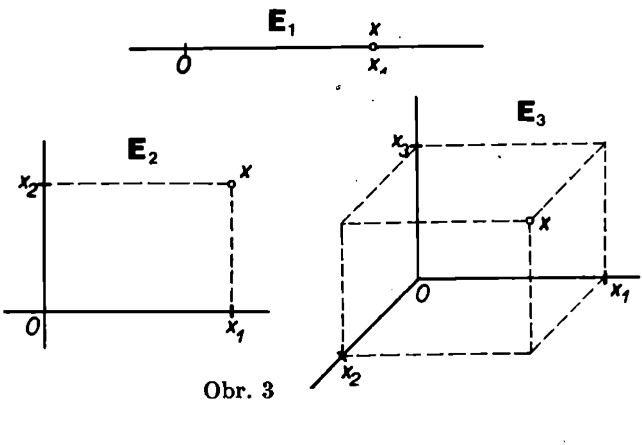
1. kapitola

VZDÁLENOST V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU

Nejprve budeme pracovat s objekty, které jsou vám dobře známy ze školy nebo (i z jiných hledisek) např. z předcházejících svazků Školy mladých matematiků: s **přímkou** (jednorozměrným eukleidovským prostorem E_1), s **rovinou** (dvourozměrným eukleidovským prostorem E_2) a s trojrozměrným eukleidovským **prostorem** E_3 (viz např. Budinský-Šmakal: Vektory v geometrii. ŠMM sv. 28, Praha 1971).

Body na přímce budeme značit $x = [x_1]$, body v rovině $x = [x_1, x_2]$, body v prostoru $x = [x_1, x_2, x_3]$; zde jsou x_1, x_2, x_3 reálná čísla.



Obr. 3

V těchto prostorech známe vzdálenost:

Na přímce E_1 je vzdálenost bodu $x = [x_1]$ od bodu $y = [y_1]$ — označíme ji symbolem $d(x, y)$ — definována takto:

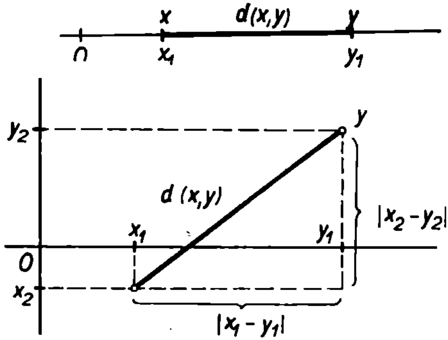
$$(1) \qquad d(x, y) = | x_1 - y_1 |$$

V rovině E_2 je vzdálenost $d(x, y)$ bodu $x = [x_1, x_2]$ od bodu $y = [y_1, y_2]$ definována takto:

$$(2) \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

V prostoru E_3 je vzdálenost $d(x, y)$ bodu $x = [x_1, x_2, x_3]$ od bodu $y = [y_1, y_2, y_3]$ definována takto:

$$(3) \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$



Obr. 4

Poznámka 1. Ve všech třech případech jsme použili stejného označení $d(x, y)$. Je to celkem přirozené, neboť vzorec (1) můžeme zapsat též takto:

$$(1^*) \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2}$$

a vzorce (1) i (2) jsou pak speciálními případy vzorce (3), neboť body z E_2 jsou speciálními případy bodů z E_3 — jsou to body tvaru $[x_1, x_2, 0]$ — a body z E_1 jsou také speciálními případy bodů z E_3 — jsou to body tvaru $[x_1, 0, 0]$.

Vzdálenost $d(x, y)$ budeme nazývat **eukleidovskou vzdáleností**; všimněme si nyní podrobněji jejích vlastností.

A Především je $d(x, y)$ vždy nezáporné číslo:

(4) $$d(x, y) \geqq 0$$

přitom je vzdálenost bodu x od bodu y rovna nule právě tehdy, jsou-li oba body totožné:

(5) $$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Připomeňme, že **totožnost** bodů $x = [x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_1, y_2, y_3]$ (kterou zapíšeme symbolem $x = y$) znamená, že $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Dokážeme platnost vztahů (4) a (5): Nerovnost (4) je zřejmým důsledkem definice čísla $d(x, y)$. — Je-li $x = y$, je opět podle definice číslo $d(x, y)$ rovno nule. — Je-li naopak $d(x, y) = 0$, je také $[d(x, y)]^2 = 0$, čili

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 0$$

To je součet tří *nezáporných* čísel, a ten je nulový jen tehdy, jsou-li rovny nule všechny sčítance: $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, $x_3 - y_3 = 0$. To však znamená, že $x_i = y_i$ pro $i = 1, 2, 3$ čili že $x = y$.

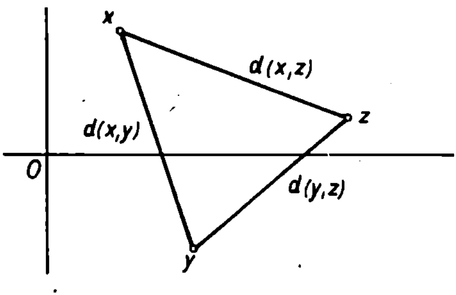
B Dále je vzdálenost bodu x od bodu y stejná, jako vzdálenost bodu y od bodu x:

(6) $$d(x, y) = d(y, x)$$

Důkaz opět plyne z definice čísla $d(x, y)$: Protože $(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2$ pro $i = 1, 2, 3$, máme rovnost (6) ihned z (3).

C Jsou-li x, y a z tři body, lze z nich utvořit trojúhelník.*) V tomto trojúhelníku pak není délka jedné strany větší než součet délek obou zbývajících stran. Jinými slovy: Vzdálenost bodu x od bodu z není větší než součet vzdálenosti bodu x od bodu y a vzdálenosti bodu y od bodu z. Lze to zapsat ve tvaru tzv. *trojúhelníkové nerovnosti*

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) \tag{7}$$



Obr. 5

Platnost této nerovnosti je sice takřka „zřejmá" (viz obr. 5), nebudeme však spoléhat na názor, abychom nedopadli jako onen turista v úvodu, a dokážeme platnost nerovnosti (7) korektním způsobem.

*) Tento trojúhelník může být též úsečkou, leží-li všechny tři body na přímce. V E_1 tomu bude vždy tak.

Odbočení první. Buďte a, b libovolná reálná čísla. Pak je také číslo $(a - b)$ reálné, a číslo $(a - b)^2$ je tedy nezáporné:

$$0 \leqq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

neboli $2ab \leqq a^2 + b^2$ čili

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Tato nerovnost platí pro každou dvojici reálných čísel a, b. Zvolíme-li speciálně $a = \sqrt{\alpha}$, $b = \sqrt{\beta}$, kde α a β jsou nezáporná čísla, dostáváme důležitou nerovnost

$$\sqrt{\alpha\beta} \leqq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \tag{8}$$

Buďte nyní α_i a β_i $(i = 1, 2, 3)$ nezáporná čísla a nechť jsou čísla $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ a $B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ kladná. Zvolíme-li v (8) $\alpha = \alpha_i^2/A$ a $\beta = \beta_i^2/B$ $(i = 1, 2, 3)$, dostaneme tři nerovnosti

$$\frac{\alpha_1\beta_1}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{A} + \frac{\beta_1^2}{B}\right)$$

$$\frac{\alpha_2\beta_2}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2^2}{A} + \frac{\beta_2^2}{B}\right)$$

$$\frac{\alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_3^2}{B}\right)$$

a jejich sečtením pak nerovnost

$$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{B}\right) = 1$$

(poslední rovnost plyne z definice čísel A a B). Po vynásobení nezáporným číslem $\sqrt{AB}$ pak dostáváme důležitou Hölderovu nerovnost

$$(9) \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \leqq \\ \leqq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tato nerovnost platí pro všechna reálná čísla α_i, β_i. My jsme sice při jejím odvození požadovali, aby bylo $A > 0$ a $B > 0$, z (9) je však vidět, že je-li $A = 0$ nebo $B = 0$, platí (9) také a má tvar $0 \leqq 0$ (dokažte to!).

Z nerovnosti (9) plyne další důležitý vztah — tzv. Minkowského nerovnost

$$(10) \qquad \sqrt{(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2} \leqq \\ \leqq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}\,,$$

která platí pro všechna reálná čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Dokážeme platnost nerovnosti (10): Označíme-li $C = (\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2$, můžeme psát

$$C = \{\gamma_1(\gamma_1 + \delta_1) + \gamma_2(\gamma_2 + \delta_2) + \gamma_3(\gamma_3 + \delta_3)\} + \\ + \{\delta_1(\gamma_1 + \delta_1) + \delta_2(\gamma_2 + \delta_2) + \delta_3(\gamma_3 + \delta_3)\}$$

Použijeme-li na oba výrazy v lomených závorkách Hölderovy nerovnosti (9) [pro první závorku volíme $\alpha_i = \gamma_i, \beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$, pro druhou pak $\alpha_i = \delta_i, \beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$, $i = 1, 2, 3$], dostáváme

$$C \leqq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}[(\gamma_1+\delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}}[(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{C}\left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Je-li $C = 0$, nerovnost (10) zřejmě platí. Je-li $C \neq 0$ (a tedy $C > 0$), stačí předchozí nerovnost vydělit číslem $\sqrt{C} > 0$ a máme ihned nerovnost (10).

Konec prvního odbočení

Nyní už můžeme dokázat trojúhelníkovou nerovnost (7): Tato nerovnost plyne ihned z (10), kde volíme $\gamma_i = x_i - y_i$ a $\delta_i = y_i - z_i$ $(i = 1, 2, 3)$, neboť pak je $\gamma_i + \delta_i = x_i - z_i$ a tedy

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} +$$
$$+ \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2}$$

což je (7).

Shrňme tři vlastnosti eukleidovské vzdálenosti d, které jsme zatím dokázali:

A $d(x, y) \geqq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé dva body x, y

C $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ pro každé tři body x, y, z

Vzdálenost d má ovšem řadu dalších vlastností. Definujme pro $x = [x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_1, y_2, y_3]$ a pro reálné číslo α součet $x + y$ a α-násobek αx takto:

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$$
$$\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$$

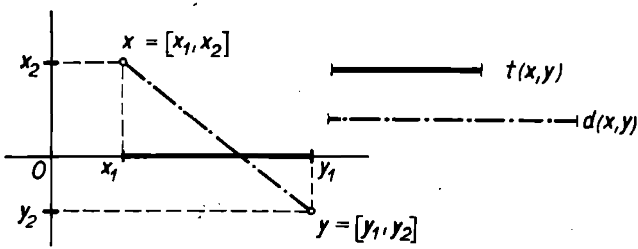
Dokažte, že pak platí:

D $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ pro každé tři body x, y, z

E $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$ pro každé dva body x, y a pro každé reálné číslo α

My se však v dalším omezíme na vlastnosti **A**, **B** a **C**. Pokusíme se totiž o zobecnění pojmu vzdálenosti na jiné množiny — méně názorné než je množina bodů eukleidovského prostoru, a budeme se přitom snažit zavádět co nejméně nových pojmů, klást co nejméně podmínek na strukturu vyšetřovaných množin. Kdybychom vzali v úvahu i vlastnosti **D** a **E**, museli bychom zavést *součet* dvou prvků množiny a *α-násobek*, a to už je dosti podstatné omezení.

Příklad 1. Vraťme se k turistovi a k jeho slepé důvěře v mapu. Lze to zjednodušeně srovnat se situací, která nastane, když „vzdáleností" dvou bodů v E_3 budeme rozumět eukleidovskou vzdálenost jejich průmětů do roviny E_2 (do mapy). — Uberme další rozměr a definujme novou vzdálenost $t(x, y)$ bodu x v E_2 od bodu y v E_2 jako eukleidovskou vzdálenost průmětů těchto dvou bodů do osy x_1. Bude tedy (viz obr. 6)



Obr. 6

$$t(x, y) = |x_1 - y_1| \tag{11}$$

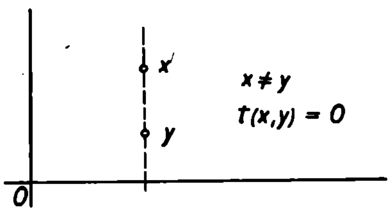
Má tato nová vzdálenost v rovině opět vlastnosti **A** až **C**? Vlastnosti **B** a **C** zřejmě splněny jsou: Je-li $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ a $z = [z_1, z_2]$, je

$$t(x, y) = |x_1 - y_1| = |-(y_1 - x_1)| = |y_1 - x_1| = t(y, x)$$

a

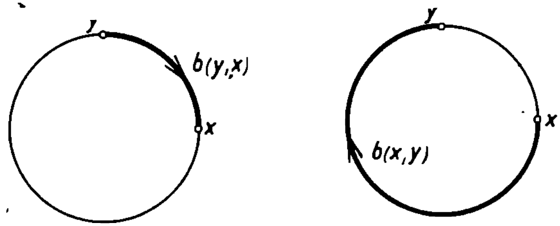
$$t(x, z) = |x_1 - z_1| = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| \leqq$$
$$\leqq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| = t(x, y) + t(y, z)$$

Zřejmě je také $t(x, y) \geqq 0$ a $t(x, y) = 0$ pro $x = y$. Není však splněna implikace $\Rightarrow$ z podmínky **A**, neboť body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [x_1, y_2]$ jsou pro $x_2 \neq y_2$ různé, zatím co $t(x, y) = |x_1 - x_1| = 0$ (viz obr. 7).



Obr. 7

Příklad 2. Představme si bytost, jejímž světem je kružnice v rovině a která se navíc může po této kružnici pohybovat jen ve směru pohybu hodinových ručiček. I tato bytost může svůj pohyb po kružnici měřit — označme proto $b(x, y)$ vzdálenost, kterou naše bytost urazí, když se pohybuje z bodu x do bodu y.



Obr. 8

Jak ukazuje obrázek 8, nemá vzdálenost b už vlastnost **B**: pro konkrétní body z obr. 8 je vzdálenost $b(y, x)$ bodu y od bodu x třikrát menší než vzdálenost $b(x, y)$ bodu x od bodu y čili je $b(x, y) \neq b(y, x)$. [Rovnost $b(x, y) = b(y, x)$ platí dokonce tehdy a jen tehdy, leží-li body x a y na stejném průměru naší kružnice.]

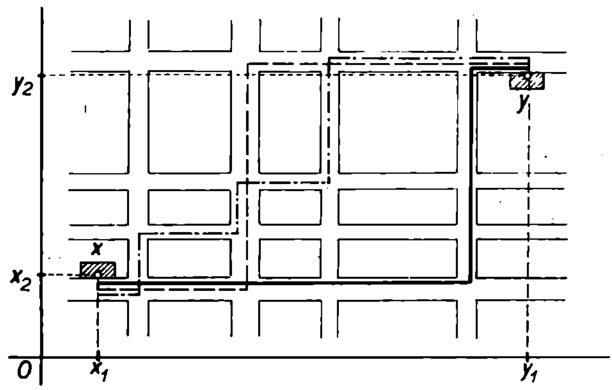
Úloha 1. Má vzdálenost b z předcházejícího příkladu vlastnosti **A** a **C**?

Vzdálenost t, kterou jsme definovali v příkladu 1, tedy nemá všechny vlastnosti **A** až **C**, ačkoliv je definována poměrně přirozeným způsobem — využili jsme analogie se zobrazováním na mapu. Ani vzdálenost b z příkladu 2 neměla všechny tyto vlastnosti. Existuje tedy vůbec nějaká přirozeným způsobem definovaná vzdálenost, která by zachovávala všechny vlastnosti **A**, **B**, **C**?

Uvedeme dva příklady, které ukazují, že takové vzdálenosti skutečně existují. Vzdálenost $t(x, y)$ byla „špatně definována“, neboť nebrala v úvahu „výškové rozdíly“ bodů x a y. Ukážeme, jak lze tento „topografický“ nedostatek odstranit — uvedeme dokonce dvě eventuality.

Poznámka 2. Vzdálenost $b(x, y)$ z příkladu 2 měla poněkud výjimečný charakter, neboť také podmínky, které má naše bytost pro svůj „život na kružnici", jsou výjimečné. Má-li však nějaká vzdálenost vlastnost **B**, nemusíme rozlišovat mezi vzdáleností z bodu x do bodu y a vzdáleností z bodu y do bodu x. Budeme proto v dalším hovořit většinou pouze o „vzdálenosti bodů x a y".

Příklad 3. Představme si město ležící v rovině, jehož ulice tvoří pravoúhlou síť, a vžijme se do úlohy listonoše, který má doručit telegram z místa x do místa y. Listonoš si volí pochopitelně nejkratší cestu, má však celou řadu možností: tři z nich jsou naznačeny na obr. 9 a kratší cesta neexistuje (listonoš může používat jen ulice). Umístíme-li naše město do roviny E_2 a obě místa opatří-



Obr. 9

me souřadnicemi: $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$, bude délka cesty, kterou listonoš urazí, rovna součtu délek průmětů úsečky $\overline{xy}$ [tj. eukleidovské vzdálenosti $d(x, y)$] do obou souřadných os. Označme tuto „pošťáckou“ vzdálenost $p(x, y)$ — pak je tedy

$$p(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{12}$$

Ukážeme, že tato vzdálenost má všechny vlastnosti **A** až **C**:

A Z (12) ihned plyne, že $p(x, y) \geqq 0$ a že pro $x = y$ je $p(x, y) = 0$. Stačí tedy dokázat platnost implikace $\{p(x, y) = 0 \Rightarrow x = y\}$. Ale je-li $p(x, y) = 0$, musí být rovny nule oba sčítanci, které číslo $p(x, y)$ tvoří: $|x_1 - y_1| = 0$ a $|x_2 - y_2| = 0$. To znamená, že $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$ čili že $x = y$.

B
$$\begin{aligned} p(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = \\ &= |-(y_1 - x_1)| + |-(y_2 - x_2)| = \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = p(y, x) \end{aligned}$$

C
$$\begin{aligned} p(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = \\ &= |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + \\ &+ |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \leqq \\ &\leqq (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + \\ &+ (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|) = \\ &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + \\ &+ (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = \\ &= p(x, y) + p(y, z) \end{aligned}$$

Stačilo tedy k „špatně definované" vzdálenosti $t(x, y)$ přidat ještě vzdálenost průmětů bodů x a y na osu x_2 a vznikla „dobře definovaná" vzdálenost $p(x, y)$.

Poznámka 3. Omezili jsme se pro názornost na rovinu, ale stejně jako u eukleidovské vzdálenosti d lze zavést vzdálenost p i v E_1 a v E_3: v E_1 bude

$$p(x, y) = |x_1 - y_1|$$

v E_3 bude

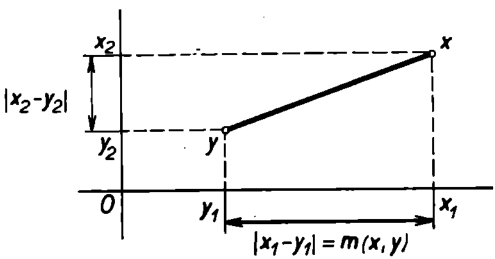
$$p(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

I pak budou splněny podmínky **A** až **C** (dokažte si to!). Na přímce E_1 jsme ovšem nedostali nic nového, tam je $p(x, y) = d(x, y)$; ale v E_2 a v E_3 už znamená vzdálenost p novou kvalitu.

Pokud jde o stejné značení vzdálenosti p v E_1, E_2 i E_3, platí to, co bylo řečeno v poznámce 1.

Příklad 4. Definujme v E_2 ještě jednu novou vzdálenost:

$$m(x, y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right) \tag{13}$$



Obr. 10

Vzdálenost dvou bodů x a y v rovině je tedy definována jako větší z délek průmětů spojnice obou bodů na jednotlivé souřadné osy. Také vzdálenost m má vlastnosti **A** až **C**:

A Z (13) ihned plyne, že $m(x, y) \geqq 0$ a že $m(x, y) = 0$ pro $x = y$. Předpokládejme tedy naopak, že $m(x, y) = 0$. To znamená, že větší z nezáporných čísel $|x_1 - y_1|$, $|x_2 - y_2|$ je rovné nule, čili musí být rovna nule obě čísla: $|x_1 - y_1| = 0$ a $|x_2 - y_2| = 0$ neboli $x = y$.

B $m(x, y) = m(y, x)$, neboť $|x_i - y_i| = |-(y_i - x_i)| = |y_i - x_i|$, $i = 1, 2$.

Odbočení druhé. Buďte a, b, c, d, A a B reálná čísla. Dokažte, že platí tyto dva vztahy:

(14) Pro $a \leqq A$ a $b \leqq B$ je $\max(a, b) \leqq \max(A, B)$

(15) $\max(a + c, b + d) \leqq \max(a, b) + \max(c, d)$

Konec druhého odbočení

C Především je $m(x, z) = \max(|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|) = \max\{|(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)|, |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)|\}$. Protože $|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leqq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, je podle (14)

$$m(x, z) \leqq \max\{(|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|), (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|)\}$$

a podle (15) je pak

$$m(x, z) \leqq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} = m(x, y) + m(y, z)$$

Poznámka 4. Opět můžeme vzdálenost m definovat v E_1:

$$m(x, y) = \max [|x_1 - y_1|] = |x_1 - y_1|$$

a v E_3:

$$m(x, y) = \max [|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|]$$

Kvalitativně odlišnou vzdálenost tedy dostáváme jen v E_2 a v E_3.

Poznali jsme zatím tři typy vzdáleností — d, p a m, které měly všechny vlastnosti **A**, **B**, **C**. Zatím co v E_1 bylo

$$d(x, y) = p(x, y) = m(x, y) \tag{16}$$

platí v E_2 nerovnosti

$$d(x, y) \leqq p(x, y) \leqq \sqrt{2}\,d(x, y) \tag{17}$$

pro každé dva body x, y z E_2. Dokažme (17). První nerovnost plyne ihned ze zřejmé nerovnosti

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \leqq (|\alpha| + |\beta|)^2:$$

položíme-li zde $\alpha = |x_1 - y_1|$ a $\beta = |x_2 - y_2|$, dostáváme první nerovnost v (17) odmocněním. — V prvním odbočení jsme použili toho, že $2|\alpha\beta| \leqq |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Je tedy

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2 \leqq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

a odtud opět plyne druhá nerovnost v (17) stejnou volbou α a β jako výše a odmocněním.

Podobný vztah platí v E_2 mezi vzdálenostmi d a m:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,d(x, y) \leqq m(x, y) \leqq d(x, y) \tag{18}$$

Dokážeme (18). Protože $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a podobně $|\beta| \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, je také $\max(|\alpha|, |\beta|) \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, a odtud plyne druhá nerovnost v (18). Dále je $\alpha^2 + \beta^2 \leqq$ $\leqq 2 \max(\alpha^2, \beta^2) = 2[\max(|\alpha|, |\beta|)]^2$ čili $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} \leqq$ $\leqq \max(|\alpha|, |\beta|)$, a odtud plyne první nerovnost v (18).

Z nerovností (17) a (18) plyne vztah mezi vzdálenostmi p a m:

$$\frac{1}{2}\, p(x, y) \leqq m(x, y) \leqq p(x, y) \tag{19}$$

(dokažte!).

Podobné vzájemné odhady těchto tří typů vzdáleností — ovšem případně s jinými konstantami — lze odvodit i v E_3.

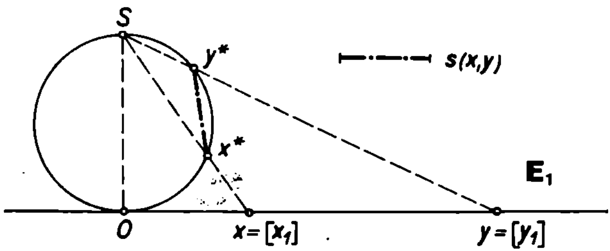
Doporučujeme čtenáři, aby si význam nerovností (17), (18) a (19) ilustroval obrázkem a aby ukázal, že konstanty, které v těchto nerovnostech vystupují, *nelze* zlepšit. Tak např. v (17) nastane *rovnost* v první nerovnosti, volíme-li $x = [0, 0]$ a $y = [a, 0]$, kde a je číslo různé od nuly, neboť pak je $d(x, y) = p(x, y) =$ $= |a|$; v druhé nerovnosti v (17) nastane *rovnost* pro $x = [0, 0]$ a $y = [a, a]$ $(a \neq 0)$, neboť pak je $p(x, y) =$ $= 2|a|$ a $d(x, y) = \sqrt{2}|a|$.

Zvolme za základní vzdálenost třeba eukleidovskou vzdálenost $d(x, y)$. Budou-li se oba body x a y od sebe neomezeně vzdalovat, poroste neomezeně i číslo $d(x, y)$. Z nerovností (17) a (18) resp. z rovností (16) plyne, že pak porostou neomezeně i čísla $p(x, y)$ a $m(x, y)$. Lze to zapsat takto:

$$d(x, y) \to \infty \Rightarrow p(x, y) \to \infty\,,\ m(x, y) \to \infty \tag{20}$$

Uvedeme nyní příklad vzdálenosti, kde to platit nemusí:

Příklad 5. Definujme vzdálenost $s(x, y)$ bodů x, y na přímce E_1 takto: Sestrojíme kružnici k o poloměru R, která se dotýká přímky E_1 v počátku O. Bod na k, ležící na stejném průměru jako počátek O, označíme S. Bod $x = [x_1]$ na E_1 spojme s bodem S; tato spojnice protne



Obr. 11

kružnici k v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*]$, pro jehož souřadnice platí

$$(21) \qquad x_1^* = \frac{4R^2x_1}{4R^2 + x_1^2}, \quad x_2^* = \frac{2Rx_1^2}{4R^2 + x_1^2}$$

(proveďte výpočty, nutné k určení souřadnic bodu x^*!). Tím tedy přiřadíme každému bodu x na E_1 jednoznačně určený bod x^* na kružnici k, tj. bod v E_2. Každému bodu na E_1 odpovídá právě jeden bod na k, a také obráceně — každému bodu na k (vyjma bod S!) odpovídá právě jeden bod na E_1. Také ze vzorců (21) je vidět, že

$$x^* \neq y^* \Leftrightarrow x \neq y$$

Nyní položíme

$$(22) \qquad s(x, y) = d(x^*, y^*)$$

tj. vzdáleností $s(x, y)$ bodů x a y na E_1 nazveme eukleidovskou vzdálenost (v E_2) jim odpovídajících bodů x^* a y^* na kružnici k.

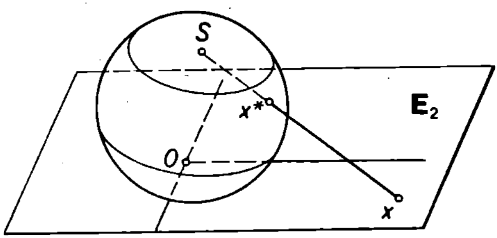
Vzdálenost s má vlastnosti **A** až **C**, neboť je má vzdálenost d a přiřazení mezi body x a x^* je vzájemně jednoznačné.

Vzdálenost s tedy patří mezi „dobře definované" vzdálenosti. Od vzdáleností d, p a m se však liší mimo jiné tím, že je

$$s(x, y) \leqq 2R \quad \text{pro všechny body } x, y \text{ na } E_1$$

neboť body x^* a y^* leží vždy na kružnici k a jejich eukleidovská vzdálenost v E_2 tedy nemůže být větší než je průměr kružnice k. Vzdálenost s tedy nemá vlastnost (20).

Poznámka 5. Taková vzdálenost by se nám jistě hodila v praktickém životě: zvolili bychom si $R = 1$ km a žádná vzdálenost by nebyla větší než 2 km. To by se to chodilo!



Obr. 12

Poznámka 6. Analogicky můžeme postupovat i v rovině: Sestrojíme kouli, která se roviny dotýká, a bodu x z roviny E_2 přiřadíme bod x^* na kouli — průsečík spojnice bodů S a x (viz obr. 12; tomuto přiřazení se říká stereografická projekce). Pak položíme pro body x, y z E_2

$$s(x, y) = d(x^*, y^*) \tag{23}$$

kde d je eukleidovská vzdálenost v E_3.

Úloha 2. Označíme-li body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [y_1, y_2]$ v rovině E_2 pomocí komplexních čísel, tj. položíme-li $\xi = x_1 + ix_2$, $\eta = y_1 + iy_2$, bude

$$d(x, y) = |\xi - \eta|$$

kde vpravo je obvyklý výraz pro absolutní hodnotu komplexního čísla. Dokažte, že vzdálenost s z (23) lze vyjádřit pomocí absolutních hodnot komplexních čísel takto:

$$s(x, y) = \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{(1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2)}}$$

Známe tedy už čtyři typy „dobře definovaných" vzdáleností v rovině E_2 — vzdálenosti d, p, m a s. Uveďme ještě dva typy vzdáleností v rovině. První typ zobecňuje vzdálenosti d a p.

Příklad 6. Budiž $p \geqq 1$, $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$, a definujme vzdálenost $d_p(x, y)$ takto:

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p} \tag{24}$$

Je ihned vidět, že vzdálenosti d a p jsou speciálními případy této vzdálenosti: eukleidovskou vzdálenost dostaneme pro $p = 2$ a „pošťáckou" vzdálenost pro $p = 1$

$$d = d_2\,, \quad p = d_1$$

Lze tedy očekávat, že také vzdálenost d_p bude splňovat podmínky **A**, **B** a **C**. Platnost podmínek **A** a **B** si čtenář jistě dokáže snadno sám. Podmínka **C** plyne z Minkowského nerovnosti

$$(25)\qquad \left[\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i+\delta_i|^p\right]^{1/p} \leqq \left[\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|^p\right]^{1/p}$$

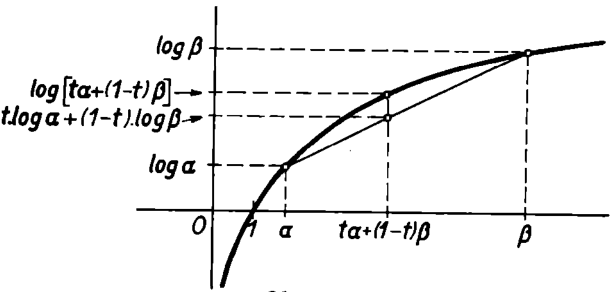
jejímž speciálním případem je nerovnost (10) a která plyne pro $p > 1$ z Hölderovy nerovnosti

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\beta_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^q\right)^{1/q},\quad q=\frac{p}{p-1},\ p>1$$

V obou nerovnostech je n přirozené číslo, α_i, β_i, γ_i, δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) jsou libovolná komplexní čísla. Trojúhelníkovou nerovnost

$$d_p(x, z) \leqq d_p(x, y) + d_p(y, z)$$

dostaneme z (25), zvolíme-li $n = 2$, $\gamma_i = x_i - y_i$ a $\delta_i = y_i - z_i$ ($i = 1, 2$).



Obr. 13

Odbočení třetí. Naznačíme zde důkaz nerovností (25) a (26); je třeba zdůraznit, že jde vlastně o jisté zobecnění postupu z odbočení prvního. Budeme přitom všude předpokládat, že $p > 1$, neboť pro $p = 1$ je (25) jednoduchý důsledek elementární nerovnosti $|a + b| \leqq \leqq |a| + |b|$.

Úsečka, spojující dva body na grafu funkce $y = \log x$, leží pod grafem této funkce; to znamená, že pro $0 < < \alpha \leqq \beta$ platí (viz též obr. 13)

$$(*) \qquad t \log \alpha + (1 - t) \log \beta \leqq \log [t\alpha + (1 - t)\beta]$$

[každý bod úsečky $\overline{\alpha\beta}$ na ose x lze vyjádřit ve tvaru $t\alpha + (1 - t)\beta$, kde $0 \leqq t \leqq 1$, a každý bod, který leží na úsečce spojující body $[\alpha, \log \alpha]$, $[\beta, \log \beta]$, lze vyjádřit ve tvaru $[t\alpha + (1 - t)\beta, t \log \alpha + (1 - t) \log \beta]$, $0 \leqq \leqq t \leqq 1$]. Nerovnost (*) lze zapsat takto:

$$\log (\alpha^t \beta^{1-t}) \leqq \log [t\alpha + (1 - t)\beta], \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

Odtud ihned plyne, že $\alpha^t \beta^{1-t} \leqq t\alpha + (1 - t)\beta$. Zvolíme-li $t = \frac{1}{p}$, bude $1 - t = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$ a máme tedy nerovnost

$$(27) \qquad \alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p} \alpha + \frac{1}{q} \beta,$$

která platí pro každé $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ a pro $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Označíme-li nyní $A = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p$, $B = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q$, předpokládáme-li $A > 0$, $B > 0$ a použijeme-li nerovnosti (27) postupně nejprve pro $\alpha = |\alpha_1|^p/A$, $\beta = = |\beta_1|^q/B$, pak pro $\alpha = |\alpha_2|^p/A$, $\beta = |\beta_2|^q/B$ atd. až pro $\alpha = |\alpha_n|^p/A$, $\beta = |\beta_n|^q/B$, dostaneme n nerovností, jejichž sečtením vznikne nerovnost

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i|}{A^{1/p} B^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a to už je vlastně nerovnost (26). Je-li $A = 0$ nebo $B = 0$, je též $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| = 0$ a nerovnost (26) opět platí (podrobně je celý postup pro trochu jednodušší případ proveden v prvním odbočení).

Odvození nerovnosti (27) z (26) je opět podobné postupu z prvního odbočení: Stačí psát

$$C = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i + \delta_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i + \delta_i| \,.\, |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \,.\, |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} + \sum_{1=1}^{n} |\delta_i| \,.\, |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$$

a na obě poslední sumy použít nerovnosti (26) — jednou pro $\alpha_i = |\gamma_i|$, $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$, podruhé pro $\alpha_i = |\delta_i|$, $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$.

Proveďte podrobně celý zde naznačený postup včetně diskuse případů $C = 0$, $C > 0$!

Konec třetího odbočení

Příklad 7. Definujme v E_2 vzdálenost $b(x, y)$ bodů $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ předpisem

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|}, \tag{28}$$

kde c_1 a c_2 jsou dvě kladné konstanty. Také tato vzdálenost vyhovuje podmínkám **A** až **C**. Platnost podmínek **A** a **B** si čtenář opět snadno dokáže sám; trojúhelníková nerovnost **C** plyne z nerovnosti

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leqq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \tag{29}$$

která platí pro každou dvojici reálných čísel α, β. Zvolíme-li zde totiž $\alpha = x_i - y_i$, $\beta = y_i - z_i$ $(i = 1, 2)$, bude $\alpha + \beta = x_i - z_i$, takže máme

$$\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leqq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem c_i, dostaneme dvě nerovnosti (pro $i = 1$ a pro $i = 2$) a po jejich sečtení bude

$$b(x, z) \leqq b(x, y) + b(y, z)\,.$$

Vzdálenost b má se vzdáleností s společné to, že neroste do nekonečna, když $d(x, y)$ neomezeně roste: je totiž

$$b(x, y) < c_1 + c_2$$

pro všechny body x, y z E_2, neboť $\dfrac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < 1$.

Poznámka 7. Analogickou vzdálenost lze opět definovat na přímce E_1:

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|}$$

a v E_3:

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1+|x_1-y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1+|x_2-y_2|} + c_3 \frac{|x_3 - y_3|}{1+|x_3-y_3|}$$

Odbočení čtvrté. Dokažme zde nerovnost (29): (I) Je-li alespoň jedno z čísel α, β rovno nule, platí v (29) rovnost. (II) Jsou-li obě čísla α, β nenulová a mají-li stejné znaménko, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Pak je $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$ a

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} =$$

$$= \frac{\alpha}{1 + \alpha + \beta} + \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta} < \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} =$$

$$= \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|},$$

neboť $1 + \alpha + \beta > 1 + \alpha$ čili $\dfrac{1}{1 + \alpha + \beta} < \dfrac{1}{1 + \alpha}$

a podobně je $1 + \alpha + \beta > 1 + \beta$ čili $\dfrac{1}{1 + \alpha + \beta} < \dfrac{1}{1 + \beta}$.

(III) Jsou-li obě čísla α, β nenulová a mají-li různá znaménka, můžeme vzhledem k symetrii vzorce (29) v α i β předpokládat, že $|\alpha| \geqq |\beta| > 0$. Pak je $0 \leqq |\alpha + \beta| < |\alpha|$ a tedy

$$|\alpha + \beta|\,(1 + |\alpha|) = |\alpha + \beta| + |\alpha + \beta| \, . \, |\alpha| < |\alpha| + |\alpha + \beta| \, . \, |\alpha| = |\alpha|\,(1 + |\alpha + \beta|)$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $\dfrac{1}{1 + |\alpha|} \cdot \dfrac{1}{1 + |\alpha + \beta|}$, dostáváme

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leqq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|}$$

a odtud už (29) plyne.

Konec čtvrtého odbočení