Co asi nevíte o vzdálenosti

2. kapitola. Metrika, metrický prostor

In: Alois Kufner (author): Co asi nevíte o vzdálenosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1974. pp. 33–55.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403829

2. kapitola

METRIKA, METRICKÝ PROSTOR

Poznali jsme zatím několik typů vzdáleností v rovině, které vesměs vyhovovaly podmínkám **A** až **C**. Provedeme nyní jisté zevšeobecnění našich poznatků a přeneseme pojem vzdálenosti do obecných, nijak blíže nepopsaných množin.

Definice 1. Budiž M nějaká množina, jejíž prvky budeme označovat $x, y, z \ldots$. Řekneme, že *na množině M je definována metrika* ϱ, jestliže každé uspořádané dvojici prvků x, y z M je přiřazeno nezáporné číslo, které označíme

$$\varrho(x, y)$$

(= „vzdálenost prvku x od prvku y“) a které má tyto vlastnosti:

A $\quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B $\quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro každé dva prvky x, y z M

C $\quad \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ pro každé tři prvky x, y, z z M

Poznámka 8. Definice 1 je vlastně zbytečně široká. Stačilo by definovat metriku takto:

Definice 1*. Řekneme, že na množině M je definována metrika, jestliže každé uspořádané dvojici prvků x, y z M je přiřazeno reálné číslo $\varrho(x, y)$, vyhovující těmto podmínkám:

A* $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B* $\varrho(x, z) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, z)$ pro každé tři prvky x, y, z z M

Ukážeme, že pak už jsou splněny všechny podmínky definice 1:

1. Položíme-li v **B*** $x = z$, dostaneme vzhledem k **A***

$$0 = \varrho(x, x) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, x) = 2\varrho(y, x)$$

Odtud plyne, že $\varrho(y, x) \geqq 0$ pro každé dva prvky x, y z M, tj. že číslo $\varrho(x, y)$, o němž jsme předpokládali pouze to, že je reálné, je dokonce nezáporné.

2. Položíme-li v **B*** $z = y$, dostaneme opět vzhledem k **A***

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, y) = \varrho(y, x)$$

tj.

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(y, x) \text{ pro všechny prvky } x, y \text{ z } M$$

Protože x a y jsou libovolné prvky, můžeme je zaměnit a dostaneme platnou nerovnost

$$\varrho(y, x) \leqq \varrho(x, y)$$

Z obou posledních nerovností už plyne **B**.

3. Protože podle předcházejícího odstavce je splněna podmínka **B**, můžeme v **B*** místo $\varrho(y, x)$ psát $\varrho(x, y)$ a máme trojúhelníkovou nerovnost ve tvaru **C**.

My však budeme používat „názornější“ definice 1, ze které více vyniká analogie metriky s eukleidovskou vzdáleností.

Definice 2. Množinu M, opatřenou metrikou („vzdáleností") ϱ, nazveme metrickým prostorem. Tento metrický prostor označíme symbolem

$$\{M, \varrho\}$$

Je-li možno na množině M definovat jinou metriku σ, tj. lze-li každým dvěma prvkům x, y z M přiřadit nezáporné číslo $\sigma(x, y)$, které má opět vlastnosti **A** až **C**:

$$\sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$
$$\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

je tím určen opět metrický prostor

$$\{M, \sigma\}$$

který je různý od metrického prostoru $\{M, \varrho\}$, pokud jsou ϱ a σ různé metriky, tj. pokud alespoň pro jednu dvojici prvků x, y z M je

$$\varrho(x, y) \neq \sigma(x, y)$$

Proto jsme u označení metrického prostoru explicitně zdůraznili vedle výchozí množiny M i metriku ϱ resp. σ.

Příklad 8. Zatím jsme se seznámili s těmito metrickými prostory:

(30) $\{\mathsf{E}_2, d\}$

(31) $\{\mathsf{E}_2, p\}$ (viz příklad 3)

(32) $\{\mathsf{E}_2, m\}$ (viz příklad 4)

(33) $\{\mathsf{E}_2, s\}$ (viz poznámku 6)

(34) $\{\mathsf{E}_2, d_p\}$ $p > 1$, $p \neq 2$ (viz příklad 6)

(35) $\{\mathsf{E}_2, b\}$ (viz příklad 7)

Zde všude je množina M stejná — je to rovina E_2; přesto se jedná o šest různých metrických prostorů, protože použité metriky jsou různé.

Při srovnávání různých metrik bude užitečný tento pojem:

Definice 3. Nechť jsou na množině M definovány dvě metriky ϱ a σ. Řekneme, že tyto metriky jsou ekvivalentní, existují-li dvě konstanty $k > 0$ a $K > 0$ tak, že pro *všechny* prvky x, y z M je

$$k\varrho(x, y) \leqq \sigma(x, y) \leqq K\varrho(x, y) \tag{36}$$

Poznámka 9. Ze vzorce (36) ovšem ihned plyne, že také

$$\frac{1}{K}\sigma(x, y) \leqq \varrho(x, y) \leqq \frac{1}{k}\sigma(x, y) \tag{37}$$

Příklad 9. Metriky d, p, m jsou ekvivalentní metriky na množině E_2; plyne to ze vzorců (17), (18) a (19). Naproti tomu metriky d a s ekvivalentní nejsou: Kdyby totiž byly ekvivalentní, muselo by existovat kladné číslo K tak, že

$$d(x, y) \leqq Ks(x, y)$$

pro všechna x, y z E_2, a tedy by bylo

$$d(x, y) \leqq 2KR \tag{38}$$

pro všechna x, y z E_2. Stačí však zvolit $x = [0, 0]$, $y = [4KR, 0]$. Pak je $d(x, y) = 4KR > 2KR$, což je spor s nerovností (38).

Uvedeme několik příkladů metrických prostorů:

Příklad 10. Budiž M množina všech klubů první ligy kopané v ČSSR v ročníku 1971/72. Těchto klubů je 16 — označme je tedy $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ a budiž b_i ($i = 1, 2, \ldots, 16$) počet bodů, které klub a_i získal v ročníku

Tabulka 1

1. Sp. Trnava	30	17	10	3	60 : 25	44
2. Sn. Bratislava	30	18	6	6	68 : 37	42
3. Dukla Praha	30	14	7	9	56 : 40	35
4. VSS Košice	30	12	11	7	38 : 28	35
5. ZVL Žilina	30	12	7	11	39 : 35	31
6. Sparta	30	13	5	12	50 : 52	31
7. Slavia	30	13	2	15	30 : 37	28
8. Lok. Košice	30	11	6	13	33 : 44	28
9. SU Teplice	30	9	9	12	36 : 37	27
10. AC Nitra	30	10	7	13	31 : 41	27
11. Tatran Prešov	30	10	7	13	31 : 42	27
12. Baník Ostrava	30	10	6	14	39 : 41	26
13. TŽ Třinec	30	9	8	13	41 : 46	26
14. Zbrojovka Brno	30	8	9	13	42 : 61	25
15. Inter Bratislava	30	8	8	14	35 : 42	24
16. J. Trenčín	30	9	6	15	31 : 52	24

1971/72 (viz tabulku 1). Definujme na této množině M „vzdálenost“ ϱ dvou „prvků“ (klubů) tímto předpisem:

$$\varrho(a_i, a_j) = |b_i - b_j| \tag{39}$$

Takto definovaná „vzdálenost“ splňuje podmínky **B** a **C** (dokažte!), nesplňuje však podmínku **A**: „vzdálenost“ „prvků“ Sparta a ZVL Žilina je nulová, ačkoliv se jedná o různé prvky, čili neplatí implikace

$$\varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

V tomto případě se tedy nejedná o metriku, a tedy ani o metrický prostor. — Metrický prostor však tvoří množina N, jejímiž prvky jsou družstva první ligy žen v národní házené, definujeme-li vzdálenost opět vzor-

Tabulka 2

1. Poruba	17	15	2	0	183 : 80	32
2. Náchod	17	13	2	2	171 : 94	28
3. Spartak Praha 4	18	11	4	3	133 : 94	26
4. Dobruška	18	10	1	7	131 : 134	21
5. Žatec	18	9	2	7	146 : 126	20
6. Baník Most	17	7	1	9	89 : 96	15
7. Jihlava	18	5	3	10	116 : 144	13
8. Hošťálkovice	17	5	1	11	84 : 131	11
9. RH Plzeň	18	3	1	14	66 : 122	7
10. TJ VŽKG	18	1	1	16	88 : 186	3

cem (39) na základě tabulky 2. Zde totiž žádná dvě družstva nemají stejný počet bodů, takže skutečně platí

$$\varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

a je tedy splněna i podmínka **A**. Tím tedy máme určen metrický prostor $\{N, \varrho\}$.

Příklad 11. Budiž $p \geqq 1$ a budiž M množina všech (nekonečných) posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ komplexních čísel x_i, které mají tuto vlastnost: řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

konverguje. Na této množině M definujme metriku takto: je-li $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, položíme

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \tag{40}$$

Pak je $\{M, \varrho\}$ metrický prostor: Výraz (40) má smysl (tj. je konečný), neboť platí Minkowského nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p\right)^{1/p} \tag{41}$$

[je to analogie nerovnosti (26), ovšem pro nekonečnou řadu; lze ji z (26) snadno odvodit]. Položíme-li v (41) $\alpha_i = x_i$ a $\beta_i = -y_i$, bude $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ a také $\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, neboť x i y patří do M, a tedy je $\varrho(x, y)$ konečné číslo. Doporučujeme čtenáři, aby si dokázal, že takto definovaná metrika ϱ skutečně má vlastnosti **A** až **C**; trojúhelníková nerovnost plyne z (41), zvolíme-li tam pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\alpha_i = x_i - y_i$ a $\beta_i = y_i - z_i$.

Odbočení páté. Zavedeme si pojem *suprema* a *infima* množiny reálných čísel.

Budiž K libovolná množina reálných čísel. Řekneme, že číslo σ je supremem množiny K, a píšeme

$$\sigma = \sup K$$

jestliže číslo σ má tyto dvě vlastnosti:

(1) pro každé číslo t z K je $t \leqq \sigma$

(2) ke každému kladnému číslu ε existuje číslo t_ε z K (závislé na ε!) tak, že

$$t_\varepsilon > \sigma - \varepsilon$$

Nazveme-li *horní mezí množiny* K každé číslo $\varkappa$, pro které platí:

$$t \leqq \varkappa \quad \text{pro každé } t \text{ z } K$$

je supremum množiny K vlastně „nejmenší horní mez množiny K“.

Pojem suprema je zobecněním pojmu maxima: Je-li množina K konečná, $K = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, je

$$\sup K = \max \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

Rozdíl mezi supremem a maximem je ovšem v tom, že maximum množiny K je *vždy* prvkem množiny K, zatímco supremum σ do množiny K patřit *nemusí*.

Příklad. Zvolíme-li za množinu K otevřený interval $(0,1)$, je $\sup K = 1$ a nepatří do K; maximum množiny K neexistuje. Zvolíme-li za K polootevřený interval $(0,1\rangle$, bude $\sup K = 1$ prvkem množiny K a bude rovno maximu.

Není-li množina K shora omezená, klademe

$$\sup K = +\infty$$

Je-li K nekonečná posloupnost: $K = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, užíváme místo označení $\sup K$ označení $\sup\limits_i t_i$.

Budiž opět K libovolná množina reálných čísel. Řekneme, že číslo τ je infimem množiny K, a píšeme

$$\tau = \inf K$$

jestliže číslo τ má tyto dvě vlastnosti:

(1*) pro každé číslo t z K je $t \geqq \tau$

(2*) ke každému kladnému číslu ε existuje číslo T_ε z K (závislé na ε!) tak, že

$$T_\varepsilon < \tau + \varepsilon$$

Nazveme-li *dolní mezí množiny* K každé číslo λ, pro která platí:

$$t \geqq \lambda \quad \text{pro každé } t \text{ z } K$$

je infimum množiny K vlastně „největší dolní mez množiny K". .

Pojem infima je opět zobecněním pojmu minima. Pro množiny, které nejsou zdola omezené, klademe

$$\inf K = -\infty$$

Jedna ze základních vět teorie reálných čísel zní takto:

Je-li množina K reálných čísel shora (resp. *zdola*) *omezená, existuje její supremum σ* (resp. *její infimum τ*) *a je určeno jednoznačně.*

Konec pátého odbočení

Příklad 12. Budiž N množina všech omezených posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$: prvek $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ patří do N, existuje-li číslo c (které může ovšem záviset na prvku x!) tak, že

$$|x_i| \leqq c \quad \text{pro všechna přirozená čísla } i$$

Tato množina je „bohatší" než množina M z příkladu 11, neboť prvek $\{1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots\}$ patří do N (stačí zvolit $c = 1$), ale nepatří do M (dokažte!). Definujme na množině N metriku σ takto: pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ z N je

$$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| \tag{42}$$

Pak dostáváme metrický prostor $\{N, \sigma\}$:

A Rovnost $x = y$ znamená, že $x_i = y_i$ pro $i = 1, 2,$

.... Zřejmě je $\sigma(x, y) \geqq 0$ a $\sigma(x, y) = 0$ pro $x = y$. Je-li naopak $\sigma(x, y) = 0$, je též $\sup_i |x_i - y_i| = 0$, a protože $|x_j - y_j| \leqq \sup_i |x_i - y_i|$ pro každé přirozené číslo j, je $x_j = y_j$ pro $j = 1, 2, \ldots$ čili $x = y$.

B $$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| = \sup_i |-(y_i - x_i)| = \\ = \sup_i |y_i - x_i| = \sigma(y, x)$$

C Je $$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leqq \\ \leqq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leqq \\ \leqq \sup_i |x_i - y_i| + \sup_i |y_i - z_i| = \\ = \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

Podle definice suprema je pak také

$$\sigma(x, z) = \sup_i |x_i - z_i| \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

Číslo $\sigma(x, y)$ z (42) má přitom smysl, neboť $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ patří do N, čili $|x_i| \leqq C$, $|y_i| \leqq D$, a proto je

$$\sup_i |x_i - y_i| \leqq \sup_i \{|x_i| + |y_i|\} \leqq C + D < \infty$$

Příklad 13. Budiž Q množina všech nekonečných posloupností $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Také zde lze zavést metriku: stačí položit pro x a y z Q

$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \tag{43}$$

a $\{Q, \tau\}$ je metrický prostor. Především má číslo (43) smysl, neboť je

$$\tau(x, y) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Čtenář si snadno sám dokáže, že τ splňuje podmínky **A** a **B** (u podmínky **A** je třeba využít toho, že nekonečná řada nezáporných sčítanců má součet rovný nule tehdy a jen tehdy, jsou-li nulové všechny sčítance), podmínka **C** plyne z nerovnosti (29) podobně jako v příkladu 7.

Příklad 14. Budiž P množina všech polynomů jedné proměnné t, definovaných na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Prvky x z P tedy mají tvar

$$x = x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

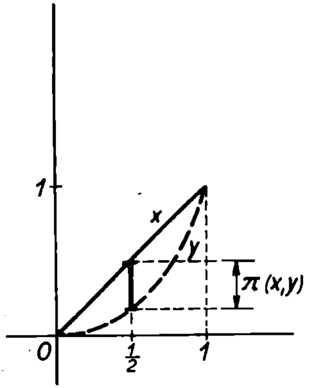
kde n je přirozené číslo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou komplexní čísla a proměnná t probíhá interval $\langle 0,1 \rangle$. Definujme na množině P metriku π takto: pro $x = x(t)$ a $y = y(t)$ z P je

$$(44) \qquad \pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \text{ *)}$$

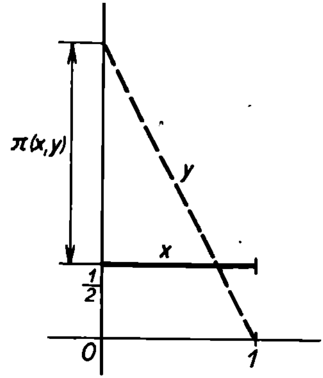
Na obrázcích 14 a 15 jsou znázorněny dva speciální případy: V prvém je $x = x(t) = t$ a $y = y(t) = t^2$ a $|x(t) - y(t)| = t - t^2$, takže $\pi(x, y) = \left|x\left(\frac{1}{2}\right) - y\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; v druhém je $x = x(t) = \frac{1}{2}$ a $y = y(t) = -2t + 2$ a $\pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left|-2t + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

---

*) Symbolem $\max_{0 \leq t \leq 1} g(t)$ nazýváme největší ze všech čísel tvaru $g(t)$, když t probíhá interval $\langle 0,1 \rangle$. Je-li funkce g polynom, existuje skutečně číslo t_0 z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takové, že $\max_{0 \leq t \leq 1} g(t) = g(t_0)$; například pro funkci $g(t) = t - t^2$ je to číslo $t_0 = \frac{1}{2}$.



Obr. 14



Obr. 15

Také zde dostáváme metrický prostor $\{P, \pi\}$:

A Rovnost $x = y$ znamená, že $x(t) = y(t)$ pro každé t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Ze vzorce (44) je tedy zřejmé, že $\pi(x, y) \geqq 0$ a že $\pi(x, y) = 0$ pro $x = y$. Je-li naopak $\pi(x,y) = 0$, plyne z nerovnosti $|x(s) - y(s)| \leqq \leqq \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)|$, že $x(s) = y(s)$ pro každé s z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, a tedy je $x = y$.

B Symetrie metriky π je zřejmá

C Pro každé t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $|x(t) - z(t)| = = |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \leqq \{|x(t) - y(t)| + + |y(t) - z(t)|\} \leqq \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)| + + \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |y(t) - z(t)| = \pi(x, y) + \pi(y, z)$. Je proto také

$$\pi(x, z) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - z(t)| \leqq \pi(x, y) + \pi(y, z)$$

Poznali jsme tedy několik nových metrických prostorů. Přitom si pozorný čtenář jistě všiml, že některé metrické prostory, se kterými jsme se seznámili dříve, byly speciálními případy metrických prostorů zde uvedených.

Zvolíme-li v příkladech 11, 12 a 13 speciální podmnožinu těch posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, které mají všechny členy počínaje třetím rovné nule, tj. množinu posloupností tvaru $\{x_1, x_2, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, kde navíc čísla x_1 a x_2 jsou reálná, dostaneme z metrického prostoru $\{M, \varrho\}$ (příklad 11) metrický prostor, který lze ztotožnit s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, d\}$ (při volbě $p = 2$) resp. s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, p\}$ (při volbě $p = 1$) resp. s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, d_p\}$ (pro obecné $p > 1$). Z metrického prostoru $\{N, \sigma\}$ (příklad 12) dostaneme touto cestou metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, m\}$ (dokažte!) a z metrického prostoru $\{Q, \tau\}$ (příklad 13) dostaneme metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, b\}$ $\left(\text{se speciální volbou } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{4}\right)$. Je to důsledek tohoto obecného tvrzení:

Věta 1. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a N podmnožina množiny M: $N \subset M$. Uvažujme metriku $\varrho(x, y)$ jen pro prvky x a y z množiny N. Pak je také $\{N, \varrho\}$ metrický prostor.*

Důkaz je jednoduchý: Metriku $\varrho(x, y)$, definovanou původně pro x, y z M, uvažujeme tentokrát jen pro x a y z „menší" množiny N. I pak budou splněny podmínky **A** až **C**, ovšem všude pro x, y a z z N; to má smysl, neboť pak x, y a z patří také do M a tam vlastnosti **A** až **C** splněny jsou.

Příklad 15. Pro množiny M, N, Q z příkladů 11, 12, 13 platí

$$M \subset N \subset Q$$

Vzhledem k větě 1 lze tedy utvořit metrické prostory

$$\{N, \tau\} \text{ a } \{M, \tau\} \text{ (pomocí metrického prostoru } \{Q, \tau\})$$

a metrický prostor

$$\{M, \sigma\} \text{ (pomocí metrického prostoru } \{N, \sigma\})$$

Podobně jako v případě roviny E_2 dostáváme tak různé metrické prostory

$$\{M, \varrho\}, \quad \{M, \sigma\} \quad \text{a} \quad \{M, \tau\}$$

resp.

$$\{N, \sigma\} \quad \text{a} \quad \{N, \tau\}$$

jejichž základem je vždy táž množina M resp. N.

Viděli jsme, že metriku lze zúžit z množiny M na „menší" množinu $N \subset M$. Obrácený postup ovšem nemusí vést k cíli — *rozšiřování* metriky z množiny M na širší množinu nemusí mít vždy smysl.

Příklad 16. V příkladu 12 jsme ukázali, že metrika ϱ z příkladu 11 nemusí mít smysl pro prvky z množiny N, která je „širší" než původní množina M z příkladu 11: Prvky $x = \{0, 0, 0, \ldots\}$ a $y = \{1, 1, 1, \ldots\}$ patří do N, ale číslo $\varrho(x, y)$ nemá smysl, neboť příslušná řada v (40) nekonverguje.

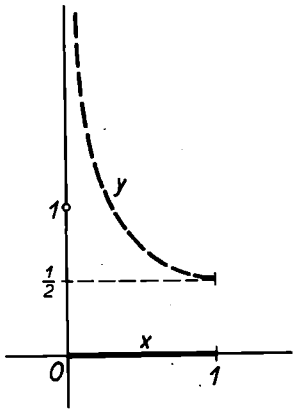
Příklad 17. Kdybychom místo množiny P z příkladu 14 uvažovali množinu F všech funkcí, definovaných na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, nelze utvořit metrický prostor $\{F, \pi\}$

s metrikou π podle (44). Stačí totiž zvolit dvě funkce z množiny F:

$$x = x(t) = 0 \text{ pro všechna } t \text{ z intervalu } \langle 0,1 \rangle$$

$$y = y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2t} & \text{pro} \quad t > 0 \\ 1 & \text{pro} \quad t = 0 \end{cases}$$

(viz obr. 16); zde rozdíl $|x(t) - y(t)|$ roste do nekonečna,



Obr. 16

když se t blíží k nule, takže výraz $|x(t) - y(t)|$ nemá pro t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ žádné maximum.

Poznali jsme tedy řadu množin, na nichž jsme zavedli různým způsobem metriku. Vzniká nyní přirozená otázka, zda pro libovolnou množinu M lze definovat metriku ϱ, která by měla vlastnosti **A** až **C**. Odpověď je kladná:

Věta 2. *Budiž M množina. Pak existuje metrika ϱ tak, že $\{M, \varrho\}$ je metrický prostor.*

Důkaz provedeme tím, že vhodnou metriku prostě sestrojíme. Definujme ϱ takto:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y; \quad x, y \text{ z } M \\ 1 & \text{pro } x \neq y; \quad x, y \text{ z } M \end{cases} \tag{45}$$

Takto definovaný výraz ϱ má skutečně vlastnosti **A** až **C**:

A plyne přímo z definice čísla ϱ: $\varrho(x, y) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $x = y$

B symetrie je též zřejmá přímo z definice čísla $\varrho(x, y)$

C je-li $x = z$, je $\varrho(x, z) = 0$, a je tedy vždy $0 \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

je-li $x \neq z$, je $\varrho(x, z) = 1$; jsou nyní tyto možnosti:

(a) $y \neq x$ a současně $y \neq z$; pak je $\varrho(x, y) = \varrho(y, z) = 1$ a trojúhelníková nerovnost platí, neboť má tvar $1 \leqq 1 + 1 = 2$

(b) je buď $y \neq x$ a $y = z$, nebo $y = x$ a $y \neq z$; pak je jedno z čísel $\varrho(x, y)$, $\varrho(y, z)$ rovno nule a druhé je rovno jedné a trojúhelníková nerovnost opět platí, neboť má tvar $1 \leqq 0 + 1 = 1$ resp. $1 \leqq 1 + 0 = 1$

Větu 2 bychom mohli vyslovit též takto: *Každou množinu lze metrizovat* (tj. lze na ní definovat metriku). My si však termín *metrizovatelnost* vyhradíme pro poněkud jiný pojem (viz str. 112).

Metrika (45) z věty 1 je ovšem velmi „chudá" — pro vzdálenost dvou prvků máme jen dvě možnosti: 0 a 1. Metriku (45) lze pochopitelně zavést i v rovině E_2 a srovnání s eukleidovskou metrikou d ukazuje, oč se ochuzujeme. Metrika ϱ z (45) je také nejjednodušší možnou metrikou a má především teoretický význam — v dalším uvidíme, že při jejím použití nedávají pojmy, které zavedeme, nic zajímavého; prostor opatřený touto metrikou je velmi „fádní". Věta 2 ovšem opravňuje existenci této metriky a dává jí smysl.

V každé množině existuje tedy alespoň jedna metrika — triviální metrika ϱ z (45). Zbývá ještě odpovědět na tuto otázku:

Kolik metrik existuje na dané množině M?

Odpověď zní: *Obsahuje-li množina M alespoň dva různé prvky, je metrik nekonečně mnoho.* Plyne to z tohoto tvrzení:

Věta 3. *Je-li ϱ metrika na množině M, je též výrazem*

$$\varrho_1(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \tag{46}$$

definována metrika.

Důkaz přenecháváme čtenáři. To, že ϱ_1 má vlastnosti **A** a **B**, je zřejmé ihned ze vzorce (46); trojúhelníková nerovnost **C** se dokáže pomocí nerovnosti (29).

Protože pro $\alpha > 0$ je $\alpha \neq \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$, je metrika $\varrho_1(x, y)$ různá od metriky $\varrho(x, y)$, existují-li v množině M dva různé body. Pro $x \neq y$ je totiž podle **A** $\varrho(x, y) > 0$ a tedy $0 < \varrho_1(x, y) \neq \varrho(x, y)$. Dokonce platí

$$\varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

přičemž rovnost platí jen tehdy, je-li $\varrho(x, y) = 0$ [dokažte to na základě vzorce (46)!]. Nyní lze utvořit další metriku ϱ_2 na M předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \frac{\varrho_1(x, y)}{1 + \varrho_1(x, y)}$$

která je opět různá od metriky ϱ_1, a tak můžeme pokračovat v utváření různých metrik podle rekurentního vzorce

$$\varrho_{n+1}(x, y) = \frac{\varrho_n(x, y)}{1 + \varrho_n(x, y)}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dostáváme tak nekonečnou posloupnost různých metrik na téže množině M, pro něž platí

$$\varrho_{n+1}(x, y) \leqq \varrho_n(x, y) \leqq \ldots \leqq \varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

a tedy i posloupnost různých metrických prostorů

$$\{M, \varrho\}, \{M, \varrho_1\}, \{M, \varrho_2\}, \ldots, \{M, \varrho_n\}, \ldots$$

Úloha 3. Vyšetřete, zda pro $x = [x_1]$ a $y = [y_1]$ z E_1 je výrazem

$$\varrho(x, y) = \left| \frac{x_1}{1 + \sqrt{(1 + x_1^2)}} - \frac{y_1}{1 + \sqrt{(1 + y_1^2)}} \right|$$

definována metrika na E_1.

Úloha 4. Nechť je ϱ metrika na množině M. Rozhodněte, zda výrazy σ, τ a ω, definované vzorci

$$\sigma(x, y) = [\varrho(x, y)]^2$$
$$\tau(x, y) = \min \{\varrho(x, y), 1\}$$
$$\omega(x, y) = \sqrt{\varrho(x, y)}$$

jsou také metrikami na M, tj. zda vyhovují podmínkám **A**, **B** a **C**. Podobně rozhodněte, zda jsou metrikami na M výrazy

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y)$$
$$\varkappa(x, y) = \sqrt{[\varrho_1(x, y)]^2 + [\varrho_2(x, y)]^2}$$
$$\lambda(x, y) = \max [\varrho_1(x, y), \varrho_2(x, y)]$$

víte-li, že ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky na množině M.

Vraťme se k eukleidovské rovině E_2. Viděli jsme už v kapitole 1, že třeba mezi eukleidovskou metrikou d a metrikou b z vzorce (28) byl podstatný rozdíl spočívající v tom, že číslo $b(x, y)$ nepřevýšilo při *žádné* volbě prvků x a y jisté předem dané kladné číslo, zatím co číslo $d(x, y)$ mohlo být při vhodné volbě prvků x a y libovolně velké. To nás vede k zavedení nového pojmu:

Definice 4. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Existuje-li kladné číslo K tak, že

$$\varrho(x, y) \leqq K \quad \text{pro všechna } x, y \text{ z } M \tag{47}$$

řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je omezený. Neexistuje-li takové číslo K [tj. může-li $\varrho(x, y)$ nabývat libovolně velkých hodnot], řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je neomezený.

Příklad 18. Metrické prostory $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$, $\{\mathsf{E}_2, m\}$,

$\{\mathsf{E}_2, d_p\}$ jsou neomezené, metrické prostory $\{\mathsf{E}_2, s\}$ a $\{\mathsf{E}_2, b\}$ jsou omezené (určete odpovídající číslo K!). Metrický prostor $\{Q, \tau\}$ z příkladu 13 je omezený.

Příklad 19. Metrický prostor $\{P, \pi\}$ z příkladu 14 je neomezený: Je-li totiž K libovolné kladné číslo, stačí v P zvolit prvky $x = x(t) = 0$ a $y = y(t) = 2Kt$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ a bude

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |2Kt| = 2K > K$$

Úloha 5. Dokažte (nalezením vhodných prvků x, y), že metrické prostory $\{M, \varrho\}$ z příkladu 11 a $\{N, \sigma\}$ z příkladu 12 jsou neomezené.

Nechť se množina M skládá jen z konečného počtu prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak je konečná také množina vzdáleností jednotlivých prvků množiny M mezi sebou: je tvořena čísly

$$\varrho(x_i, x_k), \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Mezi konečným počtem těchto konečných čísel najdeme největší, a to pak zvolíme za konstantu K z (47). Tím jsme dokázali, že *má-li množina M jen konečný počet prvků, je metrický prostor $\{M, \varrho\}$ omezený.*

Příklad 20. Metrický prostor $\{N, \varrho\}$ z příkladu 10 je tedy omezený.

Všimněte si, že v předcházející úvaze nezáleželo vůbec na tom, jaká byla uvažovaná metrika ϱ. Příklad 18 ovšem ukazuje, že u množiny M, která má *nekonečně mnoho* prvků, hraje už charakter metriky podstatnější roli. Pro každou množinu M lze sestrojit takovou metriku, aby vzniklý metrický prostor byl omezený. Ukazují to tyto dva příklady:

Příklad 21. Metrický prostor $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je triviální metrika daná vzorcem (45), je omezený; stačí zvolit $K = 1$.

Příklad 22. Budiž $\{M, \varrho\}$ neomezený metrický prostor a budiž ϱ_1 metrika na M, určená vzorcem (46). Pak je $\{M, \varrho_1\}$ omezený metrický prostor. Plyne to z věty 3 a opět lze zvolit $K = 1$.

Metrika je zobecněním vzdálenosti dvou bodů. V životě však dovedeme měřit také vzdálenost bodu od množiny a vzdálenost dvou množin, a metrika nám umožní zavést tyto pojmy i v obecném metrickém prostoru.

Definice 5. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a budiž S podmnožina množiny M. *Vzdáleností prvku x z M od množiny S* (v $\{M, \varrho\}$) nazýváme číslo $\varrho(x, S)$, určené takto:

$$\varrho(x, S) = \inf_{y \in S} \varrho(x, y) \text{ *)}$$

Buďte S a T dvě podmnožiny množiny M. *Vzdáleností množin S a T* (v $\{M, \varrho\}$) nazýváme číslo $\varrho(T, S)$ určené takto:

$$\varrho(T, S) = \inf_{x \in T} \varrho(x, S) \text{ **)}$$

---

*) Poslední výraz je třeba chápat jako infimum množiny K, tvořené všemi možnými čísly tvaru $\varrho(x, y)$, kdy y leží v S (viz též odbočení páté, str. 39).

**) Poslední symbol je třeba chápat jako infimum množiny K^*, tvořené všemi možnými čísly tvaru $\varrho(x, S)$ pro x z T.

Poznámka 10. Vzdálenost $\varrho(T, S)$ množin T a S bychom mohli definovat též takto:

$$\varrho(T, S) = \inf_{x \in T, y \in S} \varrho(x, y)$$

tj. jako infimum množiny K^{**}, tvořené všemi čísly tvaru $\varrho(x, y)$, kde x probíhá množinu T a y množinu S. — Lze také definovat *vzdálenost množiny S od prvku x z M* (v $\{M, \varrho\}$) vzorcem

$$\varrho(S, x) = \inf_{y \in S} \varrho(y, x)$$

Vzhledem k vlastnosti **B** metriky ϱ je zřejmě

$$\varrho(S, x) = \varrho(x, S)$$

Úloha 6. Ukažte, že $\varrho(x, S) \geqq 0$, $\varrho(T, S) \geqq 0$ a že $\varrho(T, S) = \varrho(S, T)$. Jsou-li S, T a P tři podmnožiny množiny M, platí „trojúhelníková nerovnost"

$$\varrho(S, T) \leqq \varrho(S, x) + \varrho(x, T)$$

pro každý bod x z množiny P (a dokonce pro každý bod x z M); *neplatí* však „trojúhelníková nerovnost" tvaru

$$\varrho(S, T) \leqq \varrho(S, P) + \varrho(P, T)$$

(Návod: Stačí zvolit množiny S a T tak, aby měly kladnou vzdálenost, a za množinu P zvolit množinu, která má společné body jak s množinou S, tak s množinou T. Dále pak užijeme následujícího příkladu 25.)

Příklad 23. Patří-li prvek x do množiny S, je $\varrho(x, S) = 0$. Stačí totiž zvolit za y prvek x — pak je $\varrho(x, y) = \varrho(x, x) = 0$, a pro ostatní prvky y z M, které jsou různé od prvku x, je podle vlastnosti **A** $\varrho(x, y) > 0$.

Příklad 24. Uvažujme metrický prostor $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je metrika daná vzorcem (45). Tam je pro $x \neq y$ $\varrho(x, y) = 1$. Je-li nyní S podmnožina množiny M a je-li x prvek množiny M, který *neleží* v S, je $\varrho(x, y) = 1$ pro *všechny* prvky y z S, a je tedy také $\varrho(x, S) = 1$. Leží-li prvek x v množině S, je podle předcházejícího příkladu $\varrho(x, S) = 0$.

Příklad 25. Nechť jsou S a T dvě podmnožiny množiny M, které mají *společný bod* x_0. Pak je jejich vzdálenost nulová: $\varrho(S, T) = 0$. Protože x_0 leží v S, je totiž podle příkladu 23 $\varrho(x_0, S) = 0$; pro ostatní body x z T je $\varrho(x, S) \geqq 0$, a tedy je $\inf\limits_{x \in T} \varrho(x, S) = 0$.

Poznámka 11. Tvrzení z příkladů 23 a 25 lze zapsat takto:

(a) x leží v $S \Rightarrow \varrho(x, S) = 0$

(b) S a T mají společný bod $\Rightarrow \varrho(S, T) = 0$

Tyto implikace *nelze* obrátit — ukážeme to na příkladech v následující kapitole: k implikaci (a) viz příklad 29, k implikaci (b) viz příklad 34.