3. kapitola

# METODA DYNAMICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

Myšlenku dynamického programování vysvětlíme na jedné extremální úloze, která se již tradičně považuje za dosti typický příklad použití této metody. Nechť jsou dány funkce $g_1, g_2, \ldots, g_n$, definované na množině $\{0, 1, \ldots, a\}$*), kde $a$ je dané celé nezáporné číslo. Pomocí funkcí $g_1, \ldots, g_n$ utvoříme nyní novou funkci

$$y = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_n(x_n) \tag{1}$$

definovanou na množině

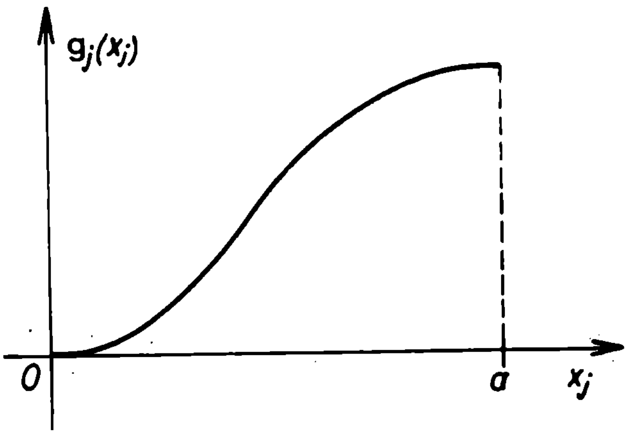
$$\left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_n \text{ celá, nezáporná} \\ x_1 + \ldots + x_n = a \end{array} \right\} \tag{2}$$

[Jinými slovy: (2) je množina všech uspořádaných $n$-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ celých nezáporných čísel, splňujících podmínku $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$.]

V této kapitole se budeme zabývat úlohou nalezení maxima funkce (1) na množině (2). Všimněme si nejprve, že maximum funkce (1) na množině (2) skutečně existuje, jak vyplývá z věty 6. Metoda, kterou chceme použít pro skutečné řešení zformulované extremální úlohy, bude metoda dynamického programování.

*) Ve shodě s dříve zavedeným zápisem konečných neprázdných množin znamená „$\{0, 1, \ldots, a\}$“ množinu, jejímiž prvky jsou celá čísla $0, 1, \ldots, a$; v zápisu je zvoleno „přirozené“ pořadí čísel, podle velikosti.

Nejprve však ukážeme jedno použití zformulované extremální úlohy na *problém nejefektivnějšího rozdělení zdrojů*, vyskytující se v ekonomii. Předpokládejme, že v nějakém závodě pracuje celkem $a$ dělníků a výrobní proces probíhá v $n$ různých dílnách. Předpokládejme dále, že jednotlivé dílny vyrábějí produkci samostatně od začátku až do konce, tj. žádná není závislá na ostatních. Dále předpokládáme, že průměrný výtěžek z měsíční produkce $j$-té dílny, měřený v penězích, je známou funkcí $y = g_j(x_j)$ počtu $x_j$ dělníků, kteří v dílně pracují. Vedení závodu chce rozdělit dělníky do jednotlivých dílen takovým způsobem, aby průměrný měsíční výtěžek z celé produkce závodu byl maximální. Je zřejmé, že zformulovaný problém vede na extremální úlohu (1), (2). V případě naší ekonomické aplikace budou mít grafy funkcí $g_j$ pravděpodobně typický tvar, znázorněný schematicky na obr. 1.




Obr. 1

Tvar křivky odpovídá tomu, že při nedostatečném počtu pracovních sil výroba v dílně prakticky „stojí“ a při jejich nadbytku dochází k jistému efektu nasycení a v jeho důsledku k stagnaci dalšího růstu výroby (např. dělníků je více než techniky, navzájem si překážejí apod.). Poznamenejme však, že algoritmus, který nyní vyložíme, nevyžaduje splnění žádných speciálních předpokladů o funkcích $g_j$.

Použití metody dynamického programování záleží v tom, že se řeší celá množina extremálních problémů, do níž patří i problém (1), (2). Obecný problém této množiny je přiřazen uspořádané dvojici $(j, x)$, kde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $x \in \{0, 1, \ldots, a\}$, a záleží v určení maxima funkce $j$ proměnných

$$y = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots + g_j(x_j)$$

na množině

$$\left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_j \text{ celá a nezáporná} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x \end{array} \right\}$$

Tyto jednodušší extremální problémy se nyní řeší postupně pro $j = 1$; $x = 0, 1, \ldots, a$; $j = 2$; $x = 0, 1, \ldots, a$; $\ldots$ $j = n$; $x = 0, 1, \ldots, a$. Přitom přechod od $j$ k $j + 1$ se provádí pomocí jistého rekurentního vztahu, jak ukazuje následující věta.

**Věta 11:** Pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a $x = 0, 1, \ldots, a$ položme

$$f_j(x) = \max \left\{ g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x \end{array} \right\}$$

Potom platí

a) $f_1(x) = g_1(x)$ pro $x = 0, 1, \ldots, a$

b) $f_{j+1}(x) = \max \{f_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) | x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x\}$

pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1$; $x = 0, 1, \ldots, a$

**Důkaz:** a) $f_1(x) = \max \{g_1(x_1) \mid x_1 = x\} = \max \{g_1(x)\} = g_1(x)$

b) Podle definice platí

$$f_{j+1}(x) = \max\left\{g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) + g_{j+1}(x_{j+1}) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j, x_{j+1} \\ \text{celá a nezáp.}; x_1 + \\ + \ldots + x_{j+1} = x \end{array}\right\}$$

tj. $f_{j+1}(x)$ je maximem funkce

$$y = g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) + g_{j+1}(x_{j+1}) \tag{3}$$

na množině

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j, x_{j+1} \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_{j+1} = x \end{array}\right\} \tag{4}$$

Množinu (4) vyjádříme jako sjednocení $x + 1$ množin takto:

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j, 0) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - 0 \end{array}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x_1, \ldots, x_j, 1) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - 1 \end{array}\right\} \cup$$

---

$$\cup \left\{(x_1, \ldots, x_j, x) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - x \end{array}\right\} =$$

$$\bigcup \left\{(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - x_{j+1} \end{array}\right\}$$

$x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x$

Maximum funkce (3) na množině (4) určíme nyní pomocí věty 8 takto: Určíme maximální hodnoty funkcí definovaných předpisem (3) na množinách

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - x_{j+1} \end{array}\right\}$$

pro $x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x$, a z takto získaných hodnot určíme maximální. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= \\ &= \max_{x_{j+1} \in \{0, \ldots, x\}} \max \left\{ g_1(x_1) + \ldots + g_{j+1}(x_{j+1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.;} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - x_{j+1} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Na druhé straně dostáváme pomocí věty 10

$$\max\left\{ g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) + g_{j+1}(x_{j+1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá} \\ \text{a nezáp.; } x_1 + \\ + \ldots + x_j = \\ = x - x_{j+1} \end{array} \right\} =$$

$$= g_{j+1}(x_{j+1}) + \max \left\{ g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_j \text{ celá a nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x - x_{j+1} \end{array} \right\} =$$

$$= g_{j+1}(x_{j+1}) + f_j(x - x_{j+1}) \, .$$

Dosazením posledního výrazu do (5) dostáváme nakonec

$$f_{j+1}(x) = \max_{x_{j+1} \in \{0, \ldots, x\}} \Big( f_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) \Big) =$$

$$= \max \{ f_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) \mid x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x \}$$

Důkaz věty je dokončen.

Věta 11 umožňuje spočítat maximum funkce (1) na množině (2), neboť toto maximum je při našem označení rovno $f_n(a)$; podrobně ukážeme za chvíli výpočetní postup na číselném příkladu. Otevřená však zatím zůstává otázka, jak nalézt $n$-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z množiny (2), pro kterou nabývá funkce (1) své maximální hodnoty (popř. nalézt všechny takové $n$-tice). Jinými slovy, jde o nalezení nějakého řešení (popř. všech řešení) extremálního problému (1), (2). Popíšeme nyní takový postup. Hledaná $n$-tice se bude konstruovat pomocí jistých funkcí $y = \boldsymbol{P}_1(x)$, $y = \boldsymbol{P}_2(x)$, $\ldots$, $y = \boldsymbol{P}_n(x)$ definovaných na množině $\{0, 1, \ldots, a\}$ takto:

Položíme $\boldsymbol{P}_1(x) = x$ pro $x = 0, 1, \ldots, a$ a dále pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1$; $x = 0, 1, \ldots, a$ položíme $\boldsymbol{P}_{j+1}(x) = x^*_{j+1}$, kde $x^*_{j+1}$ je libovolné číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, x\}$, splňující vztah

$$f_{j+1}(x) = f_j(x - x^*_{j+1}) + g_{j+1}(x^*_{j+1})$$

Existence alespoň jednoho takového čísla $x_{j+1}$ vyplývá z faktu, že $f_{j+1}(x)$ je maximem množiny

$$\{f_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) \mid x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x\}$$

Na druhé straně je nutné poznamenat, že ani $x^*_{j+1}$ a tedy ani funkce $\boldsymbol{P}_{j+1}$ nejsou určeny obecně jednoznačně; poslední fakt souvisí úzce s tím, že funkce (1) může nabývat svého maxima ve více než v jedné $n$-tici množiny (2).

Funkce $\boldsymbol{P}_j$ se konstruují paralelně s výpočtem hodnot funkcí $f_j (j = 1, 2, \ldots, n)$. Z následující věty vyplývá metoda nalezení řešení extremálního problému (1), (2) pomocí funkcí $\boldsymbol{P}_j$.

**Věta 12:** Položme $x_j^{(0)} = \boldsymbol{P}_j(x)$, $x_{j-1}^{(0)} = \boldsymbol{P}_{j-1}(x - x_j^{(0)})$

$x^{(0)}_{j-2} = \boldsymbol{P}_{j-2}(x - x^{(0)}_j - x^{(0)}_{j-1}), \quad \ldots, \quad x^{(0)}_1 = \boldsymbol{P}_1(x - x^{(0)}_j - - \ldots - x^{(0)}_2)$

Potom platí

1. $x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_j$ jsou celá a nezáporná
2. $x^{(0)}_1 + \ldots + x^{(0)}_j = x$
3. $g_1(x^{(0)}_1) + \ldots + g_j(x^{(0)}_j) = f_j(x)$

**Důkaz:** Tvrzení 1. a 2. jsou bezprostředním důsledkem definice funkcí $\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. Tvrzení 3. se lehce dostane sečtením vztahů

$$f_j(x) = f_{j-1}(x - x^{(0)}_j) + g_j(x^{(0)}_j)$$

$$f_{j-1}(x - x^{(0)}_j) = f_{j-2}(x - x^{(0)}_j - x^{(0)}_{j-1}) + g_{j-1}(x^{(0)}_{j-1})$$

---

$$f_2(x - x^{(0)}_j - \ldots - x^{(0)}_3) = f_1(x - x^{(0)}_j - \ldots - x^{(0)}_2) + g_2(x^{(0)}_2)$$

$$f_1(x - x^{(0)}_j - \ldots - x^{(0)}_2) = g_1(x^{(0)}_1)$$

vyplývajících ze zavedení funkcí $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$. Důkaz věty 12 je dokončen.

Z dokázané věty je patrné, že konstrukce řešení $(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_n)$ závisí na funkcích $\boldsymbol{P}_j$. Protože však funkce $\boldsymbol{P}_j$ lze obecně definovat různým způsobem, budeme metodou věty 12 dostávat různá řešení našeho problému. Lze však ukázat, že zkonstruujeme-li funkce $\boldsymbol{P}_j$ „všemi možnými způsoby“, dostaneme všechna řešení našeho extremálního problému (viz cvičení 6 na konci této kapitoly).

Použití vyložené teorie nyní ilustrujeme na následujícím číselném příkladu.

**Příklad 4:** Řešme extremální problém (1), (2) pro

| $x$ | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | $g_7$ | | $f_1$ | $P_1$ | $f_2$ | $P_2$ | $f_3$ | $P_3$ | $f_4$ | $P_4$ | $f_5$ | $P_5$ | $f_6$ | $P_6$ | $f_7$ | $P_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | −10 | 1 | 1 | 1 | −12 | 0 | | 1 | 0 | −9 | 0 | −8 | 0 | −7 | 0 | −6 | 0 | −18 | 0 | −18 | 0 |
| 1 | −3 | 1 | 4 | −2 | 0 | −10 | 2 | | −3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 4 | 0 | 5 | 0 | −7 | 0 | −7 | 0 |
| 2 | 5 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | | 5 | 2 | 2 | 2 | 6 | 1 | 7 | 0 | 8 | 0 | −4 | 0 | −4 | 0 |
| 3 | 7 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | | 7 | 3 | 6 | 1 | 7 | 0 | 8 | 0 | 9 | 0 | 5 | 2 | 5 | 0 |
| 4 | 8 | 0 | 1 | −3 | 1 | −5 | −2 | | 8 | 4 | 8 | 1 | 10 | 1 | 11 | 0 | 12 | 0 | 8 | 2 | 8 | 0 |
| 5 | −2 | 5 | 1 | 4 | 2 | 0 | 1 | | −2 | 5 | 9 | 1 | 12 | 1 | 13 | 0 | 14 | 0 | 9 | 2 | 10 | 1 |
| 6 | 1 | −2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 0 | | 1 | 6 | 9 | 2 | 13 | 1 | 14 | 0 | 15 | 0 | 12 | 2 | 12 | 0 |

Tabulka 2

$n = 7$, $a = 6$ a pro funkce $g_1, g_2, \ldots, g_7$, jejichž hodnoty jsou uvedeny v levé části tabulky 2. Hodnoty funkcí $f_j$ a $P_j$, vypočtené na základě věty 11 a definice funkcí $P_j$, jsou zapsány v pravé části tabulky. Pravá část tabulky se zaplňuje po jednotlivých sloupcích, zleva doprava, přičemž sloupec pro $f_1$ vznikne opsáním sloupce pro $g_1$. Pro výpočet hodnot ve sloupci nadepsaném $f_{j+1}$ se používá hodnot ležících ve sloupcích pro $f_j$ a pro $g_{j+1}$. Ukažme si podrobně postup při výpočtu $f_6(3)$ a $P_6(3)$:

$$f_6(3) = \max \{f_5(3 - x_6) + g_6(x_6) \mid x_6 = 0, 1, 2, 3\} = \max (f_5(3) + g_6(0), f_5(2) + g_6(1), f_5(1) + g_6(2), f_5(0) + g_6(3)) = \max (-3, -2, 5, -5) = 5; P_6(3) = 2, \text{ neboť } f_5(3 - 2) + g_6(2) = 5 = f_6(3)$$

Hledaná maximální hodnota funkce (1) na množině (2) je tedy $f_7(6) = 12$ a chceme ještě nalézt nějaké řešení našeho extremálního problému. K tomu použijeme větv 12:

$$\begin{aligned}
x_7^{(0)} &= P_7(a) = P_7(6) = 0 \\
x_6^{(0)} &= P_6(a - x_7^{(0)}) = P_6(6 - 0) = 2 \\
x_5^{(0)} &= P_5(a - x_7^{(0)} - x_6^{(0)}) = P_5(4) = 0 \\
x_4^{(0)} &= P_4(a - x_7^{(0)} - x_6^{(0)} - x_5^{(0)}) = P_4(4) = 0 \\
x_3^{(0)} &= P_3(a - x_7^{(0)} - \ldots - x_4^{(0)}) = P_3(4) = 1 \\
x_2^{(0)} &= P_2(a - x_7^{(0)} - \ldots - x_3^{(0)}) = P_2(3) = 1 \\
x_1^{(0)} &= P_1(a - x_7^{(0)} - \ldots - x_2^{(0)}) = P_1(2) = 2
\end{aligned}$$

(Řešení lze též hledat přímo pomocí tabulky, jak je ukázáno silnou čarou.) Dostáváme tedy řešení

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_7^{(0)}) = (2, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$$

Můžeme ještě provést zkoušku správnosti dosazením; skutečně platí

$$g_1(2) + g_2(1) + g_3(1) + g_4(0) + g_5(0) + g_6(2) +$$

$$+ g_7(0) = 5 + 1 + 4 + 1 + 1 + 0 + 0 = 12 = = f_7(6) .$$

Analogicky, jako jsme řešili problém určení maxima funkce (1) na množině (2), lze řešit i odpovídající minimalizační problém. Položme

$$h_j(x) = \min\left\{g_1(x_1) + \ldots + g_j(x_j) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1, \ldots, x_j \text{ celá, nezáp.} \\ x_1 + \ldots + x_j = x \end{matrix}\right\}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$; $x = 0, 1, \ldots, a$. Platí tvrzení analogické větě 11.

**Věta 13:** Platí

a) $h_1(x) = g_1(x)$

b) $h_{j+1}(x) = \min \{h_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) \mid x_{j+1} = 0, 1, \ldots, x\}$ pro $x = 0, 1, \ldots, a$

Důkaz poslední věty, jakož i odvození metody pro konstrukci řešení minimalizačního problému přenecháváme čtenáři.

## Cvičení

**Cvičení 1:** Dokažte větu 13 dvěma způsoby:

a) z věty 11 pomocí věty 9

b) samostatně, analogicky jako větu 11

**Cvičení 2:** Ukažte a odůvodněte metodu nalezení n-tice, která je řešením minimalizačního problému z věty 13.

**Cvičení 3:** Řešte minimalizační problém v situaci příkladu 4.

**Cvičení 4:** Nalezněte metodu pro určení

$$\max\left\{g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \text{ celá nezáp.} \\ a' \leqq x_1 + \ldots + x_n \leqq a'' \end{matrix}\right\}$$

kde $a'$, $a''$ jsou daná celá, nezáporná čísla, $a' \leqq a''$.

**Cvičení 5:** Nalezněte maximum a minimum funkce

$$y = 10x_1 + x_2^2 + x_2 + 2^{x_3} - 5x_3 - 15 \sin\left(\frac{\pi}{2} x_4\right) + x_5^3 - 14x_5$$

na množině všech pětic $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ celých nezáporných čísel, splňujících podmínku

a) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 3$
b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 7$
c) $2 \leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \leqq 6$

(Doporučení: Nejprve sestavte tabulku výrazů $10x_1$, $x_2^2 + x_2$, $2^{x_3} - 5x_3$, $15 \sin\left(\frac{\pi}{2} x_4\right)$, $x_5^3 - 14x_5$ pro $x_1, \ldots, x_5 = 0, 1, \ldots, 7$, analogickou levé části tabulky 2.)

**Cvičení 6:** Nechť $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ je libovolné řešení maximalizačního problému (1), (2). Dokažte, že funkce $P_1, P_2, \ldots, P_n$ lze zvolit tak, abychom metodou věty 12 dostali právě řešení $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Jinými slovy: volíme-li funkce $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ve větě 12 všemi možnými způsoby, dostaneme tak všechna řešení maximalizačního problému (1), (2).