O dynamickém programování

5. kapitola. Celočíselné intervaly s minimálním ohodnocením

In: Jaroslav Morávek (author): O dynamickém programování. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 38–42.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403797

5. kapitola

CELOČÍSELNÉ INTERVALY S MINIMÁLNÍM OHODNOCENÍM

Nechť je dána posloupnost n reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uvažujme všechny možné součty tvaru

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j \tag{6}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \leqq j$. (Výraz (6) představuje skutečně součet $j - i + 1$ ($\geqq 2$) čísel v případě $j > i$; v případě $i = j$ je jeho hodnota a_i.)

Budeme se zabývat tímto extremálním problémem: Máme nalézt nejmenší ze součtů (6), popř. jeden z nejmenších, má-li problém více než jedno řešení.

Výrazem (6) je definována funkce, jejímž definičním oborem je množina všech uspořádaných dvojic (i, j), kde $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $i \leqq j$, a která každé takové dvojici přiřazuje číslo $a_i + \ldots + a_j$. Tuto funkci budeme pro stručnost nazývat funkcí (6). Náš extremální problém je tedy problémem určení minima funkce (6).

Ve speciálním případě, že všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou nezáporná, je minimální hodnotou funkce (6) zřejmě $\min \{a_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$. V obecném případě je však problém obtížnější. K jeho řešení lze užít následujícího triviálního algoritmu (srov. kapitolu 4): Určí se všechny součty (6) (tj. celkem $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ čísel) a z množiny těchto čísel se nalezne nejmenší pomocí algoritmu z kapitoly 2. Popsaný triviální algoritmus musí tedy určit a prozkoumat celkem $\frac{n(n+1)}{2}$ čísel.

Vyložíme nyní algoritmus dynamického programování pro řešení našeho problému, který vystačí s určením a prozkoumáním pouhých n čísel. Označme symbolem f^* hodnotu nejmenšího ze všech součtů (6) a symbolem f_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) hodnotu nejmenšího ze součtů (6) při pevném j a pro $i = 1, 2, \ldots, j$. Algoritmus je založen na rekurentním výpočtu čísel $f_1, f_2, \ldots, f_n, f^*$, vyplývajícím z další věty.

Věta 14: Čísla $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a f^* splňují tyto vztahy

a) $f_1 = a_1$

b) $f_{j+1} = a_{j+1} + \min(0, f_j)$

c) $f^* = \min\{f_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$

Důkaz: Část a) je zřejmá.

b)

$$\begin{aligned} f_{j+1} &= \min\{a_i + \ldots + a_j + a_{j+1} \mid i = 1, 2, \ldots, j+1\} = \\ &= \min(\min\{a_i + \ldots + a_j + a_{j+1} \mid i = j+1\}, \\ &\quad \min\{a_i + \ldots + a_j + a_{j+1} \mid i = 1, 2, \ldots, j\}) = \\ &= \min(a_{j+1}, \min\{a_i + \ldots + a_j \mid i = 1, 2, \ldots, j\} + a_{j+1}) = \\ &= \min(a_{j+1} + 0, a_{j+1} + f_j) = a_{j+1} + \min(0, f_j) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f^* &= \min\{a_i + \ldots + a_j \mid i, j \text{ celá}, 1 \leqq i \leqq j \leqq n\} = \\ &= \min\{\min\{a_i + \ldots + a_j \mid i = 1, \ldots, j\} \mid j = 1, \ldots, n\} = \\ &= \min\{f_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Důkaz věty 14 je dokončen.

Pro další výklad zavedeme ještě jinou, názornější interpretaci součtů (6). Množiny tvaru $\{i, i+1, \ldots, j\}$, kde $1 \leqq i \leqq j \leqq n$, budeme nazývat *celočíselnými intervaly* (množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$). Každý celočíselný interval je tedy množinou všech celých čísel x, splňujících nerovnosti $i \leqq x \leqq j$ (všimněte si analogie s „obyčejným" intervalem, známým ze střední školy). V dalším textu budeme pro „celočíselný interval" používat zkratky *CI*. Součet $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ nazveme dále *ohodnocením CI* $\{i, i+1, \ldots, j\}$. Každému *CI* je tedy přiřazeno jisté reálné číslo — jeho ohodnocení. Náš problém záleží v určení *CI* s minimálním ohodnocením. Ve větě 14 jsme již ukázali metodu pro nalezení nejmenšího ohodnocení; v další větě je popsán způsob nalezení odpovídajícího *CI*.

Věta 15: Nechť $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je přirozené číslo, pro které platí $f_{j_0} = f^*$.

a) Jestliže $f^* \geqq 0$, potom je $\{j_0\}$ *CI* s minimálním ohodnocením.

b) Jestliže $f^* < 0$, zvolme za i_0 nejmenší přirozené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, j_0\}$, pro které platí $f_{i_0} < 0$, $f_{i_0+1} < < 0, \ldots, f_{j_0-1} < 0$, $f_{j_0} < 0$. Potom je $\{i_0, i_0+1, \ldots, j_0\}$ *CI* s nejmenším ohodnocením.

Důkaz: a) V případě $j_0 = 1$ platí $f^* = f_1 = a_1$. V případě $j_0 > 1$ dostáváme $f^* = f_{j_0} = a_{j_0} + \min(0, f_{j_0-1})$, kde $f_{j_0-1} \geqq f_{j_0} \geqq 0$. Odtud vyplývá

$$\min(0, f_{j_0-1}) = 0 \text{ a tedy } f^* = f_{j_0} = a_{j_0}$$

V obou případech je tedy $\{j_0\}$ *CI* s minimálním ohodnocením.

b) Podle předpokladu platí $f^* = f_{j_0} < 0$, $f_{j_0-1} < 0, \ldots$, $f_{i_0+1} < 0$, $f_{i_0} < 0$, ale $f_{i_0-1} \geqq 0$, nebo $i_0 = 1$. Odtud dostáváme na základě věty 14:

$$f_{j_0} = a_{j_0} + f_{j_0-1},\ f_{j_0-1} = a_{j_0-1} + f_{j_0-2},\ \ldots,\ f_{i_0+1} = a_{i_0+1} + \\ + f_{i_0},\ f_{i_0} = a_{i_0}\,.$$

Z posledního řetězce vztahů vyplývá

$$f^* = f_{j_0} = a_{i_0} + a_{i_0+1} + \ldots + a_{j_0};$$

je tedy $\{i_0, i_0 + 1, \ldots, j_0\}$ CI s minimálním ohodnocením a důkaz věty 15 je dokončen.

Poznámka: Čtenář snadno sám ukáže, že v případě a) platí $a_j \geqq 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, zatímco v případě b) je alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ záporné.

Použití vyložené metody dynamického programování ilustrujeme na následujícím numerickém příkladu.

Příklad 5: Máme nalézt minimum funkce (6) pro $n = 10$ a pro čísla a_j uvedená ve druhém řádku následující tabulky.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	—1	0	1	—2	3	—4	0	1	—2	1
f_j	—1	—1	0	—2	1	—4	—4	—3	—5	—4

Tabulka 4

Čísla f_j vypočtená podle věty 14 zapisujeme do třetího řádku tabulky 4. Dále dostáváme

$$f^* = \min\{f_j \mid j = 1, 2, \ldots, 10\} = f_9 = -5$$

Dále z tabulky vidíme, že platí $f_9 < 0$, $f_8 < 0$, $f_7 < 0$, $f_6 < 0$, ale $f_5 \geqq 0$, takže $\{6, 7, 8, 9\}$ je CI s minimálním ohodnocením. Pro zkoušku správnosti výpočtu se můžeme přesvědčit, že skutečně platí $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = -5$.

Cvičení

Cvičení 1: Popište a odůvodněte netriviální metodu pro nalezení maxima funkce (6), analogickou metodě pro nalezení minima.

Cvičení 2: V podmínkách příkladu 5 řešte úlohu na maximum.

Cvičení 3: Extremální problém z příkladu 5 řešte pomocí triviálního algoritmu.

Cvičení 4: Určete počet operací sčítání a srovnání pro určení minima funkce (5), vyžadovaný

a) triviálním algoritmem

b) algoritmem dynamického programování

Do získaných vzorců dosaďte $n = 10, 100, 1000$.

Cvičení 5: Nechť I' a I'' jsou dva CI množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. I' a I'' nazveme *(navzájem) styčné*, jestliže neobsahují společný prvek a $I' \cup I''$ je rovněž CI. Nechť dále jsou dána čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Definujme funkci a na množině všech CI množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tímto předpisem:

$$a(I) = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j, \text{ jestliže } I = \{i, i + 1, \ldots, j\}.$$

Dokažte, že pro libovolné dva styčné CI I' a I'' množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$a(I' \cup I'') = a(I') + a(I'')$$

Cvičení 6: Dokažte následující tvrzení: Nechť a^* je funkce definovaná na množině všech CI množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ a vyhovující podmínce: Pro libovolné dva styčné CI (viz předcházející cvičení) I' a I'' platí

$$a^*(I' \cup I'') = a^*(I') + a^*(I'')$$

Potom existuje jediná n-tice reálných čísel $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*$ tak, že platí

$$a^*(I) = a_i^* + a_{i+1}^* + \ldots + a_j^* \text{ pro } I = \{i, i + 1, \ldots, j\}$$