϱ_2, ekvivalentní, platí nerovnost (52) a podle poznámky 15 je tedy $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$. Současně však existuje konstanta $C > 0$ tak, že platí také nerovnost

$$\varrho_2(x, y) \leqq C\varrho_1(x, y)$$

a podle poznámky 15 je pak $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$. To znamená, že $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$, a to jsme také chtěli dokázat.

Příklad 41. Z příkladu 9 plyne, že otevřené množiny v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$ jsou otevřené i v metrických prostorech $\{E_2, p\}$ a $\{E_2, m\}$ a naopak.

Odbočení šesté. V moderní matematice se velmi často setkáváme s tzv. *topologickými prostory*. Nebudeme je zde rozebírat; zmiňujeme se o nich především proto, že v nich hraje důležitou roli právě pojem otevřené množiny. Poznamenejme tedy jen tolik, že každý metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je současně topologickým prostorem a že dva metrické prostory $\{M, \varrho_1\}$ a $\{M, \varrho_2\}$ s ekvivalentními metrikami ϱ_1 a ϱ_2 určují *týž* topologický prostor.

Konec šestého odbočení

Odbočení sedmé. Čtenář je jistě seznámen s pojmem funkce *spojité v bodě:* Je-li f funkce reálné proměnné t, definovaná pro všechna reálná čísla t, řekneme, že je spojitá v bodě a z E_1, platí-li:

Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo $\delta = \delta(\varepsilon)$ závislé na ε tak, že pro všechna t, pro která platí $|t - a| < \delta$, je $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$.

Uvědomíme-li si, jak je definována eukleidovská vzdálenost d v E_1, můžeme poslední požadavek zapsat takto:

$$d(t, a) < \delta \Rightarrow d[f(t), f(a)] < \varepsilon$$

nebo takto:

$$t \text{ leží v kouli } K(a, \delta) \Rightarrow f(t) \text{ leží v kouli } K[f(a), \varepsilon],$$

nebo to konečně — bez použití čísel ε a δ — můžeme vyjádřit takto: *Ke každé kouli* (v $\{\mathsf{E}_1, d\}$) *se středem v bodě* $f(a)$ (označme ji $\mathscr{K}$) *existuje koule se středem v bodě* a, *která se celá zobrazí* (pomocí funkce f) *do koule* $\mathscr{K}$.

Tato formulace umožňuje přenést pojem spojitosti v bodě i na abstraktní množiny a na zobrazení F, která prvkům metrického prostoru $\{M, \varrho\}$ přiřazují prvky jiného metrického prostoru $\{N, \sigma\}$: Je-li každému prvku x z M přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z N, řekneme, že zobrazení F (z M do N) je *spojité v bodě* (*prvku*) a z M, jestliže ke každé kouli K_1 (v metrickém prostoru $\{N, \sigma\}$) se středem v $F(a)$ existuje koule K_2 (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) se středem v a, která se *celá* zobrazí (pomocí zobrazení F) do koule K_1.

Úloha. Ilustrujte si pojem spojitosti zobrazení v bodě metrického prostoru na různých konkrétních případech. Rozmyslete si, co znamená spojitost zobrazení F z $\{E_2, d\}$ do $\{E_2, d\}$. — V příkladu 5 jsme definovali zobrazení přímky E_1 do roviny E_2 a v poznámce 6 jsme analogicky definovali zobrazení roviny E_2 do prostoru E_3. Jsou tato zobrazení spojitá?

Konec sedmého odbočení