8. kapitola

KOMPOSIČNÍ ŘADY. DIREKTNÍ ROZKLADY. p-GRUPY A SYLOWOVY PODGRUPY. GRUPY A TOPOLOGIE

Jedním z hlavních úkolů teorie grup, jak již bylo poznamenáno, je probádat, jak jsou grupy budovány ze svých podgrup. Jsou dva hlavní způsoby, kterými sledujeme jak podgrupy skládají grupu: tzv. komposiční řada a tzv. direktní rozklad grupy.

Oč běží při komposiční řadě?

Chceme-li alespoň hrubě přirovnat tvoření (klesající) komposiční řady podgrup k něčemu názornému, napadá nás obdoba s postupným vysunováním částí z částí při rozkládání nohy trubkového skládacího fotografického stativu: Nejprve se vysune z celku v něm obsažená co nejobjemnější část, z této části opět v ní obsažená co největší část — a to se opakuje tolikrát, až naposledy vysunutá trubková část v sobě již nemá další vysunovatelnou část, a až je jisto, že žádné dvě trubky již nejsou do sebe zasunuty.

V grupě se postupně vysunovanými částmi ovšem rozumějí podgrupy. Opravdu přehledná zákonitost se však při tom objevuje jen tehdy, když předpokládáme ještě, že „vysunovaná“ podgrupa je vždy normální podgrupou (nikoli nutně v celé grupě, ale) v té podgrupě, z níž je právě vysunována.

Přistupme od podobenství k definici.

Mějme v grupě G jistý počet n podgrup $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ tak, že jsou splněny tyto podmínky:

1. G_1 je celá grupa G, G_n je podgrupa (j), která se skládá jen z jednotky j grupy G.

2. G_{i+1} je netriviální normální podgrupa v G_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$).

3. Neexistuje již žádná podgrupa G' v G, která by se dala vložit mezi některé dvě podgrupy G_i a G_{i+1} tak, aby G' byla netriviální normální podgrupou v G_i a sama aby obsahovala G_{i+1} jako netriviální normální podgrupu.

Potom říkáme, že podgrupy $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ tvoří tzv. **komposiční řadu grupy** G. Počtu n podgrup v komposiční řadě vystupujících se říká **délka** komposiční řady. Faktorovým grupám G_i/G_{i+1} říkáme někdy **faktory** komposiční řady. Je důležité si povšimnout, že podmínku 3 lze právě tak dobře nahradit podmínkou 3′:

3′. Faktory komposiční řady, tj. faktorové grupy G_i/G_{i+1} jsou jednoduché grupy. (Neboť každá normální podgrupa G' grupy G_i, obsahující grupu G_{i+1} dává vznik normální podgrupě G'/G_{i+1} faktorové grupy G_i/G_{i+1} a obráceně.)

Uveďme si alespoň dva příklady komposiční řady:

1. Symetrická grupa S_n pro $n \geqq 5$ má komposiční řadu S_n, A_n, (i) (i nechť je identická permutace, (i) grupa skládající se jen z i) délky 3, a dá se dokonce snadno ukázat, že jiných komposičních řad nemá. Alternující podgrupa A_n v S_n je tam totiž normální podgrupou, neboť se sudou permutací ϱ je i každá s touto konjugovaná permutace $\pi\varrho\pi^{-1}$ sudá — a faktorová grupa S_n/A_n je, jak víme, cyklická grupa řádu 2, tedy grupa jednoduchá; alternující grupa A_n je pak sama již, jak víme z předchozího paragrafu, jednoduchá grupa.

2. Cyklická grupa řádu 12, skládající se z mocnin

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{12} = j$$

má komposiční řadu složenu ze 4 následujících cyklických podgrup; celá grupa (a) sama (tvořena všemi mocninami prvku a), podgrupa (a^3) vytvořená 4-mi různými mocninami a^3, a^6, a^3, $a^{12} = j$ prvku a^3, podgrupa (a^6) této podgrupy, tvořená dvěma různými mocninami a^6, $a^{12} = j$ prvku a^6 a konečně jednotková podgrupa (j).

Avšak to není jediná komposiční řada. Jiná komposiční řada se skládá z podgrup (a), (a^2) (a^6), (j) — při stejném vyznačování cyklických grup. (O normálnost podgrupy v předchozí podgrupě komposiční řady se zde netřeba starat — vzhledem ke komutativitě dané grupy.)

O komposičních řadách platí nyní pozoruhodná věta Jordan-Hölderova, která dalekosáhle odhaluje strukturní uložení podgrup v grupě:

Délka dvou různých komposičních řad téže grupy je táž. Co více, ke každému faktoru jedné komposiční řady existuje s ním isomorfní faktor druhé komposiční řady, takže faktory obou komposičních řad jsou až na isomorfismus a pořadí tytéž.[27])

[Povšimneme si, že Jordan-Hölderova věta sama nás nepoučuje o tom, zda daná grupa vůbec komposiční řadu má, ona jen vypovídá o vlastnostech komposičních řad v případě, že nějaké máme. Existence komposičních řad je zřejma v případě konečných grup. V zobecnění na

[27]) Francouz C. Jordan objevil rovnost délek komposičních řad téže grupy. Němec O. Hölder později objevil tvrzení o „rovnosti“ (tj. isomorfismu) faktorů. Dalekosáhlé zobecnění na komposiční řady „nekonečné“ délky podal sovětský matematik A. Kuroš. Dalším vyšetřováním platnosti zobecněné Jordan-Hölderovy věty ve svazech se zabýval u nás V. Kořínek.

nekonečné grupy je podstatné, zda jdeme od větších podgrup k menším (klesající komposiční řada) anebo naopak, od menších podgrup k větším (stoupající komposiční řada). Pro klesající komposiční řady i „nekonečné“ (nemůžeme zde tento pojem blíže vysvětlovat, neboť bychom k tomu potřebovali pojem nekonečného ordinálního čísla, viz např. Pospíšilovo „Nekonečno v matematice“ ve sbírce „Cesta k vědění“) věta Jordan-Hölderova platí, pro stoupající nikoli. Jordan-Hölderova věta má rovněž značný význam ve zmíněné již Galoisově teorii algebraických rovnic; v souvislosti s ní byla tato věta objevena koncem minulého století.]

Od postupného rozkladu vysouváním podgrup rozkládané grupy se obraťme k jinému druhu rozkladu, který spíše připomíná rozklad přirozeného čísla v součin mocnin prvočísel: je to tzv. direktní rozklad grupy.

Ze školy je, resp. má nám být dobře známo, že každé přirozené číslo se dá psát jednoznačně (až na pořadí činitelů) jako součin mocnin různých přirozených prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_r$, tedy

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

Rozkládáme-li takto přirozené čitatele i jmenovatele kladných zlomků a připouštíme-li za mocnitele prvočísel i čísla záporná, pak napsaný rozklad v mocniny prvočísel platí i pro každé kladné číslo lomené a, tedy pro každý prvek multiplikativní grupy kladných racionálních čísel. Při tom všechny mocniny jednoho a téhož prvočísla p s kladnými i zápornými mocniteli

$$\ldots, p^{-2}, p^{-1}, p^0 = 1, p^1, p^2, \ldots$$

tvoří zřejmě normální (nekonečnou cyklickou) podgrupu v multiplikativní grupě kladných racionálních čísel.

Každé kladné racionální číslo je tedy až na pořadí činitelů jednoznačně daným součinem činitelů vzatých z jednotlivých takových normálních podgrup, dvě takové normální různé podgrupy nemají více společných prvků (racionálních čísel), než jen jednotku, a čísla (prvky), patřící do jedné takové normální podgrupy (tvořené všemi mocninami určitého prvočísla) se již takto dále rozkládat na nesoudělné činitele nedají.

Od takovéhoto pohledu na rozklad lomených čísel v součin mocnin prvočísel dojdeme snadno k příslušnému zobecnění na grupy vůbec, tj. k pojmu direktního rozkladu grupy v direktně nerozložitelné podgrupy:

Budiž G nějaká grupa. Může se stát, že existují netriviální normální podgrupy G_1, G_2, ..., grupy G tak, že každý prvek g z grupy G se dá až na pořadí činitelů *jediným způsobem* psát jako součin konečného počtu činitelů $g = g_1 . g_2 \dots g_n$, kde činitel g_i $i = 1, 2, \dots$) patří do normální podgrupy G_i.

Říkáme, že tím je dán direktní rozklad grupy G a píšeme

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots$$

Normální podgrupy G_i se pak jmenují direktní faktory (direktního) rozkladu. Jestliže se tyto direktní faktory G_i samy již nedají stejným direktním způsobem rozložit, říkáme, že jsou to (direktně) nerozložitelné (ireducibilní) grupy. (Pozor, nerozložitelnost je tedy něco jiného — pro grupy — než jednoduchost; jednoduchá grupa je jistě nerozložitelná, ne vždy však obráceně, jak je vidět na nekonečné cyklické grupě: ta je direktně nerozložitelná, není však jednoduchá.)

Máme tu tedy dvojí obdobu s rozkladem čísel v součin mocnin prvočísel: Jednak rozklad samotné grupy v direktní faktory a jednak jím určený rozklad prvku grupy v součin činitelů, vzatých z direktních faktorů.

V příkladě multiplikativní grupy kladných racionálních čísel byly jednotlivými, nerozložitelnými faktory direktního rozkladu vesměs nekonečné cyklické podgrupy (mocnin jednotlivých prvočísel), a bylo jich nekonečně mnoho. Jen o málo složitější je direktní rozklad multiplikativní grupy *všech* zlouků, tj. racionálních čísel, různých od nuly. Zde totiž přistupuje ještě jeden direktní a nerozložitelný faktor, cyklická grupa řádu 2, vytvořená číslem — 1.

Většině čtenářů je v podstatě znám jiný příklad direktního rozkladu grupy: aditivní grupa komplexních čísel $x + i.y$. (Nechť čtenáře nemate okolnost, že grupovým násobením je zde sečítání čísel!) Tato grupa se přímo definuje pomocí obou svých direktních faktorů, jimiž jsou dvě od sebe odlišné aditivní grupy reálných čísel, tvořené jednak tzv. reálnými částmi x, jednak tzv. imaginárními částmi y komplexního čísla $x + i.y$.

Poněkud obecněji je direktním rozkladem ve tři vzájemně rozlišené aditivní grupy reálných čísel dána aditivní grupa všech vektorů v prostoru $x.i + y.j + z.k$ (i, j, k jsou tzv. jednotkové vektory).

V obou posledních příkladech šlo o direktní rozklad ve faktory, které jsou dále direktně rozložitelné.

Je důležité zdůraznit, že rozklad *samotné grupy* v direktní faktory nemusí být nijak jednoznačný (v tom je obdoba s rozkladem celých *přirozených* čísel v mocniny prvočísel neúplná). Jestliže však již direktní faktory jsou určeny, potom je odpovídající rozklad prvků v součin činitelů, vzatých z jednotlivých direktních faktorů jednoznačně určen (v tom je úplná obdoba rozkladu *racionálních* čísel v mocniny prvočísel). Příklad direktního rozkladu ve dva direktně nerozložitelné faktory to objasní. Vezměme za rozkládanou grupu G multiplikativní grupu všech racionálních čísel tvaru 2^k3^h, tedy čísel 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, 6, $\frac{1}{6}$, 9, $\frac{1}{9}$, ... Za jeden faktor direktního rozkladu grupy G položme podgrupu $G_1 = (2^k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (tj. nekonečnou cyklickou grupu vytvořenou všemi celými mocninami čísla 2). Za druhý faktor direktního rozkladu pak zřejmě můžeme vzít podobně (multiplikativní) grupu $G_2 = (3^h)$ všech čísel, vytvořených mocninami čísla 3 s celistvými mocniteli. Můžeme psát zřejmý direktní rozklad

$$G = G_1 \times G_2 = (2^k) \times (3^h)$$

s direktně nerozložitelnými faktory.

Za druhý direktní faktor k faktoru G_1 můžeme však vzít též např. grupu $G_2' = (6^r)$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) mocnin čísla 6. Neboť je

$$2^k 3^h = 2^{k-h} 2^h 3^h = 2^{k-h} 6^h$$

a rozklad čísla $2^k 3^h$ v součin mocnin čísla 2 a čísla 6 je jednoznačný. (Jestliže totiž je $2^r 6^s = 2^{r'} 3^{s'}$, pak je

$$1 = 2^{r-r'} 6^{s-s'} = 2^{r-r'+s-s'} 3^{s-s'}$$

a to značí, že $s - s' = 0$, $r - r' + s - s' = 0$, tedy $s = s'$, a z toho $r = r'$.) Máme tedy i další direktní rozklad $G = (2^r) \times (6^s)$ v idrektně nerozložitelné faktory. A přece různé direktní rozklady téže grupy v direktně nerozložitelné faktory jsou v jistém smyslu rovnocenné. O tom nás poučuje základní věta teorie direktního rozkladu grup, tzv. věta Remak-Schmidtova[28]). Tuto

---

[28]) Větu dokázali téměř současně a nezávisle na sobě německý matematik R. Remak (v r. 1911) a ruský matematik O. Schmidt (1913) — týž, který proslul jako sovětský polární badatel. Zobecnění věty Remak-Schmidtovy podal — mezi jinými — z našich matematiků V. Kořínek.

větu, která je protějškem k větě Jordan-Hölderově, podáme v poněkud zjednodušené formě:

Buďtež

$$G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_n = \\ = G'_1 \times G'_2 \times \ldots \times G'_m$$

dva direktní rozklady grupy G v direktně nerozložitelné faktory $G_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ a $G'_j (j = = 1, 2, \ldots, m)$. Potom počet direktně nerozložitelných faktorů vobou rozkladech je týž, $n = m$, a ke každému faktoru G_i jednoho rozkladu existuje s ním isomorfní faktor G'_j druhého (direktního) rozkladu. Dokonce lze z jednoho direktního rozkladu pomocí druhého direktního rozkladu sestrojovat další direktní rozklady tak, že libovolné faktory jednoho direktního rozkladu nahradíme vhodnými faktory druhého direktního rozkladu.

Věta Remak-Schmidtova nám ovšem nezaručuje existenci direktního rozkladu libovolné grupy v nerozložitelné faktory. (V případech konečných grup je však existence alespoň jednoho direktního rozkladu v nerozložitelné faktory téměř zřejma: Stačí prostě rozkládat postupně jednotlivé faktory jakéhokoli direktního rozkladu tak dlouho, pokud se rozkládat dají. Vzhledem ke konečnosti grupy to jednou musí skončit u direktního rozkladu v nerozložitelné faktory.) Tato věta jen udává úzký vztah mezi jakýmikoli dvěma direktními rozklady téže grupy v nerozložitelné faktory, jestliže již rozklady máme. V předchozím příkladě grupy G všech čísel tvaru $2^k 3^h$ nám říká mj. to, že každý direktní rozklad grupy G v direktně nerozložitelné faktory tvoří dvě nekonečné cyklické grupy (podgrupy v G).

Obraťme se konečně ke třetímu hlavnímu způsobu, jakým v případě *konečných grup* sledujeme výstavbu složité grupy z jejich jednodušších podgrup. (I tato metoda má sice jisté rozšíření na nekonečné grupy, které se však daleko vymyká z rámce této knížky.)

Již jsme se zmínili, že nejjednoduššími konečnými grupami jsou grupy prvočíselného řádu, protože nemají vůbec žádných netriviálních podgrup. Pojem jednoduchosti vznikl rozšířením tohoto příliš úzkého pojmu jednoduchosti grupy: Grupa je jednoduchá, nemá-li netriviální normální podgrupy. Jiné rozšíření takové přílišné jednoduchosti grupy, jakou vidíme na grupách prvočíselného řádu, máme v grupách, jejichž řád je mocninou prvočísla p. To jsou tzv. p-grupy. Teorie p-grup se dosud nedá soustředit do jedné nebo několika málo jednoduchých vět, které by shrnovaly podstatné poznatky o věci; ostatně také výklad byť i jen základních výsledků teorie p-grup by si vyžádal zavedení mnoha pojmů, o nichž dosud nebyla řeč. Omezíme se proto na uvedení několika jednoduchých vlastností p-grup.

Předně jsou p-grupy zhruba řečeno příbuzné komutativním grupám, ale tato příbuznost se stává stále složitější, čím větší je mocnitel n v řádu p^n (p je prvočíslo) dané p-grupy. Tak nejen pro $n = 1$, nýbrž i pro $n = 2$ je každá p-grupa komutativní. (Tak např. třeba grupy řádu $13^2 = 169$ jsou komutativní.) Pro $n = 3$ již máme jen jistou slabou náhražku komutativity. (Ta spočívá v tom, že co nejmenší normální podgrupa taková, že faktorová grupa dle ní je komutativní, sestává právě ze všech prvků, které jsou komutativní s každým prvkem grupy; stručně se říká, že komutátorová podgrupa je rovna centru grupy.)

Z p-grup, které jsou stavebními kameny složitějších grup, jsou důležité tzv. Sylowovy podgrupy dané grupy. Jsou to p-grupy s co největším mocnitelem n řádu p^n, které jsou obsaženy v dané konečné grupě. Teorie Sylowových podgrup vychází z pozoruhodného zjištění, že ke každé nejvyšší mocnině p^n prvočísla p, která je činitelem řádu dané konečné grupy, existuje Sylowova podgrupa řádu p^n.

Běží pak dále o to určit co nejblíže povahu dané konečné grupy z podmínek, kladených na její Sylowovy podgrupy. Tak např. jsou dokonale popsány typy isomorfismu konečných grup, jejichž Sylowovy podgrupy jsou cyklické grupy. Speciálně jsou tím odkryty všechny možné grupy, jichž řád obsahuje prvočísla vesměs jen v první mocnině. (Jako aplikace Galoisovy teorie rovnic pak vyplývá, že rovnice, jichž grupy mají vesměs cyklické Sylowovy podgrupy, se dají řešit pomocí šesti základních početních úkonů algebry.)

Tím uzavíráme zběžný pohled na způsoby, jakými se studuje v teorii grup budování složitějších grup z jednodušších podgrup.

Na ukončenou se obraťme alespoň k nejhrubšímu náčrtu jisté teoreticky důležité aplikace teorie grup, totiž aplikace na tzv. topologii. Jde o spojení teorie grup s vyšetřováním nejzákladnějších geometrických pojmů, které je stejně hluboké a obtížné jako překvapující.

Nejprve několik přibližných slov o tom, co je to topologie.

Topologie[29]) je od geometrie odštěpená teorie těch

[29]) Slovo topologie je z řeckého topos = místo a logos = = slovo, nauka. Dříve se užívalo termínu analysis situs — lat. rozbor uložení. Založena v podstatě francouzským matematikem H. Poincarém a holandským matematikem L. Brou-

základních vlastností geometrických útvarů, které zůstávají zachovány při jejich spojitých a vzájemně jednoznačných transformacích, chceme-li, deformacích. Podat přesnou definici pojmu spojité, vzájemně jednoznačné transformace, čili tzv. topologické transformace (deformace) není jednoduché. Spokojíme se zde s přibližným objasněním tohoto pojmu na názorných příkladech.

Mysleme si geometrický útvar, např. kruh v rovině z dokonale roztažitelného materiálu, např. na povrchu gumy. Gumu s nakresleným kruhem smíme jakkoli roztahovat, stlačovat, mačkat a podobně deformovat, jen nesmíme nikde gumu přetrhnout (tím by deformace přestala být spojitou) a nikde nesmíme dvě místa povrchu gumy spojit v jedno (slepit) (tím by deformace přestala být vzájemně jednoznačnou). Tak lze topologicky deformovat kruh v trojúhelník nebo čtverec, ale např. nikdy ne v úsečku nebo v mezikruží. Ať gumovou rovinu deformujeme topologicky jakkoli, vždy to, co vznikne z kružnice, bude nepřetržitá, do sebe uzavřená a sebe neprotínající čára (tedy např. to nikdy nebude osmička), která bude rozdělovat to, co topologickou deformací vzniklo z roviny, ve dvě souvislé plošné části: ve vnitřek a ve vnějšek toho, co takto vzniklo z kružnice.

Topologie je tedy exaktním rozborem toho, čemu v nejobecnějším a poněkud neurčitém smyslu slova

---

werem koncem minulého a začátkem tohoto století, stala se topologie jednou z nejdůležitějších základních teorií moderní matematiky. Z vynikajících současných topologů jmenujeme sovětské topology Alexandrova a Pontrjagina, z Američanů Alexandera a Lefschetze. Z našich současných matematiků podstatně přispěl k rozvoji moderní topologie E. Čech.

říkáme tvar, vzájemná poloha a spojitost bez ohledu na délky, šířky a vzdálenosti vůbec.

Abychom měli na očích alespoň jeden příklad topologické rovnocennosti a topologické odlišnosti ploch v prostoru, představme si obyčejný hliněný hrnec s jedním uchem před vypálením. Topologickou deformací jej můžeme převést až např. v těleso podoby prstence (tzv. anuloid). Tedy povrch hliněného hrnce s jedním uchem je např. topologicky rovnocenný s povrchem nafouklé duše pro jízdní kolo (včetně ventilku, který nic nemění na topologické povaze prstencovitého povrchu). Naproti tomu se nám nikdy nepodaří topologickou deformací uhníst z hliněného hrnce s jedním uchem před vypálením kouli; stejně tak se nám ale nepodaří topologickým hnětením opatřit jmenovaný hrnec druhým uchem. Koule, hrnec s jedním uchem a hrnec se dvěma uchy jsou tělesa a mají povrchy topologicky odlišné. Koule je však topologicky rovnocenná s hliněným hrncem *bez ucha*, s krychlí, s trojbokým jehlanem. Hrnec s jedním uchem je topologicky rovnocenný s prstencem (anuloidem).

K vyšetřování topologických vlastností ploch, těles a obecnějších útvarů, i takových, které jsou uloženy v prostorech více než trojrozměrných, se užívá tzv. kombinatorické metody. Ta je právě oním mostem, který spojuje abstraktní pojem grupy s hlubokým rozborem našich nejzákladnějších geometrických tzn. topologických pojmů tvaru, rozprostření a (vzájemného) uložení a spojitosti. Pokusme se pochopit základní myšlenku kombinatorické metody na příkladě.

Představme si již zmíněný povrch prstence. Topologickou podstatu tohoto tvaru si dostatečně jasně uvědomujeme globálním prostorovým názorem. Avšak tento názor nás snadno může zavést na scestí svou ohraničeností a povrchností, například již tehdy, máme-li na mysli složitým způsobem topologicky zdeformovaný povrch našeho prstence. Tím spíše se to může stát při topologicky složitých plochách nebo tělesech, kde globální názor selhává. Zde nutno k celkové topologické povaze plochy dojít jejím složením z vhodných topologicky jednoduchých částí; při tom topologický charakter útvaru vynikne ze způsobu, jakým spolu souvisí jednotlivé části. Naprosto nutný je pak takový kombinatorický postup při více než trojrozměrných útvarech, kde nám bezprostřední geometrický názor chybí vůbec. Mysleme si tedy na povrchu našeho prstence jakousi „dopravní síť", skládající se z konečného počtu bodů — jakýchsi dopravních uzlů (a zároveň jediných stanic) a ze „spojů", tj. na povrchu prstence vedených jednoduchých čar, spojujících nějakým způsobem tyto uzly. Sledováním cestovních možností v takových sítích dospíváme již k některým topologickým poznatkům o dané ploše. Neboť topologickou deformací plochy se sice mění vzdálenosti dopravních uzlů, křivosti, délky a vzdálenosti jednotlivých spojů, ale nevznikají ani nové dopravní uzly, ani nová dopravní spojení, a žádná dopravní spojení se tím neruší. Tak se projeví topologická rozdílnost povrchu našeho prstence od povrchu koule např. takto: Mysleme si na povrchu prstence jakýkoli z pevného dopravního uzlu vycházející a do něho se vracející cestovní okruh sestavený z jednotlivých spojů tak, že každým zvoleným uzlem (stanicí) se projíždí jen jednou. Pak ať si vyhédneme jakékoli dva další dopravní uzly (mimo zmíněný okruh), můžeme vždy buďto vyhledat anebo v nejhorším případě zavést nové spoje tak, abychom se dostali z jednoho do druhého uzlu, aniž dojde ke křižování, nebo aniž bychom dokonce měli kus společné dráhy s dříve vytčeným uzavřeným cestovním okruhem. Naproti tomu na kouli to zřejmě možné není: Jakmile si zvolíme jeden bod uvnitř a druhý bod vně uzavřeného cestovního okruhu na povrchu koule, nedostaneme se po povrchu koule žádným způsobem z jednoho do druhého, aniž křižujeme daný do sebe uzavřený cestovní okruh, nebo aniž s ním máme část dráhy společnou..

Nyní jde o to, jak systematicky prozkoumat cestovní možnosti v takové dopravní síti na dané ploše. K tomu cíli si zvolme určitý bod (dopravní uzel a stanici) za východisko a po jakkoli složitém cestování v něm vždy naši cestu ukončíme. Tak vznikají tzv. uzavřené cesty, které jsou sledem na sebe navazujících spojů, při čemž je dán a zdůrazněn s m y s l p o s t u p u v p ř e d. Jinak nečiníme našemu cestování po ploše žádné omezení, takže můžeme jedním a týmž spojem nebo více spoji, nebo i částečným do sebe uzavřeným okruhem procházet vícekrát — ať již v původním nebo v opačném smyslu; můžeme speciálně projít týmž uzavřeným celým okruhem několikrát v jednom i opačném smyslu, můžeme se bezprostředně vracet do našeho východiska přesně po svých stopách — to vše budou uzavřené cesty. Pojem uzavřené cesty není tedy pouhým souhrnem prošlých spojů a stanic. Kdybychom chtěli názorně vyznačit naši výzkumnou (uzavřenou) cestu, učinili bychom tak způsobem, jehož s úspěchem použil antický hrdina Herakles v bludišti Minotaurově: Vyznačovali bychom naši pouť nití, kterou bychom po cestě odvíjeli, vyznačujíce smysl našeho postupu třeba pomocí pravotočivého předení nitě. Pak ovšem úseky, kterými jsme prošli několikrát, budou proloženy nití vícenásobně a v příslušném smyslu.

A nyní přijde to podstatné, co dovoluje užít pojmu grupy: Kdybychom si počínali přesně jako Herakles, navíjeli bychom opět naši niť vždy pokud bychom se *přímo* a bez přerušení vraceli v nějaké části naší cesty přesně po vlastních stopách, obrátivše se v některé „stanici" čelem vzad. Pak by však více cestám odpovídala jediná tzv. redukovaná stopa. Všechny cesty by se nám tím rozpadly do tříd cest, při čemž do jedné a téže třídy bychom kladli cesty s touž redukovanou stopou.

Je přirozené považovat (z hlediska našeho cíle) uzavřené cesty s toutéž redukovanou stopou za rovnocenné? Je to přirozené a my to učiníme. Neboť nám nejde, jako o to šlo Heraklovi, o to, abychom se vrátili přesně po svých stopách, a tím se uchránili zbloudění. Nám jde naopak o to, abychom bludiště našich spojů probádali co do možnosti spojení a k tomu nám prosté cestování tam a zpět neustále ve vlastních stopách nepřispívá. Zvláště pak ty uzavřené cesty, jež se přesně po vlastních stopách vracejí do našeho východiska, nikde od nich neodbočujíce, budeme považovat za rovnocenné s „cestováním", při němž setrváváme v našem východišti. Za podstatně různé budeme považovat jen takové cesty, které zanechávají různé redukované niťové stopy, tak, jako dva zlomky považujeme za různé jen tehdy, když výsledky dělení čitatele jmenovatelem jsou různé.

A tím jsme u tzv. *grupy uzavřených cest*, lépe *grupy tříd vzájemně neodlišných cest* naší sítě, které se říká *komplex drah*.

Vskutku:

1. Každé dvě uzavřené cesty můžeme v daném pořadí „znásobit" tak, že navážeme jednu na druhou. Při tom nemůžeme dostat podstatně různé cesty, jestliže nebude alespoň jedna z obou znásobených cest nahrazena cestou od této podstatně různou. (To si snadno představíme, když si uvědomíme, že redukovaná niťová stopa součinu

obou cest se dostane tak, že prostě projdeme obě cesty v daném pořadí po sobě a redukujeme po způsobu Heraklově.) — První axiom jednoznačnosti a neomezenosti grupového násobení je splněn.

2. Druhý axiom teorie grup, axiom asociativity, je splněn téměř samozřejmě, jak si čtenář sám laskavě uvědomí.

3. Třetí axiom, axiom jednotkového prvku, je splněn rovněž téměř samozřejmě; jednotkou naší grupy podstatně různých cest je v podstatě cesta po východišti, neboli zanedbaná cesta tam a zpět ve vlastních stopách.

4. Konečně i axiom inversního prvku je splněn: inversní cestou k dané cestě je táž cesta s obráceným smyslem postupu.

Takovým způsobem se tedy objevuje pojem grupy jako nerozlučný pomocník kombinatorické topologie. Vše matematicky podstatné z toho, co jsme zde vyložili obrazným způsobem lze ovšem vyslovit způsobem přesným a abstraktním, ale od toho tu upouštíme. Grupy cest, jež takto vznikají, jsou nekonečnými nekomutativními grupami, jež mají veliký význam pro teorii grup samotnou. Jsou to tzv. volné grupy; tímto názvem vyznačujeme přesně definovanou a tyto grupy charakterizující vlastnost, která — zběžně řečeno — značí, že prvky takové grupy jsou vzájemně vázány (pomocí grupového násobení) co nejslabšími vztahy, tj. jen takovými, které již nutně vyplývají ze splnění axiomů grupy.

Volné grupy cest jsou ovšem sotva počátkem kombinatorické topologie. Jsou oním základním schématem, které dovoluje vyjadřovat topologické vlastnosti ploch pomocí jistých rovností mezi prvky grupy cest, anebo lépe (což je ale logicky totéž) pomocí jistých, faktorových grup utvořených z grupy cest. Vlastním prostředkem topologie jsou teprve tyto faktorové grupy. Nejdůležitější na věci je, že tyto faktorové grupy závisí jen na topologické povaze útvaru (např. plochy) a nikoli na soustavě cest, pomocí níž vznikly.

Tolik alespoň zhruba k naznačení, jak grupová zákonitost nabývá v kombinatorické topologii hlubokého významu geometrického. — Dodejme, že existují i jiné, snad méně názorné, ale pro většinu úkolů topologie jednodušší způsoby, jakými se objevují potřebné, plochu topologicky charakterizující faktorové grupy, jež sestrojujeme v grupě cest, pomocí zmíněných rovností. Tyto faktorové grupy, tzv. grupy Bettiho, jsou komutativními grupami, takže pro většinu zásadních úkolů topologie vystačíme s mnohem jednodušší teorií komutativních grup. (O tom se čtenář může poučit ve velmi přístupně psané knížce od znamenitého sovětského topologa Alexandrova.)