O dynamickém programování

9. kapitola. Cauchy-Lagrangeova nerovnost

In: Jaroslav Morávek (author): O dynamickém programování. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 65–70.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403801

9. kapitola

CAUCHY-LAGRANGEOVA NEROVNOST*)

V této kapitole zobecníme výsledek z příkladu 8 předcházející kapitoly a z tohoto zobecnění získáme důkaz dvou klasických nerovností, důležitých v geometrii a matematické analýze.

Platí tato věta:

Věta 10: Nechť jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n je dané přirozené číslo) a nezáporné číslo x. Pro libovolnou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel, pro kterou $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x^2$, platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqq x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je zřejmé; předpokládejme, že platí pro přirozené číslo n a nechť $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ je libovolná $(n+1)$-tice reálných čísel, splňující vztah $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = x^2$. Odtud vyplývá $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (\sqrt{x^2 - x_{n+1}^2})^2$ a tedy na základě indukčního předpokladu $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqq \sqrt{x^2 - x_{n+1}^2}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

Odtud dostáváme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} \leqq \sqrt{x^2 - x_{n+1}^2}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + a_{n+1}x_{n+1} =$
$= \sqrt{(x\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2} - a_{n+1}x_{n+1})^2 - (x_{n+1}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2} - a_{n+1}x)^2} + a_{n+1}x_{n+1} \leqq$

---

*) Cauchy, čti koši; Lagrange, čti lagranže.

$\leqq | x\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2} - a_{n+1} \cdot x_{n+1} | + a_{n+1}x_{n+1} = x$ $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2}$, čímž je důkaz dokončen.

Pomocí věty 20 lze dokázat následující nerovnost, která má sama, ale hlavně její různá zobecnění, důležitou úlohu v geometrii a analýze.

Věta 21: (Nerovnost Cauchy-Lagrangeova) Nechť $(a_1, \ldots, a_n)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$ jsou libovolné dvě uspořádané n-tice reálných čísel. Potom platí $| a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \leqq$ $\leqq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$.

Důkaz: Nejprve dokážeme, že z předpokladů věty vyplývá nerovnost

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \leqq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \tag{18}$$

Skutečně, položíme-li ve větě 20 $x_j = b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a $x = \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$, dostáváme $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n =$ $= a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqq x\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ $\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$, což jsme měli ukázat. Ze vztahu (18) však vyplývá s použitím elementárních vlastností absolutní hodnoty $|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \leqq |a_1|\,|b_1| + \ldots +$ $+ |a_n|\,|b_n| \leqq \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}\sqrt{|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2} =$ $= \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$, čímž je důkaz dokončen.

Pomocí Cauchy-Langrangeovy nerovnosti dokážeme dále tzv. trojúhelníkovou nerovnost pro vzdálenost v Eukleidově prostoru. Ze školy je známo, že na přímce lze zvolit souřadnicový systém, tj. poloha každého bodu na přímce je vzájemně jednoznačně určena jistým reálným číslem. Jestliže poloha bodu A přímky je určena číslem a, píšeme A $= (a)$. V takto zvoleném souřadnicovém systému je vzdálenost mezi dvěma body $\mathbf{A} = (a)$ a $\mathbf{B} = (b)$ dána číslem $|a - b|$, které lze zapsat též ve tvaru $\sqrt{(a - b)^2}$. Podobně, je-li v rovině zavedena obvyklým způsobem soustava pravoúhlých souřadnic, takže poloha libovolného bodu $\mathbf{A}$ roviny je vzájemně jednoznačně určena uspořádanou dvojicí reálných čísel a_1, a_2 (což zapisujeme pomocí $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$), je vzdálenost mezi body $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ rovna $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, jak se snadno dokáže pomocí Pythagorovy věty. Též v prostorových souřadnicích se vzdálenost mezi body $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ prostoru počítá podle analogického vzorce $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

Abstrakcí se v matematice z pojmů přímky, roviny a (obyčejného) prostoru vyvinul pojem *Eukleidova n-rozměrného prostoru**) (n je přirozené číslo), kterým rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ reálných čísel, spolu s funkcí ϱ definovanou pro všechny uspořádané dvojice n-tic ($\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_n)$) předpisem

$$\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

Přitom se n-tice $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ nazývají *body* prostoru, čísla $a_1, \ldots, a_n$ *souřadnicemi* bodu $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ a $\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *Eukleidovou vzdáleností* bodů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

Z elementární geometrie je známo, že v případě přímky, roviny a „obyčejného“ prostoru platí pro vzdálenost bodů tzv. *trojúhelníková nerovnost*, kterou lze for-

*) Pro solidnější seznámení s pojmem Eukleidova n-rozměrného prostoru odkazujeme čtenáře na knížku K. Havlíčka „Prostory o čtyřech a více rozměrech“; vydala v edici „Škola mladých matematiků“ Mladá fronta (Praha 1965).

mulovat takto: Pro libovolné tři body **A**, **B**, **C** je vzdálenost mezi **A**, **C** menší nebo rovna součtu vzdáleností mezi **A**, **B** a mezi **B**, **C**. Vzniká přirozená otázka, zdali obdobné tvrzení platí i v obecném případě Eukleidova n-rozměrného prostoru. Následující věta obsahuje kladnou odpověď na tuto otázku.

Věta 22: Pro libovolné tři body **A**, **B**, **C** Eukleidova n-rozměrného prostoru platí

$$\varrho(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \leqq \varrho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + \varrho(\mathbf{B}, \mathbf{C}) .$$

Důkaz: Na základě Cauchy-Lagrangeovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned}(a_1 - b_1)(b_1 - c_1) + \ldots + (a_n - b_n)(b_n - c_n) &\leqq \\ \leqq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \,.\, &\sqrt{(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2}\end{aligned}$$

Odtud dále vyplývá

$$\begin{aligned}&[(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2] + \\ &+ [(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2] + \\ &+ 2[(a_1 - b_1)(b_1 - c_1) + \ldots + (a_n - b_n)(b_n - c_n)] \leqq \\ &\leqq [(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2] + \\ &+ [(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2] + \\ &+ 2\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \,.\, \\ &\cdot \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2}\end{aligned}$$

a po jednoduché úpravě obou stran získané nerovnosti dostáváme nakonec vztah

$$\begin{aligned}&(a_1 - c_1)^2 + \ldots + (a_n - c_n)^2 \leqq \\ &\leqq [\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} + \\ &+ \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2}]^2\end{aligned}$$

Protože na obou stranách poslední nerovnosti jsou nezáporná čísla, vyplývá z ní

$$\sqrt{(a_1 - c_1)^2 + \ldots + (a_n - c_n)^2} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} +$$
$$+ \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + \ldots + (b_n - c_n)^2}$$

což jsme měli dokázat.

Cvičení

Cvičení 1: Nalezněte všechny n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z věty 20, pro které platí $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x^2$ a $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = x\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

Cvičení 2: Dokažte, že za předpokladů věty 20 platí $|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n| \leqq x\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$.

Cvičení 3: (Jiný důkaz Cauchy-Lagrangeovy nerovnosti)
a) Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jsou libovolná reálná čísla, splňující vztahy $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = \beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2 = 1$. Potom platí $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n \leqq 1$. Dokažte zformulované tvrzení! (Návod: Vyšetřujte výraz $(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2$.)
b) Pomocí výsledku a) dokažte Cauchy-Lagrangeovu nerovnost. (Návod: Položte

$$\alpha_j = \frac{a_j}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}},\ \beta_j = \frac{b_j}{\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.)

Cvičení 4: (Ještě jeden důkaz Cauchy-Lagrangeovy nerovnosti.)

a) Dokažte rovnost $(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \,.\, (b_1^2 + \ldots + b_n^2) -$

$$-(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_ib_j - a_ib_j)^2$$ *) (Lagrangeova identita).

b) Pomocí výsledku a) dokažte Cauchy-Lagrangeovu nerovnost.

Cvičení 5: Ukažte, že Eukleidova vzdálenost má též tyto dvě vlastnosti (**A, B** označují libovolné dva body Eukleidova n-rozměrného prostoru): 1. ϱ **(A, B)** = ϱ **(B, A)** 2. ϱ **(A, B) = 0,** právě když **A = B.**

Cvičení 6: Dokažte, že pro Eukleidovu vzdálenost je nerovnost ϱ **(A, B)** $\geqq$ |ϱ **(A, C)** — ϱ **(B, C)**| splněna pro všechny trojice bodů **A, B, C** Eukleidova n-rozměrného prostoru. (Návod: Použijte vhodně trojúhelníkové nerovnosti.)

---

*) Zápis znamená v souhlasu s obvyklou matematickou symbolikou součet všech čísel $(a_ib_j - b_ia_j)^2$, kde i, j jsou celá, $1 \leq i < j \leq n$.