O dynamickém programování

1. kapitola. Pojem extremálního problému

In: Jaroslav Morávek (author): O dynamickém programování. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 5–11.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403793

1. kapitola

POJEM EXTREMÁLNÍHO PROBLÉMU

Cílem této knížky je ukázat jednu elementární metodu pro řešení jisté třídy extremálních problémů. S pojmem *extremálního problému* (tj. *úlohy na určení maxima nebo minima*) se čtenář asi setkal již na střední škole. Uveďme několik příkladů extremálních úloh.

1. Máme nalézt nejmenší hodnotu kvadratického trojčlenu $x^2 + x + 1$, kde x je libovolné reálné číslo.

2. Z množiny všech obdélníků dané délky obvodu máme nalézt obdélníky s největším obsahem.

3. Z množiny všech obdélníků daného obsahu máme nalézt obdélníky s nejmenší délkou obvodu.

4. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky p a q. Máme určit všechny dvojice bodů **P** a **Q** takové, že **P** leží na p, **Q** leží na q a vzdálenost mezi **P** a **Q** je minimální.

5. Na šachovnici máme umístit nejmenší počet královen tak, aby každé pole bylo „ohroženo".

Všechny uvedené příklady lze zahrnout do obecného schématu extremálního problému. V extremálním problému jde o tuto situaci: každému prvku nějaké pevně zvolené množiny je přiřazeno nějaké reálné číslo; úkolem je nalézt nejmenší (popřip. největší) z takto přiřazených čísel a příslušné prvky, kterým je toto nejmenší (popřip. největší) číslo přiřazeno.

Při vyšetřování extremálních problémů budeme pracovat s pojmem množiny a s pojmem funkce na této množině definované. *Množinou* rozumíme soubor (souhrn) všech objektů, charakterizovaných nějakou vlastností, popříp. několika vlastnostmi. Množiny označujeme obvykle velkými písmeny, např. $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ apod. Fakt, že $\mathbf{A}$ je množina všech objektů množiny $\mathbf{B}$, majících vlastnost V, budeme symbolicky zapisovat

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{B} \mid x \text{ má vlastnost } V\}$$

(V případě, že množina $\mathbf{B}$ bude známa z kontextu, budeme používat též stručnějšího zápisu $\mathbf{A} = \{x|x \text{ má vlastnost } V\}$.)

Objekty náležející dané množině se nazývají jejími prvky, zápis $x \in \mathbf{A}$ znamená „*x je prvkem* $\mathbf{A}$", zápis $x \notin \mathbf{A}$ — „*x není prvkem* $\mathbf{A}$". Říkáme, že množiny $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ *se sobě rovnají*, což zapisujeme symbolem $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jestliže každý prvek množiny $\mathbf{A}$ je prvkem množiny $\mathbf{B}$, a obráceně, každý prvek množiny $\mathbf{B}$ je prvkem množiny $\mathbf{A}$. Negaci vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ zapisujeme pomocí $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a čteme „$\mathbf{A}$ *je různé od* $\mathbf{B}$", nebo „$\mathbf{A}$ *se nerovná* $\mathbf{B}$". Říkáme, že množina $\mathbf{A}$ je *částí* množiny $\mathbf{B}$ (též $\mathbf{A}$ je *podmnožinou* $\mathbf{B}$), jestliže každý prvek $\mathbf{A}$ je prvkem $\mathbf{B}$.

Množina se nazývá *konečná*, jestliže obsahuje konečně mnoho prvků. Množina, která není konečná, se nazývá *nekonečná*. Příkladem nekonečné množiny je množina všech přirozených čísel, nebo množina všech reálných čísel. Poslední množinu budeme označovat v celé knížce symbolem $\mathbf{R}$. Přitom místo výrazu „reálné číslo" budeme používat většinou stručnějšího „číslo".

Mezi konečné množiny zahrnujeme i *prázdnou* množinu, definovanou tím, že neobsahuje žádný prvek. Prázdnou množinu označujeme symbolem $\emptyset$. Množina se nazývá *neprázdná*, obsahuje-li alespoň jeden prvek. Konečnou neprázdnou množinu obsahující prvky x_1, x_2, $\ldots$, x_n, kde n označuje počet jejích prvků, označujeme symbolem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. V posledním zápisu nezáleží na pořadí prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Všimněme si však, že v uvažovaném zápisu jsou všechny prvky $x_1, \ldots, x_n$ navzájem různé.

Pro množiny se definuje řada operací, jako např. sjednocení, průnik, rozdíl, kartézský součin aj. Pro náš výklad budeme potřebovat pojem sjednocení množin. Nejprve si připomeneme definici *sjednocení* dvou množin, známou asi už ze školy. Nechť jsou dány množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. *Sjednocením* množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ budeme rozumět množinu označovanou $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ a definovanou takto: $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ právě tehdy, jestliže je splněna alespoň jedna z podmínek: $x \in \mathbf{A}$ nebo $x \in \mathbf{B}$. Pojem sjednocení rozšíříme dále na případ libovolného konečného počtu množin. Nechť jsou dány množiny $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. *Sjednocením* množin $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ budeme rozumět množinu $\mathbf{C}$ definovanou takto: vztah $x \in \mathbf{C}$ platí právě tehdy, jestliže existuje j ($j = 1, 2, \ldots, n$) tak, že $x \in \mathbf{A}_j$. Sjednocení množin $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ označujeme symbolem $\mathbf{A}_1 \cup \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_n$ nebo $\bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j$ nebo $\bigcup_{j=1,\ldots,n} \mathbf{A}_j$. (Speciálně tedy dostáváme $\bigcup_{j=1} \mathbf{A}_j = \bigcup_{j=1}^{1} \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_1$ a $\bigcup_{j=1,2} \mathbf{A}_j = \bigcup_{j=1}^{2} \mathbf{A}_j = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$.)

Dále se budeme zabývat pojmem *funkce*. Ve škole jste se asi setkali s pojmem funkce, jakožto zobrazení z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$*). Pro náš výklad pojem funkce poněkud rozšíříme. Nechť je dána libovolná neprázdná množina $\mathbf{A}$. *Funkcí definovanou na množině* $\mathbf{A}$ budeme rozumět jakýkoliv předpis, podle kterého je každému $x \in \mathbf{A}$ přiřazeno jediné reálné číslo. Funkce budeme označovat

*) Připomeňme si, že $\mathbf{R}$ označuje množinu všech reálných čísel.

malými tučnými typy, např. $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ apod. Nechť $\boldsymbol{f}$ je funkce definovaná na $\mathbf{A}$ a nechť $x \in \mathbf{A}$. Symbolem $\boldsymbol{f}(x)$ označíme číslo přiřazené prvku x funkcí $\boldsymbol{f}$, ve smyslu vyslovené definice. Číslo $\boldsymbol{f}(x)$ budeme nazývat *hodnotou funkce* $\boldsymbol{f}$ v x, nebo stručněji *hodnotou* $\boldsymbol{f}(x)$. Množinu $\mathbf{A}$ nazýváme definičním oborem funkce $\boldsymbol{f}$. Ve smyslu naší definice je tedy každá funkce určena dvěma „věcmi“: 1) svým definičním oborem $\mathbf{A}$, 2) předpisem, podle kterého je každému $x \in \mathbf{A}$ přiřazeno jediné $\boldsymbol{f}(x)$.

Pro funkci $\boldsymbol{f}$ definovanou na množině $\mathbf{A}$, zavedeme dále toto označení: Symbolem $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})$ označíme množinu všech hodnot $\boldsymbol{f}(x)$, kde $x \in \mathbf{A}$. V souhlasu s dříve zavedeným zápisem množiny pomocí charakteristické vlastnosti pro její prvky můžeme psát

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{A}) = \{\boldsymbol{f}(x) \mid x \in \mathbf{A}\}$$

Množinu $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})$ nazýváme *oborem hodnot* funkce $\boldsymbol{f}$.

Zmíníme se dále o jednom speciálním případu, kdy prvek x definičního oboru nějaké funkce $\boldsymbol{f}$ má sám složitou strukturu v tom smyslu, že je *uspořádanou n-ticí nějakých objektů* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, což zapisujeme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*). V tomto případě nazýváme příslušnou funkci $\boldsymbol{f}$ *funkcí n proměnných* (jestliže $n > 1$, mluvíme též o *funkci více proměnných*) a její hodnotu v $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ označujeme $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. V této souvislosti poznamenejme, že budeme mluvit výhradně o uspořádaných n-ticích, takže přívlastek „uspořádaný“ budeme většinou vynechávat.

K označování funkcí se kromě stručného způsobu $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ apod., používá též obšírnějšího zápisu $y = \boldsymbol{f}(x)$,

---

*) Srovnej se zápisem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konečné neprázdné množiny, ve kterém na pořadí $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nezáleží.

$y = \boldsymbol{g}(x)$, $y = \boldsymbol{h}(x)$, apod. Obdobný způsob zápisu budeme používat v případě, že funkce bude definována pomocí nějakého „vzorce". Např. symbolem $y = x^2 + x + 1$ budeme v souhlasu s běžnou zvyklostí rozumět funkci, jejímž definičním oborem je $\mathbf{R}$, popřípadě libovolná neprázdná podmnožina $\mathbf{R}$, a která každému číslu x z definičního oboru přiřazuje číslo $x^2 + x + 1$. Předností tohoto způsobu zápisu konkrétní funkce je jednak jeho názornost, jednak to, že odpadá nutnost zavádět nový symbol. Podobně zápisem $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ budeme označovat funkci, která uspořádaným n-ticím $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel přiřazuje jejich součet $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. (Definičním oborem takové funkce je množina všech uspořádaných n-tic čísel, nebo její libovolná neprázdná podmnožina.)

Nyní zavedeme pojmy maxima a minima množiny čísel a maxima a minima funkce. Nechť je dána neprázdná množina čísel $\mathbf{M}$. Číslo a_0 nazveme *minimálním prvkem (minimem)* množiny $\mathbf{M}$, jestliže platí

1. $a_0 \in \mathbf{M}$, 2. $a_0 \leqq a$ pro všechna $a \in \mathbf{M}$

Číslo a_1 nazveme *maximálním prvkem (maximem)* množiny $\mathbf{M}$, jestliže platí

1. $a_1 \in \mathbf{M}$, 2. $a_1 \geqq a$ pro všechna $a \in \mathbf{M}$

Poznamenejme, že ani minimum ani maximum množiny čísel nemusí obecně existovat; některé příklady ukážeme v příští kapitole.

Pojmy minima a maxima funkce se definují pomocí pojmů minima a maxima množiny čísel. Nechť $\boldsymbol{f}$ je funkce definovaná na neprázdné množině $\mathbf{A}$. Obor hodnot $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})$ je rovněž neprázdná množina. Minimum množiny $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})$ potom nazýváme *minimem* (nebo *minimální hodnotou*) funkce $\boldsymbol{f}$ *na* množině $\mathbf{A}$ a maximum množiny $f(\mathbf{A})$ nazýváme *maximem* (nebo *maximální hodnotou*) funkce f *na* množině $\mathbf{A}$. V případě, že definiční obor $\mathbf{A}$ je znám z kontextu, mluvíme stručně pouze o minimu (minimální hodnotě), resp. maximu (maximální hodnotě) funkce f.

Z uvedené definice vyplývá bezprostředně, že minimum funkce f na $\mathbf{A}$ je takové číslo f_0, pro které

1. existuje $x_0 \in \mathbf{A}$ tak, že $f_0 = f(x_0)$
2. pro všechna $x \in \mathbf{A}$ platí $f(x) \geqq f(x_0)$

Analogicky platí, že maximum funkce f na $\mathbf{A}$ je takové číslo f_1, pro které

1. existuje $x_1 \in \mathbf{A}$ tak, že $f_1 = f(x_1)$
2. pro všechna $x \in \mathbf{A}$ platí $f(x) \leqq f(x_1)$

Přitom o číslech x_0 resp. x_1 říkáme, že f *nabývá v* x_0 (nebo *pro* x_0) svého minima, a f *nabývá v* x_1 (nebo *pro* x_1) svého maxima.

Podobně jako v případě množin čísel, nemusí obecně existovat ani minimum ani maximum funkce. Minimum funkce f na $\mathbf{A}$ budeme označovat symbolem

$$\min_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

a maximum f na $\mathbf{A}$

$$\max_{x \in \mathbf{A}} f(x)$$

V případě, že minimum (resp. maximum) funkce f na $\mathbf{A}$ existuje, platí podle našich definic vztahy

$$\min_{x \in \mathbf{A}} f(x) = \min f(\mathbf{A}) = \min \{f(x) \mid x \in \mathbf{A}\}$$

resp.

$$\max_{x \in \mathbf{A}} f(x) = \max f(\mathbf{A}) = \max \{f(x) \mid x \in \mathbf{A}\}$$

Minimum a maximum funkce se souhrnně nazývají jejími *extrémy*.

Nyní, když jsme zavedli pojem extrému funkce a řadu pojmů s ním souvisejících, budeme schopni přesněji než na začátku kapitoly zformulovat, co rozumíme extremálním problémem.

Nechť je dána funkce f definovaná na neprázdné množině $\mathbf{A}$. *Úlohou určení minima* funkce f se obvykle rozumí problém určení min $\{f(x)|x \in \mathbf{A}\}$ a dále alespoň jednoho prvku x_0, pro který nabývá f svého minima (popř. všech prvků, pro něž f nabývá svého minima). Analogicky *úlohou určení maxima* funkce f se rozumí problém určení max $\{f(x)|x \in \mathbf{A}\}$, a dále alespoň jednoho prvku x_1, pro který nabývá f svého maxima (popř. všech prvků, pro něž nabývá f svého maxima). V tomto ne zcela jednoznačně vymezeném smyslu budeme chápat úlohu určení minima i úlohu určení maxima též v naší knížce. Přitom nám zpravidla půjde o nalezení pouze jednoho prvku (libovolného), pro který funkce nabývá svého extrému, pokud ovšem nebude výslovně řečeno něco jiného.

Obě zformulované úlohy zahrnujeme společným názvem — *extremální problém (extremální úloha)*. Přitom prvek, ve kterém funkce nabývá svého extrému, se nazývá *řešením* extremálního problému.

Příští kapitola má rovněž ještě pomocný charakter. Uvádíme v ní některé elementární vlastnosti číselných množin a funkcí, které budeme při výkladu metody dynamického programování potřebovat.