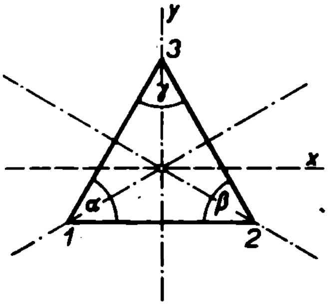
2. kapitola

GRUPA ZÁKRYTOVÝCH POHYBŮ ROVNOSTRANNÉHO TROJÚHELNÍKA. AXIOMY GRUPY

Abychom mohli sledovat skládání zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka (obr. 5)[1]) vyznačme si pro jednoduchost jednotlivé zákrytové pohyby takto: Písmena A, B, C nechť značí po řadě jednotlivá překlopení kolem osy úhlu α, β, γ. Písmena D a E nechť značí pohyby dané otočením roviny trojúhelníka o 120° a o 240° (proti směru ručiček hodin), a konečně J nechť značí identický pohyb (daný otočením o 0°). Tím jsme pojme-



Obr. 5

[1]) Čtenář učiní dobře, když si vystřihne z papíru rovnostranný trojúhelník (raději nikoli ten, který je na obr. 5 v knize) a sleduje názorně grupu jeho zákrytových pohybů podle dalšího výkladu; pozor na to, že po překlopení se mění smysl kladného otáčení.

novali všech 6 zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka, jak se čtenář sám snadno přesvědčí. Smluvme si ještě (jednou provždy), že zákrytový pohyb, řekněme Z, vzniklý tím, že po jistém zákrytovém pohybu Y provedeme ještě jistý zákrytový pohyb X, budeme prostě psát jako XY, tedy $Z = XY$. Místo XX píšeme pak X^2. Skládání zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka nyní nejlépe uvidíme na následující tabulce (tab. I), jejíž správné sestrojení nechť si čtenář ověří (viz pozn. 1).

Její užití je zřejmé: výsledek CD např. otočení o 120°, tj. pohybu D, následovaného překlopením kolem osy úhlu γ, tj. pohybem C, najdeme v průsečíku řádku uvedeného písmenem D a sloupce, uvedeného písmenem

	A	B	C	D	E	J
A	J	D	E	B	C	A
B	E	J	D	C	A	B
C	D	E	J	A	B	C
D	C	A	B	E	J	D
E	B	C	A	J	D	E
J	A	B	C	D	E	J

Tab. I

C, tedy odečteme $CD = B$ výsledek je překlopení kolem osy úhlu β; podobně $AB = E$, $AA = A^2 = J$ atp.

Pomocí tabulky I lze nyní pohodlně určovat i výsledné zákrytové pohyby (rovnostranného trojúhelníka) složené předepsaným způsobem[2]) postupně z více než ze dvou pohybů.

$$(AB)\,C = EC = A,\ A^2D = D,\ (BC)\,(DE) = DJ = D$$

(Slovní význam těchto rovností si čtenář laskavě uvědomí sám.)

Již z toho, co bylo dosud řečeno a napsáno, čtenáře možná napadlo, že mezi skládáním zákrytových pohybů (v daném příkladě rovnostranného trojúhelníka) a násobením čísel je jistá podobnost. Vytkněme si, v čem skládání zákrytových pohybů (dejme tomu rovnostranného trojúhelníka) se shoduje s násobením čísel (mysleme pro určitost na kladná lomená — čili racionální — čísla), tj. formulujme zákony platné pro obojí. To jsou právě axiomy grupy.

Axiom (1)

Především nahlížíme, že libovolné dva zákrytové pohyby X a Y složeny v určitém pořadí X, Y dají opět zákrytový pohyb, řekněme $Z = XY$ (téhož rovnostranného trojúhelníka), při čemž výsledný zákrytový pohyb Z je určen jednoznačně, tj. nezávisle na tom, jakým způsobem byly provedeny pohyby X, resp. Y.

Podobně libovolná dvě kladná lomená čísla, řekněme $R = \frac{6}{5}$ a $S = \frac{1}{10}$, dají jednoznačně určený součin $RS = \frac{3}{25} = 0{,}12$ nezávisle na tom, zda číslo R je dáno

[2]) Zapisování po sobě následujících pohybů zprava doleva má svoje důvody, jež se objasní při definici „násobení" permutací a transformací ve 3. kap. Je důležité si na to zvyknout.

na příklad jako 1,2 nebo číslo S je dáno jako $\dfrac{4 - 2 + 3}{50}$ nebo jakkoli jinak — jen když jsou čísla táž.

Říkáme stručně, že skládání zákrytových pohybů, stejně jako násobení čísel, splňuje zákon neomezenosti a jednoznačnosti.

Axiom (2)

Dále shledáváme toto:

Skládáme-li jakékoli tři zákrytové pohyby Z, Y, X (v našem případě např. tři překlopení $X = A$, $Y = B$, $Z = C$), pak jsou dvě možnosti, jak to provést, aniž porušíme protiabecedně vyznačený sled kterýchkoli dvou z uvažovaných pohybů. Jednak lze nejprve utvořit pohyb YZ provedením pohybu Y po pohybu Z a nechat po již známém pohybu YZ následovat pohyb X. Za druhé možno pohyb Z nechat následovat (předem již známým) výsledkem XY složení pohybu Y následovaného pohybem X. Při prvé možnosti utvoříme tedy pohyb $X(YZ)$, při druhé pohyb $(XY)\,Z$. V našem příkladě máme jednou $A(BC) = AE = B$ a podruhé $(AB)\,C = EC = B$, tedy totéž. Snadno si uvědomíme, že tomu tak musí být při skládání pohybů vždycky, neboť i při druhé možnosti vlastně následují tři dané pohyby v daném pořadí právě tak jako při možnosti prvé.

Říkáme, že je splněn zákon asociativity a píšeme jej stručně

$$(XY)\,Z = X(YZ)$$

Tento zákon, jak dobře víme ze školy i z početní praxe, je splněn při násobení čísel (nahradíme-li zákrytové pohyby čísly). Jeho důležitost (která bývá často stírána příliš povrchní formulací „nezáleží na uzávorkování“) tkví v možnosti definovat jednoznačně složení tří (a více) zákrytových pohybů v daném pořádku rovnostmi

$$XYZ = (XY)\,Z = X(YZ)$$

z toho pak plyne možnost definovat

$$X^3 = XXX,\ X^4 = XXXX \text{ atd.}$$

Axiom (3)

Mezi čísly je právě jedno, totiž 1, nadáno vlastností, že nechává jakékoli číslo jím násobené beze změny. Tuto úlohu jednotky v souboru zákrytových pohybů má zmíněný identický zákrytový pohyb J, což zapisujeme rovnostmi

$$XJ = JX = X$$

platnými pro každý pohyb X. Říkáme, že je splněn **zákon jednotkového prvku**, pokud budeme později hovořit obecněji o prvcích grupy místo o zákrytových pohybech, budeme nazývat J **jednotkovým prvkem.**

Axiom (4)

Ke každému lomenému číslu L (rozumí se dle předpokladu $L > 0$) máme jedno jediné (kladné) číslo $\frac{1}{L}$, tzv. převrácenou hodnotu k L, tj. číslo, jež znásobeno daným číslem dá jednotku, $L.\frac{1}{L} = 1 = \frac{1}{L}.L$. $\left(\text{Píšeme raději } L^{-1} \text{ namísto } \frac{1}{L}.\right)$

Podobně i ke každému zákrytovému pohybu (rovnostranného trojúhelníka) X máme přesně jeden zpětný pohyb X^{-1}, totiž takový, že po pohybu X se tímto pohybem X^{-1} vrátíme zpět do výchozí polohy, což píšeme rovností

$$X^{-1}X = J$$

Pohyby X a X^{-1} se vzájemně „ruší", tj. je též

$$XX^{-1} = J$$

Např. $A^{-1} = A$, protože $AA = A^2 = J$, nebo $D^{-1} = E$, protože $DD^{-1} = D^{-1}D = J = DE$. (Viz tabulka.)

Tomu, že ke každému zákrytovému pohybu existuje jeden jediný zpětný pohyb, říkáme, že je splněn zákon inversního prvku; ten dovoluje spolu se zákonem asociativity provádět u zákrytových pohybů obdobu dělení čísel, to jest: dovoluje ke dvěma daným pohybům Y a Z určit pohyb X tak, aby $XY = Z$; zřejmě totiž musí být $X = ZY^{-1}$. Podobně pro pohyb X hledaný rovnicí $YX = Z$ nalézáme $X = Y^{-1}Z$. Např. se ptejme, jaký pohyb musí předcházet před překlopením B kolem osy úhlu β našeho trojúhelníka, aby výsledek bylo otočení D o 120°? Nahlédnutím do tabulky zjišťujeme $X = B^{-1}D = BD = C$ jako odpověď, tj. jako řešení rovnosti $BX = D$. Slovy: hledaný pohyb je překlopení kolem osy úhlu γ.

Tuto důležitou okolnost, že zákrytové pohyby (rovnostranného trojúhelníka) splňují uvedené čtyři zákony (axiomy grupy) stručně vyjadřujeme rčením, že zákrytové pohyby tvoří grupu vzhledem k skládání pohybů. Čtyři axiomy grupy shrnují právě ty vlastnosti, jež splňuje každá množina všech zákrytových pohybů kteréhokoli geometricky pravidelného útvaru. Pojem grupy (zákrytových pohybů) tedy vystihuje matematickou podstatu pojmu pravidelnosti útvarů (prostorových i rovinných). Viděli jsme však také, že grupové axiomy rovněž splňuje násobení (kladných lomených) čísel, kde tyto axiomy jsou ze školy nám dobře známými základními početními zákony, jichž užíváme v každodenní početní praxi, aniž jsme si toho pro jejich samozřejmost vědomi. Můžeme tedy říci, že kladná lomená čísla *tvoří vzhledem k násobení rovněž grupu*, tak zvanou multiplikativní grupu kladných lomených čísel.

Je však ještě jeden (početní) zákon (axiom), který je splněn pro násobení čísel a není splněn např. pro skládání zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka, totiž tzv. zákon záměnnosti čili zákon komutativity.

Axiom (5)

Nezáleží na pořadí činitelů, stručně ve tvaru rovnosti

$$XY = YX$$

platné pro každé X a každé Y.

Skutečně totiž vidíme, že např. je

$$DA = C, \text{ ale } AD = B$$

slovy: překlopení kolem osy úhlu α následované otočením o 120° dá překlopení kolem osy úhlu γ, kdežto otočení o 120° následované překlopením kolem osy úhlu α dá překlopení kolem osy úhlu β.

Říkáme, že multiplikativní grupa kladných lomených čísel je *komutativní grupa*, také někde: *Abelova*[3]) grupa, kdežto grupa zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka není komutativní.

---

[3]) Na počest předčasně zemřelého norského matematika N. H. Abela (1. pol. XIX. stol.).

Jsou tu ovšem i další rozdíly mezi oběma grupami. Tak například všech kladných lomených čísel je nekonečně mnoho, kdežto všech zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka je konečně mnoho, totiž 6.

Říkáme, že multiplikativní grupa kladných lomených čísel je nekonečná, kdežto grupa zákrytových pohybů trojúhelníka rovnostranného je konečná, konečného řádu 6. Jiný rozdíl, souvisící s právě uvedeným, je tento: Libovolný zlomek a různý od jednotky má vesměs navzájem různé mocniny s celistvými kladnými mocniteli a, a^2, a^3, ... Naproti tomu libovolný zákrytový pohyb X trojúhelníka rovnostranného proveden šestkráte po sobě dá identický pohyb, tj. zde platí bez omezení rovnost $X^6 = J$, takže $X^7 = X$, $X^8 = X^2$, ... — „mocniny" se dále periodicky opakují. (Víme dokonce, že každý ze zákrytových — neidentických — pohybů rovnostranného trojúhelníka, poněvadž je to vždy buď překlopení, anebo otočení o 120°, resp. o 240°, splňuje vždy jednu z rovností $X^2 = J$ nebo $X^3 = J$.)

Za pomoci toho, co jsme právě uvedli, si tedy uvědomujeme tento souhrnný poznatek: *Některé* základní početní zákony, totiž tzv. zákony grupové (1) až (4), samozřejmě splněné při násobení (kladných lomených, případně i jiných) čísel nalézáme splněny i při skládání zákrytových pohybů geometricky pravidelných útvarů; tato okolnost, že zákrytové pohyby tvoří grupu, je společnou podstatou pojmu geometrické pravidelnosti. Skládáním zavádíme jakési „násobení" (ve zvl. př. „mocnění") zákrytových pohybů. Všechny vlastnosti, samozřejmé pro násobení a mocnění čísel však pro toto „násobení" již nejsou samozřejmými, zejména neplatí neomezený zákon záměnnosti pro skládání zákrytových pohybů.

K doplnění dodejme: Grupa zákrytových pohybů nemusí ovšem být konečná. Co více, z „konečnosti“ pravidelného útvaru neplyne konečnost grupy zákrytových pohybů, jak to vidíme na zřejmě nekonečné grupě zákrytových pohybů kružnice. Rovněž z „nekonečnosti“ (tj. neomezenosti) rovinného pravidelného útvaru neplyne nekonečnost grupy jeho zákrytových pohybů, jak to vidíme na grupě zákrytových pohybů obyčejného osového kříže (dvou navzájem kolmých přímek); tato grupa je řádu 8 (obsahuje 8 zákrytových pohybů: 4 překlopení a 4 otočení).

Uvedením do obecného pojmu grupy pomocí pojmu geometrické pravidelnosti sledujeme zhruba cestu, kterou (dle názoru některých matematiků) již staří Egypťané došli k neuvědomělé znalosti a použití tohoto jednoho ze základních pojmů moderní matematiky. Zároveň máme tak již na začátku možnost naznačit několik odpovědí na otázku, nač je teorie grup, tato základní disciplína abstraktní algebry. Bez obšírných výkladů je předně pochopitelné, že různé úlohy z ornamentální geometrické výzdoby (ať již plošné nebo prostorové) jsou v podstatě úlohami teorie grup zákrytových pohybů. Právě nepředstižné mistrovství starých Egypťanů v ornamentální geometricky pravidelné výzdobě je důvodem k názoru, že již oni v podstatě znali pojem konečné i nekonečné grupy, který se v novověké matematice objevuje teprve v XIX. století.

Teorie konečných grup (zákrytových pohybů) je dále podstatným pomocníkem nauky o tzv. pravidelných mnohostěnech vepsaných do koule.

Přímou praktickou důležitost má teorie grup zákrytových pohybů v krystalografii, tj. v nauce o geometrické pravidelnosti krystalů, ať již jde o tzv. makrokrystaly (viditelných rozměrů) nebo o mikrokrystaly (neviditelné pouhým okem).

Podobně má teorie grup aplikaci i v chemii, v teorii stereoisomerů, tj. v nauce o chemických sloučeninách týchž atomů v témž počtu, ale lišících se geometrickým uspořádáním v molekule.

Ve fyzice nalézáme aplikace teorie grup zejména v kvantové mechanice.

Cvičení

1. V grupě zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka určete $ABCD = ?$, $ABDE = ?$, $A^2B^2 = ?$ Řešte rovnice $AX = E$; $XE = B$, $XB = X^2C$.

2. Najděte další příklady dvojic zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka, které ukazují neplatnost komutativního zákona.

3. V grupě zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka vypočtěte $A^{15} = ?$, $D^{-135} = ?$, $(AD)^{15} = ?$ (Návod: např. $D^3 = J = D^0$ apod.; užijte dělení mocnitele se zbytkem!)

4. Přesvědčte se, že v grupě zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka neplatí vždy poučka: Součin se umocní, umocní-li se jednotliví činitelé. (Najděte pohyby X, Y, aby pro vhodný mocnitel, celistvé n bylo $(XY)^n \neq X^nY^n$.)

5. Skládejme po sobě prováděné zákrytové pohyby rovnostranného trojúhelníka tak, že při tom každou osu překlápění považujeme za nehybnou (pevně danou v původní rovině), stejně jako osu otáčení roviny. Takové skládání splňuje 1., 3. a 4. axiom teorie grup, nikoli však 2. axiom asociativity. Přesvědčte se o tom.

6. Sestrojte tabulku pro grupu zákrytových pohybů čtverce. Ukažte, že je to komutativní grupa.