Druhý výlet do moderní matematiky

1. kapitola. Relace

In: Jan Vyšín (author); Jitka Kučerová (author): Druhý výlet do moderní matematiky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 7–50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403783

1. kapitola

RELACE

1.1. Binární relace

Abychom si mohli vysvětlit, co znamená „relace v množině $\boldsymbol{M}$“, musíme si připomenout, co je kartézský součin množin $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$. Definujeme si ho jako množinu všech uspořádaných dvojic $[x; y]$; jejich první složka x je prvkem množiny $\boldsymbol{M}_1$ a druhá složka y je prvkem množiny $\boldsymbol{M}_2$. Je-li na příklad množina $\boldsymbol{M}_1 = \{a, b, c, d\}$ a množina $\boldsymbol{M}_2 = \{A, B, C\}$, pak kartézský součin $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 = \{aA, aB, aC, bA, bB, bC, cA, cB, cC\}$. Dvojice bychom měli zapisovat správně např. $[a; B]$, smíme však psát pouze aB, jestliže vynecháním závorek a středníku nemůže dojít k nedorozumění.

Kartézský součin znázorníme nejlépe tabulkou:

$\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$	$\boldsymbol{M}_1 \backslash \boldsymbol{M}_2$	A	B	C
	a	aA	aB	aC
	b	bA	bB	bC
	c	cA	cB	cC
	d	dA	dB	dC

$M_2 \times M_1$	M_2 \ M_1	a	b	c	d
	A	Aa	Ab	Ac	Ad
	B	Ba	Bb	Bc	Bd
	C	Ca	Cb	Cc	Cd

Srovnáním tabulky č. 1 a č. 2 zjistíme, že v našem případě množiny $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$ nemají stejné prvky. Pokud totiž $a \neq A$, jsou uspořádané dvojice $[aA]$ a $[Aa]$ různé.

Je tedy $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$ a říkáme, že kartézské násobení není komutativní. Předpokládáme-li, že množiny M_1 a M_2 nemají žádný společný prvek (jsou disjunktní), pak jsou disjunktní i množiny $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$. Společné prvky v množinách, které kartézsky násobíme, utvoří i stejné dvojice v množinách $M_1 \times M_2$ a $M_2 \times M_1$.

Jestliže $M_1 = M_2$, pak také $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$ a v tomto případě je kartézské násobení komutativní. $M_1 = \{Michal, Petr, Rudolf\}$. $M_2 = \{M, P, R\}$. Vytvoříme množinu $M_1 \times M_2$ dvojic [*křestní jméno; příjmení*]: *Michal M.*, *Petr M.*, *Rudolf M.*, *Michal P.*, atd. Množina $M_2 \times M_1$ má dvojice *M. Michal*, *M. Petr* ... atd.

Jestliže prvky M, P, R množiny M_1 považujeme za zkratky jmen *Michal*, *Petr* a *Rudolf*, je skutečně $M_1 \times \times M_2 = M_2 \times M_1$.

Následující tabulka dává přehled o pěti přátelích (*Jiří*, *Pavel*, *Eva*, *Marta*, *Vít*), kteří znají různé světové jazyky (*angličtinu*, *francouzštinu*, *němčinu* a *ruštinu*).

Osoba \ Jazyk	*angličtina*	*francouz.*	*němčina*	*ruština*
Jiří	○		○	
Pavel		○		○
Eva	○		○	○
Marta		○		
Vít	○		○	○

Kroužek v poli znamená, že osoba „v řádku" zná jazyk „ve sloupci".

Množinu pěti přátel označíme $\boldsymbol{M}_1 = \{J, P, E, M, V\}$,
množinu jazyků označíme $\boldsymbol{M}_2 = \{a, f, n, r\}$.

Z tabulky můžeme vypsat množinu

$\boldsymbol{R} = \{Ja, Jn, Pf, Pr, Ea, En, Er, Mf, Va, Vn, Vr\}$.

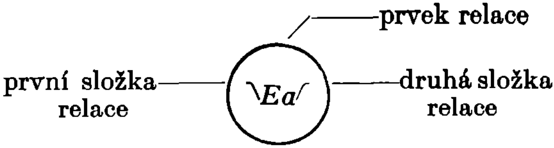
Dvojice Ja znamená, že *Jiří* zná *anglicky*. Množina $\boldsymbol{R}$ se skládá ze všech dvojic (jméno a jazyk), mezi kterými byl určitý vztah (cizím slovem relace), který jsme popsali slovem „zná".

Máme dvě základní množiny $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$. **Binární relace $\boldsymbol{R}$ z množiny $\boldsymbol{M}_1$ do množiny $\boldsymbol{M}_2$** *je tvořena jistými dvojicemi z kartézského součinu* $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$, *je to tedy*

podmnožina kartézského součinu $\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2$.

Slovo binární (česky dvojčlenná) budeme vynechávat, protože o jiných relacích nebudeme hovořit. Také českého slova „vztah" nebudeme užívat.

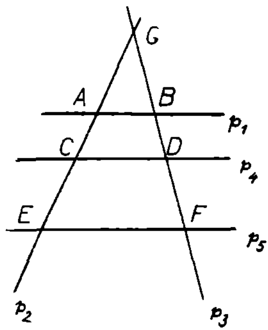
Názvy (podle předchozího přehledu):



Je-li $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2$, říkáme stručně:

relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}_1$

Místo zápisu $[x, y] \in \boldsymbol{R}$ píšeme někdy $x \boldsymbol{R} y$.



Obr. 1

PŘÍKLAD 1,1

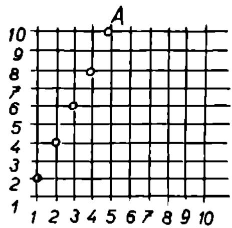
Na obr. 1 je zakresleno 5 přímek ($p_1 \parallel p_4 \parallel p_5$). Množina $\boldsymbol{Z} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{Z}$ se skládá ze všech dvojic přímek, které se protínají; přesněji

$$\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \mid \text{přímka } x \text{ protíná přímku } y\}.$$

Je tedy $\boldsymbol{R} = \{p_1p_2, p_1p_3, p_2p_1, p_2p_3, p_2p_4, p_2p_5, p_5p_2,$

$p_3p_1, p_3p_2, p_3p_4, p_3p_5, p_4p_3, p_4p_2, p_5p_3\}.$

Množina $\boldsymbol{R}$ (relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{Z}$) má 14 prvků; skurečně na obr. 1 najdeme 7 průsečíků; v množině $\boldsymbol{R}$ je každý průsečík zapsán dvakrát — přímka p_1 protíná přímku p_2 v bodě A (dvojice $[p_1p_2]$) a přímka p_2 protíná přímku p_1 rovněž v bodě A (dvojice $[p_2p_1]$).



Obr. 2

PŘÍKLAD 1,2

Množina $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relace $\boldsymbol{Q}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je množina všech takových dvojic z $\boldsymbol{M} \times \times \boldsymbol{M}$, kde druhá složka je dvojnásobkem první:

$$\boldsymbol{Q} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid y = 2x\},$$

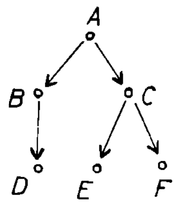
$$\boldsymbol{Q} = \{[1; 2], [2; 4], [3; 6], [4; 8], [5; 10]\}.$$

Kartézský graf relace $\boldsymbol{Q}$ je na obr. 2 (prvky jsou označeny kroužky). Bod A je obrazem dvojice $[5; 10]$.

PŘÍKLAD 1,3

Děd A má syny B a C. B je otcem syna D, C je otcem dvou dětí E, F. V množině $\boldsymbol{M} = \{A, B, C, D, E, F\}$. Sestrojíme relaci $\boldsymbol{R}$, která je složena ze všech takových dvojic $[x, y]$, pro něž platí „x je přímým předkem y“. (Přímý předek znamená otec nebo děd.)

$$\boldsymbol{R} = \{AB, AC, AD, AE, AF, BD, CE, CF\}.$$



Obr. 3

Tuto relaci znázorníme tzv. stromem (obr. 3).

„x je přímým předkem y“, právě když x a y jsou spojeny neklesající čarou a zároveň x je „výše“ než y, např. A je přímý předek B, C, D, E, F; B je přímý předek D.

PŘÍKLAD 1,4

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel (bez nuly). Relace $\boldsymbol{R}_1$ v množině $\boldsymbol{N}$ se skládá z takových dvojic $[x; y]$, kde x a y dávají po dělení dvěma týž zbytek.

Množina $\boldsymbol{N}$ je nekonečná množina a rovněž relace $\boldsymbol{R}_1$ má nekonečně mnoho prvků; patří do ní např. dvojice $[1, 3]$, $[2, 6]$, $[6, 18]$, $[8, 14]$, $[19, 25]$, $[31, 19]$, $[19, 19]$ atd.

(obě složky jsou buď liché nebo sudé — říkáme, že mají stejnou paritu).

Do relace $\boldsymbol{R}_2$ v množině $\boldsymbol{N}$ patří všechny dvojice $[x; y]$ takové, že x a y dávají stejný zbytek při dělení třemi. Do $\boldsymbol{R}_2$ patří např. [*1*, *4*], [*2*, *14*], [*6*, *18*], [*5*, *26*], [*31*, *19*], [*19*, *19*], [*6*, *18*], [*8*, *14*], [*9*, *30*] atd.

Utvoříme průnik $\boldsymbol{R}_1 \cap \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_3$. Do množiny $\boldsymbol{R}_3$, která je rovněž relací v množině $\boldsymbol{N}$, patří všechny dvojice, které dávají stejný zbytek při dělení šesti, např. [*6*, *18*], [*8*, *14*], [*31*, *19*], [*19*, *49*] atd.

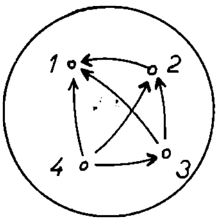
Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je podmnožina kartézského součinu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ a můžeme při jejím zobrazení použít Vennova diagramu.

PŘÍKLAD 1,5

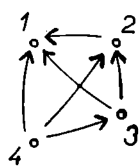
V množině $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ utvořme relaci $\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x > y\}$ (první složka je větší číslo než číslo ve složce druhé).

$$\boldsymbol{R} = \{[2, 1], [3, 2], [3, 1], [4, 3], [4, 2], [4, 1] .$$

Vennův diagram relace **$\boldsymbol{R}$** je na obr. 4.



Obr. 4



Obr. 5

Šipka jde vždy od bodu, který znázorňuje první složku dvojice k bodu, který znázorňuje druhou složku dvojice.

Hranici množiny $\boldsymbol{M}$ někdy vynecháváme a dostaneme tzv. uzlový graf relace $\boldsymbol{R}$ jako na obr. 5.

Patří-li do nějaké relace na příklad dvojice $[a; b]$ a $[b; a]$, znázorníme to jako na obr. 6a nebo 6b.

Obr. 6a, b

Obr. 7

Patří-li do relace dvojice $[a; a]$, znázorníme to jako na obr. 7.

Je dána relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$. *Jestliže vyměníme pořadí složek ve všech dvojicích, které patřily relaci* $\boldsymbol{R}$, *vznikne relace* $\overline{\boldsymbol{R}}$ *(*$\boldsymbol{R}$ *s pruhem), která se nazývá* **inverzní k dané relaci** $\boldsymbol{R}$. (Místo $\overline{\boldsymbol{R}}$ se někdy píše $\boldsymbol{R}^{-1}$.)

PŘÍKLAD 1,6

Množina $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 4, 5\}$.

Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$:

$\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x \geqq y\}$.

$\boldsymbol{R} = \{[2, 2], [3, 2], [3, 3], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5]\}$.

$\overline{\boldsymbol{R}} = \{[2, 2], [2, 3], [3, 3], [2, 4], [3, 4], [4, 4], [2, 5], [3, 5], [4, 5], [5, 5]\}$.

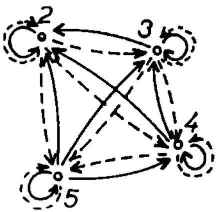
Můžeme zapsat $\overline{\boldsymbol{R}} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid x \leqq y\}$.

Uzlový graf relací $\boldsymbol{R}$ a $\overline{\boldsymbol{R}}$ je na obr. 8.

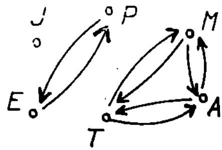
Dvojice patřící relaci $\boldsymbol{R}$ jsou vytaženy plně, dvojice patřící relaci $\overline{\boldsymbol{R}}$ čárkovaně.

Obsahuje-li relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ dvojici $[x, x]$, pak $\overline{\boldsymbol{R}}$ obsahuje rovněž dvojici $[x, x]$.

Jestliže platí $\boldsymbol{R} = \overline{\boldsymbol{R}}$, *pak říkáme, že* **relace** $\boldsymbol{R}$ *v množině* $\boldsymbol{M}$ je **symetrická.**



Obr. 8



Obr. 9

PŘÍKLAD 1,7

Na výlet jelo 6 dětí: Jan, Petr, Michal, Tomáš, Alena a Eva.

$\boldsymbol{M} = \{J, P, M, T, A, E\}$. Tomáš a Alena jsou dvojčata a Michal jejich starší bratr. Eva je Petrovou sestrou. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je množinou těch dvojic $[x, y]$, kde „y je sourozencem x".

$\boldsymbol{R} = \{TA, AT, TM, MT, AM, MA, EP, PE\}$.

Relace $\overline{\boldsymbol{R}}$ obsahuje stejné dvojice jako relace $\boldsymbol{R}$.

Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ je symetrická (viz obr. 9).

V uzlovém grafu symetrické relace jsou všechny dvojice spojeny šipkami v obou směrech. (Může tam být i symbol ↻ — viz obr. 7.)

Tabulkový graf symetrické relace (viz obr. 10) je souměrný podle osy o.

o	J	P	M	T	A	E
J						
P						o
M				o	o	
T			o		o	
A			o	o		
E		o				

Obr. 10

Pamatujte si:

Relace z množiny M_1 do množiny M_2
Relace v množině M

Relaci znázorňujeme: a) tabulkou
b) kartézským grafem
c) stromem
d) uzlovým grafem

Relace inverzní k dané relaci
Relace symetrické

Cvičení:

1. **Množina M se skládá z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Víme, že kartézský součin $M \times M$ se skládá ze 100 dvojic 11,** 12, 13, ... Zapište všechny tyto dvojice x, y z množiny $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ mezi jejichž složkami x, y je tento vztah:

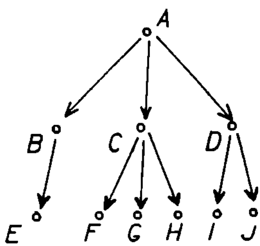
a) obě čísla x, y dávají při dělení třemi týž zbytek (mezi vypsanými dvojicemi budou např. 58, 69);

b) obě čísla x, y dávají při dělení sedmi týž zbytek;

c) pro čísla x, y platí $x \cdot y = 8$;

d) pro čísla x, y platí $y = 2x - 1$.

2. $\boldsymbol{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M}$ se skládá ze všech takových dvojic xy, kde x je násobkem téhož přirozeného



Obr. 11

čísla z $\boldsymbol{M}$ (různého od *1*) jako číslo y. Např. $[6, 4] \in \boldsymbol{R}$, protože číslo *6* je násobkem čísla *2* a číslo *4* je rovněž násobkem čísla *2*. Zapište všechny dvojice kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, z nichž se skládá relace $\boldsymbol{R}$. Znázorněte relaci $\boldsymbol{R}$ pomocí šachovnice o 36 polích.

3. Množina $\boldsymbol{M}$ je táž jako v předcházející úloze. Relace $\boldsymbol{S}$ v množině $\boldsymbol{M}$ se skládá ze všech takových dvojic xy, kde čísla x, y jsou nesoudělná (tj. jejich největší společný dělitel je 1). Např. $[5, 6] \in \boldsymbol{S}$, neboť číslo 5 je násobkem čísla 1 a 5 a číslo 6 je násobkem čísel 1, 2, 3 a 6, takže největší společný dělitel čísel 5 a 6 je 1.

a) Zapište všechny dvojice kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, z nichž se skládá relace $\boldsymbol{S}$.

b) Jaký je vztah mezi relací $\boldsymbol{S}$ a relací $\boldsymbol{R}$ z předcházející úlohy?

4. Strom na obr. 11 znázorňuje rodokmen. Osoby jsou označeny písmeny; dvě „osoby“ spojené úsečkou jsou otec — syn (resp. syn — otec).

a) V množině $\boldsymbol{M}$ všech osob z obr. 11 zavedeme relaci $x \boldsymbol{R} y$: „x je blízký příbuzný y“, právě když lze spojit osoby x, y jednou nebo dvěma úsečkami. Vypište tuto relaci.

b) Opakujte úlohu a) pro ten případ, kdy je relace $x \boldsymbol{R} y$ dána tím, že osobu x lze spojit s osobou y jednou až třemi úsečkami.

	A	B	C	D
A		o	o	
B				
C				
D	o	o		

	A	B	C	D
A	o			
B		o		
C			o	
D				o

	A	B	C	D
A				
B		o		
C		o		o
D				o

	A	B	C	D
A				o
B			o	
C		o		
D	o			

Obr. 12a, b, c, d

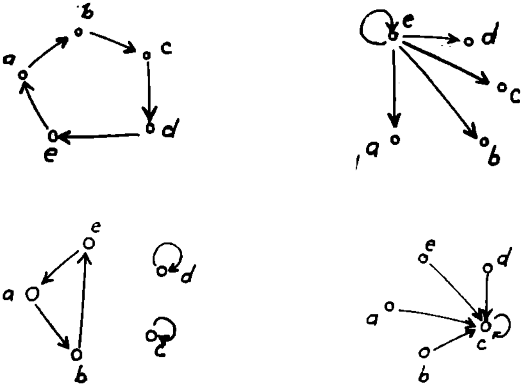
5. $\boldsymbol{M} = \{$*ČSSR, Maďarsko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, SSSR*$\}$. Z kartézského součinu $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ utvořte relaci $\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}\,;\, x$ sousedí s $y\}$.

6. $\boldsymbol{M}$ je množina dětí, které stojí v kruhu a hází si míčem; jsou to děti Pavel, Olga, Marcela, Radek a Láďa; $\boldsymbol{M} = \{P, O, M, R, L\}$. Pavel hází jen Marcele a Radkovi. Olga nikdy nehází Pavlovi a Radkovi, Láďa hází všem čtyřem zbývajícím. Marcela i Radek hází všem mimo Láďu a Olgu. V množině $\boldsymbol{M}$ zavedeme relaci „hráč x hází hráči y“.

a) Sestavte tabulku, tj. kartézský graf.
b) Znázorněte danou relaci Vennovým diagramem.

7. Znázorněte pomocí uzlového i kartézského grafu relace z obr. 12a, b, c, d.

8. Relace znázorněné pomocí uzlového grafu znázorněte kartézským grafem! (Obr. 13a, b, c, d)



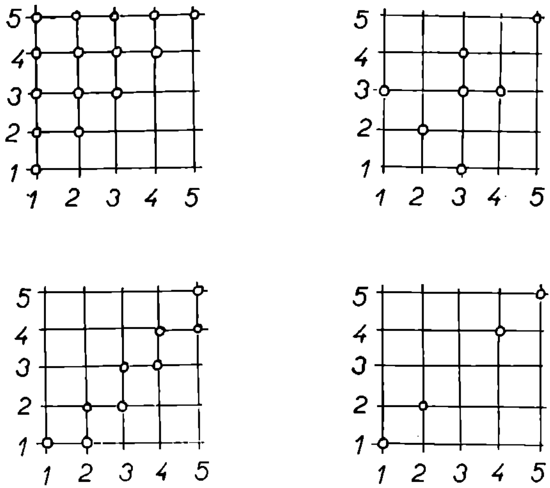
Obr. 13a, b, c, d

9. Relace znázorněné pomocí kartézského grafu znázorněte uzlovým grafem! (Obr. 14a, b, c, d)

10. Znázorněte kartézským grafem relaci $x\,\boldsymbol{R}\,y$ v množině $\boldsymbol{M}$, kde $y = x + 1$ nebo $y = x - 1$. Množina $\boldsymbol{M}$ je množina všech desetinných čísel. Odhadněte, co bude kartézský graf relace $\boldsymbol{R}$!

11. Relace $x\,\boldsymbol{R}\,y$ v množině $\boldsymbol{M}$ všech přirozených čísel se skládá ze všech dvojic $[x, y]$, pro něž platí, že $1 + \dfrac{4}{x - 2}$ je přirozené číslo. Vypište relaci $\boldsymbol{R}$ a znázorněte ji Vennovým diagramem i kartézským grafem!

12. Pan Novák měl syny Jana, Karla a Emila. Jan měl pouze syna Martina a vnuka Václava. Karel měl dva syny — Bedřicha a Petra. Emil neměl děti. Zapište relaci $\boldsymbol{R}$ „A je otcem B“ a utvořte relaci inverzní k $\boldsymbol{R}$. Zakreslete obě relace stromem!



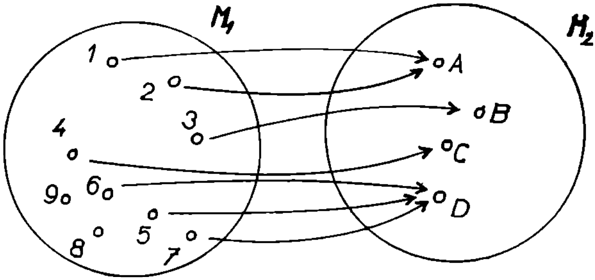
Obr. 14a, b, c, d

1.2. Zobrazení

Zobrazení $\boldsymbol{Z}$ v množině $\boldsymbol{M}$ *je každá taková relace* $\boldsymbol{R}$ *v množině* $\boldsymbol{M}$, *že každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *je první složkou nejvýše jedné dvojice z* $\boldsymbol{R}$.

PŘÍKLAD 1,8

Na hřišti si hrají děti (množina $\boldsymbol{M}_1$) a na lavičkách sedí maminky a dávají na ně pozor (množina $\boldsymbol{M}_2$). Domů odcházejí některé děti se svou maminkou (množina $\boldsymbol{R}$), jiné děti jdou domů samy.



Obr. 15

Situaci zakreslíme pomocí Vennova diagramu a šipkou naznačíme, které děti odcházely domů s maminkami (obr. 15).

Množina $\boldsymbol{R} = \{1A, 2A, 3B, 4C, 5D, 6D, 7D\}$. V každé dvojici je prvek množiny $\boldsymbol{M}_1$ nejvýš jednou (každé dítě má na hřišti nejvýš jednu maminku) a relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}_1 \cup \boldsymbol{M}_2$.

PŘÍKLAD 1,9

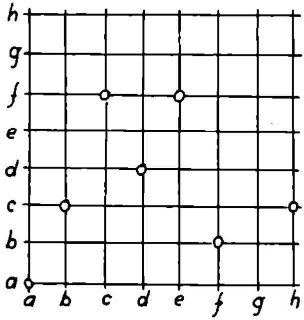
Množina $\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.
Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{M} : \boldsymbol{R} = \{aa, bc, cf, dd, ef, fb, hc\}$.
Relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$, protože žádné dvě dvojice z $\boldsymbol{R}$ nemají stejnou první složku.

Kartézský graf relace **R** (obr. 16).

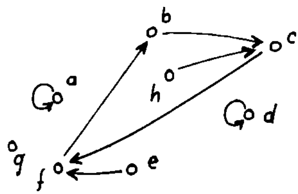
Dvojice jsou označeny kroužky a žádné dva kroužky neleží na téže svislé přímce (na vodorovné přímce může ležet libovolný počet kroužků).

Uzlový graf relace **R** (obr. 17).

Z každého kroužku vychází nejvýš jedna šipka.



Obr. 16



Obr. 17

Relaci v množině **M**, která je zobrazením, označujeme zpravidla písmenem **Z** (nemůže zde dojít k záměně se základní množinou — tu totiž představuje množina **M**).

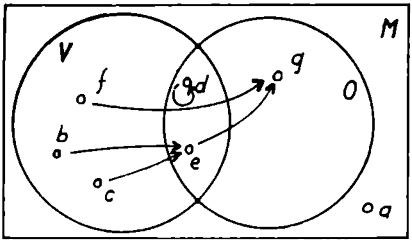
První složce ve dvojici říkáme **vzor**, druhé složce říkáme **obraz**.

Množinu všech vzorů zobrazení **Z** v množině **M** označíme **V**, množinu všech obrazů **O**. $(\boldsymbol{V} \cup \boldsymbol{O}) \subset \boldsymbol{M}$.

PŘÍKLAD 1,10

Vennův diagram na obr. 18 znázorňuje zobrazení v množině **M**. Zapište množiny **M**, **Z**, **V**, **O**.

$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.
$\boldsymbol{Z} = \{be, ce, dd, eg, fg\}$.
$\boldsymbol{V} = \{b, c, d, e, f\}$.
$\boldsymbol{O} = \{d, e, g\}$.



Obr. 18

PŘÍKLAD 1,11

$\boldsymbol{N}$ je množina všech přirozených čísel. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{R} = \{[x, y] \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid y = x^2\}$. (Druhá složka dvojice je druhou mocninou první složky.)

$\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{N}$. Do množiny vzorů patří všechna přirozená čísla, tj. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{N}$.

Do množiny obrazů patří pouze dvojmoci přirozených čísel: 1, 4, 9, 16, 25 ...

$$\boldsymbol{O} \subset \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{O}.$$

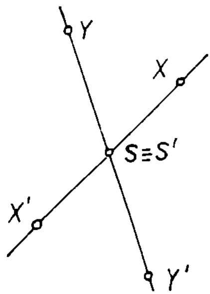
PŘÍKLAD 1,12

$\boldsymbol{M}$ je množina všech bodů v rovině ϱ. Je dán pevný bod S v rovině ϱ. Ke každému bodu $X \neq S$ sestrojíme bod X' tak, že X' leží na polopřímce opačné k SX

a $SX' = SX$. Pro bod S platí, že $S' = S$ (obr. 19). Všechny dvojice bodů XX' v rovině ϱ tvoří relaci v množině $\boldsymbol{M}$, která je zobrazením.

Platí $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{V}$.

Ke každému bodu X (vzoru) přísluší právě jeden bod X' (obraz). Toto zobrazení, známé ze školské geometrie, se nazývá **středová souměrnost.**



Obr. 19

K relaci $\boldsymbol{R}$ v rovině $\boldsymbol{M}$ utvoříme inverzní relaci $\overline{\boldsymbol{R}}$. Jestliže v relaci $\boldsymbol{R}$ bylo y druhou složkou právě jedné dvojice, je $\overline{\boldsymbol{R}}$ zobrazení.

PŘÍKLAD 1,13

Množina $\boldsymbol{M} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Relace $\boldsymbol{R}_1 = \{[x, y] \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M} \mid y = x^2\}$

$$\boldsymbol{R}_1 = \{[-1, 1], [0, 0], [1, 1], [2, 4]\}.$$

$\boldsymbol{R}_1$ je zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

$$\overline{\boldsymbol{R}}_1 = \{[1, -1], [0, 0], [1, 1], [4, 2]\}.$$

$\overline{\boldsymbol{R}}_1$ není zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

b) Relace $R_2 = \{[x, y] \in M \times M \mid x = |y|\}$. (První složka je absolutní hodnota složky druhé.)

$R_2 = \{[1, -1], [0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$. R_2 není zobrazení v množině M.

$\overline{R}_2 = \{[-1, 1], [0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4]\}$. $\overline{R}_2$ je zobrazení v množině M.

c) Relace $R_3 = \{[x, y] \in M \times M \mid y = x + 1\}$.

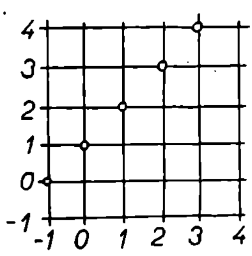
$R_3 = \{[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]\}$. R_3 je zobrazení v množině M.

$\overline{R}_3 = \{[0, -1], [1, 0], [2, 1], [3, 2], [4, 3]\}$. $\overline{R}_3$ je zobrazení v množině M.

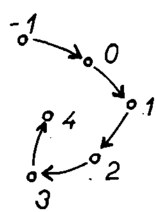
Jestliže v relaci R *v množině* M *je každý prvek* x *první složkou právě jedné dvojice z* R *a prvek* y *druhou složkou právě jedné dvojice z* R, *pak relace* R *se nazývá* **prosté zobrazení v množině** M. Prostým zobrazením je např. relace R_3 z příkladu 1,13.

Kartézský graf prostého zobrazení R_3 v množině M je na obr. 20.

Na každé svislé i vodorovné lince grafu leží nejvýše jeden kroužek.



Obr. 20



Obr. 21

Uzlový graf prostého zobrazení $\boldsymbol{R}_3$ v množině $\boldsymbol{M}$ je na obr. 21.

Z každého kroužku vychází nejvýš jedna šipka a do každého kroužku směřuje nejvýš jedna šipka.

Pamatujte si:

Zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$ je zvláštní případ relace v množině $\boldsymbol{M}$.

Prosté zobrazení v množině $\boldsymbol{M}$.

Cvičení

1. Osm žáků z různých obcí si dopisuje. Relace $\boldsymbol{R}$ je tvořena všemi dvojicemi žáků, z nichž první psal druhému v lednu 1971. V tomto měsíci mají odeslat tito žáci celkem 7 dopisů. Sestavte plán dopisování tak, aby relace $\boldsymbol{R}$ byla zobrazení a znázorněte ji

a) uzlovým grafem,
b) kartézským grafem,
c) opakujte úlohu pro 8 a 9 dopisů.

2. Na výlet šla šestičlenná společnost: babička z otcovy strany (b), otec (o), matka (m), jejich syn (s), matčina sestra — teta (t) a její dcera (d).

a) Relace $\boldsymbol{R}_1$ je tvořena dvojicemi xy, z nichž x je osoba starší generace, y mladší generace. Vypište relaci $\boldsymbol{R}_1$ a znázorněte ji kartézským grafem.

b) Relace $\boldsymbol{R}_2$ je tvořena všemi dvojicemi xy, kde osoba x je některý z rodičů osoby y. Rozhodněte, která z relací $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ je zobrazení.

Vypište relaci $\boldsymbol{R}_2$ a znázorněte ji kartézským grafem.

3. $\boldsymbol{M}$ je množina všech přirozených čísel. Ke každému číslu $x \in \boldsymbol{M}$ vypočtěte číslo y takto: číslo $6x$ dělte sedmi; k podílu p najděte nejbližší přirozené číslo $y \geqq p$.

Příklad: $x = 3$, $6x = 18$; $18 : 7 = 2{,}55\ldots$, $y = 3$.

a) Doplňte tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y												

b) Všechny dvojice $[xy|]$ tvoří relaci $\boldsymbol{R}$ v $\boldsymbol{M}$. Ověřte, že relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení a určete množinu jeho vzorů i množinu jeho obrazů.

c) Znázorněte relaci $\boldsymbol{R}$ kartézským grafem.

4. Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M, který nenáleží žádné z nich. Bod $X \in p$ spojíme s bodem M přímkou $\overleftrightarrow{MX}$ a určíme průsečík $Y = q \cap \overleftrightarrow{MX}$. Relace $\boldsymbol{R}$ se skládá ze všech takových dvojic $[X, Y]$.

a) Sestrojte několik dvojic $[XY] \in \boldsymbol{R}$.

b) Ověřte, že relace $\boldsymbol{R}$ je zobrazení v množině $p \cup q$. Určete množinu $\boldsymbol{V}$ jeho vzorů a množinu $\boldsymbol{O}$ jeho obrazů. Je zobrazení $\boldsymbol{R}$ prosté?

5. Množina $\boldsymbol{M}$ je rovina bodů, v ní je vyznačen pevný bod S. Relace je zavedena takto: obsahuje dvojici SS a dále všechny dvojice XX', pro které platí $X' \in \overrightarrow{SX}$, $SX' = 2.SX$.

a) Nakreslete náčrtek (bod S, body X, Y, Z a X', Y', Z').

b) Popište, jak k danému bodu X' sestrojíme bod X. Rozhodněte, zda tato relace je zobrazení, případně prosté zobrazení!

6. V množině $\boldsymbol{N}_0$ všech přirozených čísel definujeme zobrazení $\boldsymbol{Z} = \{[x, y]\}$, kde je y zbytek, který dostaneme, dělíme-li číslo x^2 číslem $x + 2$. Vyplňte tabulku:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	...
$x + 2$											
x^2											
zbytek											

Vyslovte domněnku o zbytku. Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$.

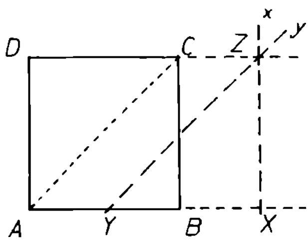
7. Znak $\langle x \rangle$, čteme: „celá část z x“ a rozumíme tím největší přirozené číslo y, pro které platí $y \leqq x$.

a) Vyplňte tabulku:

x	0	$\frac{1}{2}$	$0{,}69$	1	$\frac{3}{2}$	$1{,}999$	$\frac{6}{3}$	$7{,}1$	$20{,}001$
$\langle x \rangle$	0			1					

b) Nakreslete kartézský graf zobrazení $\{[x; \langle x \rangle]\}$.

c) Udejte množinu vzorů i množinu obrazů. Je zobrazení prosté?



Obr. 22

8. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině všech přirozených čísel je množina všech dvojic $[x; y]$, kde y je zbytek po dělení čísla x číslem 7.

a) Doplňte tabulku:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13	20	21	24	37	95
y																	

b) Sestrojte graf relace (pro $x = 0$ až $x = 10$), rozhodněte, zda je to zobrazení, zda je prosté či nikoli.

9. Je dána úsečka PM, která má délku 6 cm, $\boldsymbol{M} = \overrightarrow{PM}$. Relace $\boldsymbol{R}$ v množině $\overrightarrow{PM}$ se skládá ze všech dvojic XY, které splňují podmínku $PX + PY = 6$ cm.

a) Doplňte tabulku:

PX	0	1	3	$4{,}5$	5	6	7	8
PY								

b) Narýsujte polopřímku $\overrightarrow{PM}$ a vyznačte všecky dvojice XY, které splňují podmínku a pro něž jsou vzdálenosti PX, PY uvedeny v tabulce.

c) Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$. Zjistěte, zda je zobrazení $\boldsymbol{Z}$ prosté.

10. Množina $\boldsymbol{M}$ je přímka $p = \overleftrightarrow{AB}$ (jako množina bodů), $ABCD$ je čtverec. Relace $\boldsymbol{R}$ v přímce p se skládá ze všech dvojic bodů XY vytvořených takto:

$X \in x, \quad x \parallel \overleftrightarrow{BC}, \quad Z = x \cap \overleftrightarrow{CD}$

$Z \in y, \quad y \parallel \overleftrightarrow{AC}, \quad Y = y \cap p$ (obr. 22)

Odůvodněte, že $\boldsymbol{R}$ je zobrazení prosté v p. Určete množinu vzorů $\boldsymbol{V}$ a množinu obrazů $\boldsymbol{O}$ zobrazení $\boldsymbol{R}$.

1.3. Permutace

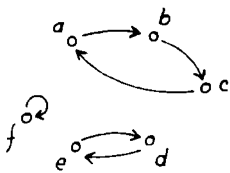
Permutace množiny $\boldsymbol{M}$ *je takové prosté zobrazení v množině* $\boldsymbol{M}$, *při kterém množina* $\boldsymbol{M}$ *je zároveň množinou všech vzorů* $\boldsymbol{V}$ *i množinou všech obrazů* $\boldsymbol{O}$, tj. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{M}$. *V permutaci* $\boldsymbol{P}$ *je každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *první složkou jediné dvojice z* $\boldsymbol{P}$ *a druhou složkou jediné dvojice z* $\boldsymbol{P}$.

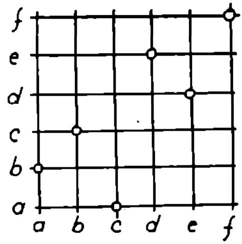
PŘÍKLAD 1,14

$\boldsymbol{M} = \{a, b, c, d, e, f\}$

$\boldsymbol{P} = \{ab, bc, ca, de, ed, ff\}$

Uzlový graf permutace ***P*** Kartézský graf permutace ***P***





Obr. 23a, b

Z každého kroužku právě jedna šipka vychází a právě jedna k němu směřuje.

V každé vodorovné i svislé lince grafu je právě jeden kroužek.

Permutaci ***P*** konečné množiny ***M*** zapisujeme také tabulkou upravenou do dvouřádkového schematu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & a & e & d & f \end{Bmatrix}$$

Permutace ***P*** v množině ***M*** je prosté zobrazení.

PŘÍKLAD 1,15

Zjistěte všechny možné permutace množiny $\boldsymbol{M} = \{a, b, c\}$.

Abychom žádnou permutaci nevynechali, postupujeme nejlépe takto:

a) Prvku a je přiřazen prvek a a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{Bmatrix}$$

b) Prvku a je přiřazen prvek b a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_4 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{Bmatrix}$$

c) Prvku a je přiřazen prvek c a pak jsou dvě možnosti

$$\boldsymbol{P}_5 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_6 = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{Bmatrix}$$

Celkem jsme dostali šest permutací. Všimněte si, že druhé řádky ve schematech jsou všechna možná pořadí tří prvků a počet permutací je roven 3! (tři faktoriál): $3! = 3 . 2 = 6$.

Prvek, který splyne se svým obrazem v permutaci, se nazývá samodružným prvkem této permutace. Např. a je samodružný prvek $\boldsymbol{P}_1$, b je samodružný prvek permutace $\boldsymbol{P}_6$. Permutace $\boldsymbol{P}_1$ má všechny prvky samodružné a jmenuje se **identita.**

Ukázali jsme si dva příklady permutací konečných množin. S permutacemi nekonečných množin se setkáme v dalším článku.

Pamatujte si:

Permutace je zvláštní případ prostého zobrazení.

Počet všech permutací v množině, která má n prvků, je $n!$ (n faktoriál).

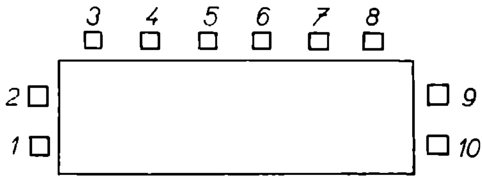
Cvičení

1. Vypište všecka čtyřciferná čísla, která můžete napsat pomocí cifer *3, 4, 7, 9.*

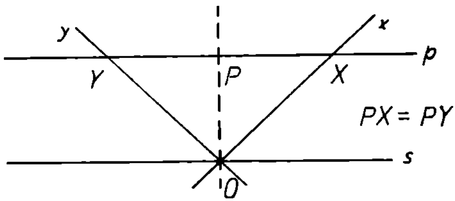
2. Stará známá historka: Deset lupičů odsouzených k smrti vysloví před popravou své poslední přání: aby mohli před smrtí zasednout ke stolu a vystřídat všechna možná rozsazení (obr. 24).

a) Vypočtěte kolik je možných rozsazení.

Uvažujte: na židli 1 zasedne kterýkoli z 10 lupičů, na židli 2 kterýkoli z 9 zbývajících, na židli 3 kterýkoli z 8 zbývajících atd.



Obr. 24



Obr. 25

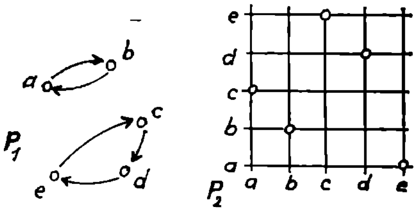
b) Vypočtěte, jak dlouho trvalo vyplnění „posledního přání“, když na jedno rozsazení potřebovali lupiči jen 2 minuty.

3. ***M*** je množina všech přímek, které obsahují bod O (obr. 25). Relace v množině ***M*** se skládá ze všech dvojic přímek yx, vytvořených tak, že $PX = PY$ a z dvojice $[s, s]$. Odůvodněte, že ***R*** je permutací množiny ***M*** a najděte její samodružné prvky.

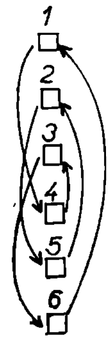
4. Permutace $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ množiny $\{a, b, c, d, e\}$ jsou znázorněny uzlovým a kartézským grafem (obr. 26a, b).

Zapište P_1, P_2 dvojřádkovými schematy a znázorněte P_1 kartézským grafem, P_2 uzlovým grafem.

5. Kolik čtyřciferných čísel s různými ciframi lze utvořit z číslic *2, 4, 6, 8, 9*? (Návod: Utvořte nejprve všecky čtyřprvkové podmnožiny množiny $\{2, 4, 6, 8, 9\}$.)



Obr. 26a, b



Obr. 27

6. **Hra.** Šest žáků stojí v zástupu. Na dané znamení se přemístí podle obrázku 27. Po kolika přemístěních budou všichni na svých původních místech?

1.4 Zobrazení v rovině

V příkladu 1,12 jsme pomocí konstrukčního předpisu popsali zobrazení v rovině ϱ, kterému říkáme středová souměrnost. Toto zobrazení je permutací v rovině ϱ: ke každému bodu X roviny ϱ (vzoru) najdeme jediný bod X'

roviny ϱ (obraz) a každý bod Y' roviny ϱ je obrazem právě jednoho bodu Y roviny ϱ.

Rovina ϱ má nekonečně mnoho bodů a existuje v ní i nekonečně mnoho permutací — některé známe ze školy (osová souměrnost, stejnolehlost) a víme, jak pomocí konstrukce sestrojit k danému vzoru obraz.

Budeme věnovat pozornost jen určité skupině permutací v rovině ϱ, které nazveme **přemístění roviny** ϱ. Všechny tyto permutace tvoříme podobně tímto způsobem: Označíme si body roviny ϱ ($A, B, C, \ldots$) a okopírujeme je na průsvitku. Průsvitkou pak posouváme, otáčíme, překlápíme nebo libovolně tyto pohyby kombinujeme. Obrazem bodů A, B, C, ... v přemístění budou body A', B', C', ..., které dostaneme, když po skončení pohybu (přemístění) okopírujeme body $A, B, C, \ldots$ z průsvitky zpět do roviny ϱ. Matematika však zajímá pouze vzájemná poloha vzoru a obrazu v rovině a nestará se o fyzikální stránku — to je o pohyb, který bod na průsvitce vykonal. Snaží se najít pokud možno jednoduchý konstrukční předpis, který by pohyb nahradil a umožnil by nalézt obraz libovolného bodu roviny v daném přemístění bez použití průsvitky.

Středová souměrnost

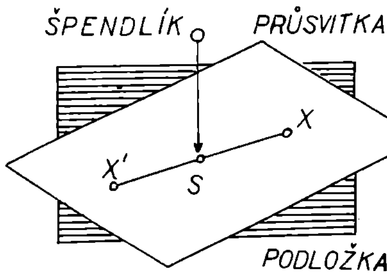
Středovou souměrnost v příkladu 1,12, lze popsat i jako přemístění, jak ukazuje obrázek 28 a návod.

1. Na podložce vyznačíme bod S a libovolný bod $X \neq S$.
2. Narýsujeme přímku $\overleftrightarrow{SX}$.
3. Položíme průsvitku na podložku a zabodneme špendlík do bodu S.
4. Okopírujeme polopřímku $\overrightarrow{SX}$ s bodem X.

5. Otočíme průsvitku kolem špendlíku tak, aby polopřímka $\overrightarrow{SX}$ přešla v polopřímku opačnou.

6. Okopírujeme přemístěný bod X na podložku, tak dostaneme bod X'.

V přemístění přejde úsečka XY v úsečku $X'Y'$ a platí $XY = X'Y'$ (úsečky jsou shodné).



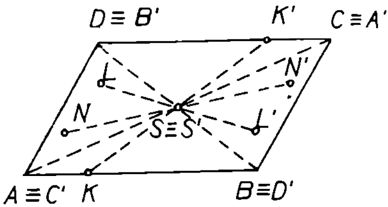
Obr. 28

Středová souměrnost je *přemístění*, tedy permutace v rovině ϱ, která *zachovává shodnost úseček*. Ve škole jsme říkali, že je to **shodné zobrazení.**

Oba názvy — přemístění i shodné zobrazení jsou správné, ale matematik mezi nimi přece jen cítí určitý rozdíl. Představa přemístění roviny, pomocí kterého najdeme k danému bodu roviny obraz, je zcela názorná, intuitivní, ale není přesně definována. Pomocí této představy jsme se však dostali k pojmu „shodné úsečky". Matematik si přesně definuje všechny vlastnosti tohoto pojmu. Nevšímá si už intuitivní představy „přemístění" a hledá, jak zkonstruovat všechna taková zobrazení roviny ϱ na rovinu ϱ, která by zachovala shodnost úseček. Tato zobrazení nazýváme **shodná zobrazení.**

Jestliže si pak upřesníme i představu „přemístění“ a vyslovíme všechny vlastnosti této permutace, je možné dokázat, že každému přemístění odpovídá určitý druh shodného zobrazení a naopak.

Vraťme se ještě ke shodnému zobrazení (přemístění), které jsme nazvali středová souměrnost.



Obr. 29

Sestrojme rovnoběžník a označme průsečík jeho úhlopříček S. K několika bodům, které leží uvnitř nebo na obvodu rovnoběžníka sestrojme body souměrné podle středu S (obr. 29).

Můžeme vyslovit domněnku, že každý bod rovnoběžníka $ABCD$ přejde ve středové souměrnosti podle průsečíku úhlopříček opět v bod rovnoběžníka $ABCD$. Tato domněnka je správná a vyjadřuje jedno ze základních vlastností rovnoběžníka. Říkáme, že

„rovnoběžník je útvar souměrný podle průsečíků úhlopříček“,

nebo

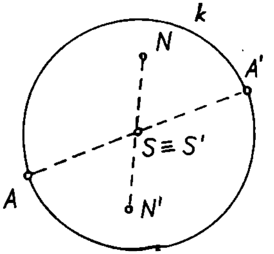
„rovnoběžník je samodružný útvar v souměrnosti podle průsečíku úhlopříček“,

nebo

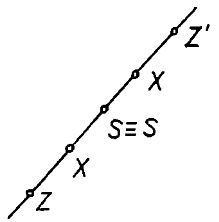
„rovnoběžník se reprodukuje v souměrnosti podle průsečíku úhlopříček“.

Podobnou vlastnost mají i jiné útvary:

Kružnice $k = (S; r)$ se reprodukuje v souměrnosti podle středu S (obr. 30).



Obr. 30



Obr. 31

Přímka p se reprodukuje (je samodružná) v souměrnosti podle každého bodu, který na ní leží (obr. 31).

Cvičení

1. Je dán trojúhelník $\triangle XYZ$. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem Z tak, aby přímka $\overleftrightarrow{AB}$ procházela bodem X a přímka $\overleftrightarrow{CD}$ procházela bodem Y!

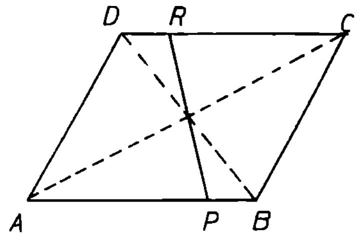
Návod: Uvažte, že čtverec je zvláštní případ rovnoběžníka. Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ s bodem X přejde v souměrnosti podle středu Z v přímku $\overleftrightarrow{A'B'}$ s bodem X' a $\overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{X'Y}$.

2. Je dán trojúhelník OPR. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby přímka $\overleftrightarrow{AB}$ procházela bodem P, přímka $\overleftrightarrow{CD}$ bodem R

a bod O byl středem kosočtverce. Přesvědčte se, že daným podmínkám vyhovuje nekonečně mnoho kosočtverců!

Návod: Podobně jako ve cvičení č. 1 sestrojíme přímku PQ'. Na ní můžeme libovolně zvolit jeden vrchol kosočtverce. Použijeme věty, že každý rovnoběžník, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, je kosočtverec.

3. Úloha je zadána jako ve cvičení 2; požadujeme však ještě, aby kosočtverec měl předepsanou velikost strany.



Obr. 32

Zvolte body OPR tak, že platí $OP = 3\ cm$, $OR = 4\ cm$, $PR = 6\ cm$.

Strana kosočtverce a) $AB = BC = 8\ cm$

b) $AB = BC = 3\ cm$

Přesvědčte se, že v případě a) lze sestrojit kosočtverce dva, v případě b) žádný.

Víte jak volit délku strany kosočtverce tak, aby úloha

a) měla právě dvě řešení?

b) neměla žádné řešení?

4. Důkazová úloha:

Na obr. 32 je rovnoběžník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = 7\ cm$, $BC = 5\ cm$. Úsečka PR má tu vlastnost, že $AP + PR + RD + DA = PB + BC + CR + RP$.

a) Odůvodněte, že $AP = CR$, $BP = DR$.

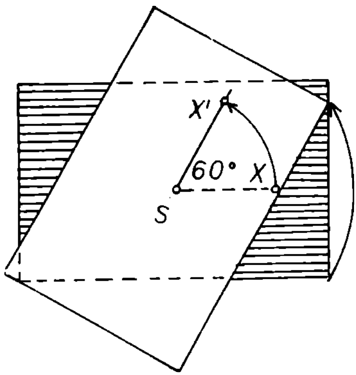
b) Odůvodněte, že přímka $\overleftrightarrow{PR}$ obsahuje bod $AC \cap BD$.

5. Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který neleží na žádné z nich. Bodem M veďte přímku p, aby protínala přímku v bodě A a přímka b v bodě B a aby platilo $AM = BM$.

Návod: Použijte souměrnosti rovnoběžníka se středem v M.

Otočení (rotace) kolem daného středu

Obrazy bodů roviny ϱ najdeme pomocí průsvitky tak, že průsvitku upevníme v jednom bodě a otočíme ji



Obr. 33

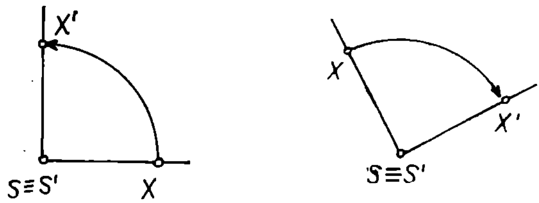
o úhel ω dané velikosti ve zvoleném smyslu (například o úhel 60° proti pohybu hodinových ručiček; viz obr. 33).

Toto přemístění (shodné zobrazení) nazýváme **otočení (rotace) se středem** S **o daný úhel** ω.

Dohodneme se, že při otáčení proti pohybu hodinových ručiček napíšeme před údaj velikost úhlu otočení znaménko $+$, při otáčení v opačném smyslu znaménko $-$.

a) Otočení se středem S o $+ 90°$ (obr. 34a)

b) Otočení se středem S o $- 90°$ (obr. 34b)

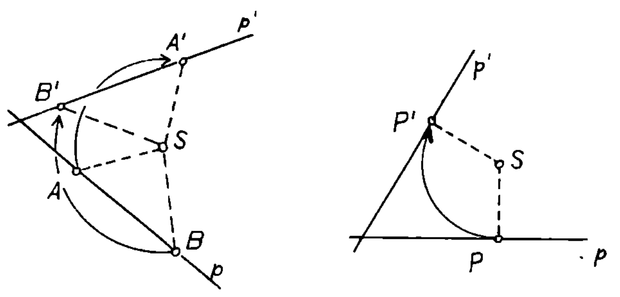


Obr. 34a, b

PŘÍKLAD 1,16

Je dán bod S a přímka p, která bodem S neprochází. Sestrojte přímku p', která je obrazem přímky p v otočení se středem S o úhel $\alpha = - 120°$.

Na přímce p zvolíme dva různé body $A \neq B$ a každý z nich otočíme o úhel $\alpha = - 120°$. Bod A přejde do bodu A', bod B do bodu B'. Přímka $p' = A'B'$. (Obr. 35a)



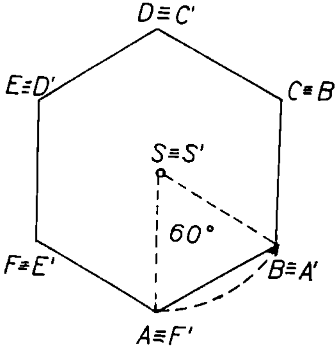
Obr. 35a

Obr. 35b

Přímku p můžeme otočit také pomocí bodu P, který je patou kolmice spuštěné ze středu S k dané přímce p. Otočíme bod P do bodu P' a přímka p' prochází bodem P' a je kolmá k $\overleftrightarrow{SP'}$ (obr. 35b).

PŘÍKLAD 1,17

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Sestrojte obraz šestiúhelníka $ABCDEF$ v otočení se středem v S o úhel $\alpha = +60°$.

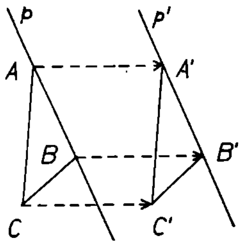


Obr. 36

Šestiúhelník se v daném otáčení reprodukuje (je samodružný). Přesvědčte se, že se šestiúhelník reprodukuje i při otáčení kolem bodu O o úhel $-60°$, $+120°$, $-120°$ a v souměrnosti se středem v O, kterou můžeme považovat také za otáčení kolem středu O, o úhel $+180°$ nebo $-180°$ (obr. 36).

Cvičení

1. Jsou dány dvě rovnoběžky $p \parallel q$ a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte přímku p' jako obraz přímky p v otočení se středem v A o úhel $\beta = +60°$. Průsečík přímek p' a q označte B. Nad úsečkou AB sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABC_1 a ABC_2. Jestliže jste rýsovali přesně, pak jeden z vrcholů C_1 nebo C_2 leží na přímce p. Umíte to vysvětlit?



Obr. 37

2. Zjistěte všechna otočení (určete střed a orientovaný úhel), kterými se reprodukuje daný
a) čtverec, b) rovnostranný trojúhelník, c) pravidelný osmiúhelník, d) kružnice.

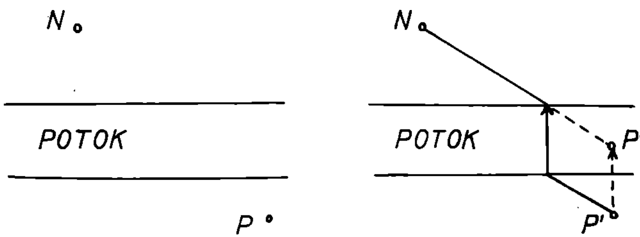
Posunutí (translace)

Velmi jednoduchý způsob přemístění roviny ϱ je permutace v rovině ϱ, zvaná **posunutí (translace)** (obr. 37). Můžeme si je popsat třeba tak, že všechny úsečky, které spojují vzor a obraz mají v daném posunutí stejnou velikost a od vzoru k obrazu se pohybují stejným směrem. Je-li dána jediná dvojice AA' roviny ϱ, které patří posunutí $\boldsymbol{T}$, dovedeme určit obraz libovolného bodu roviny ϱ

v posunutí T. V posunutí je obrazem každé přímky p přímka $p' \parallel p$. Náleží-li přímka p směru posunutí, je $p' \equiv p$.

Cvičení

1. Posunutí je dáno dvojicí bodů $A \neq A'$. Které přímky jsou v tomto posunutí samodružné? Má posunutí samodružné body?



Obr. 38a, b

2. Existuje posunutí, které reprodukuje daný čtverec? Jestliže existuje, přesně je popište, jestli neexistuje, pokuste se o odůvodnění. Nedovedete-li rozhodnout, použijte průsvitky!

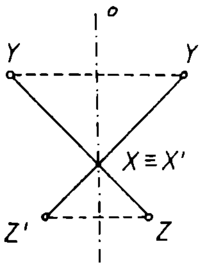
3. Zvolte posunutí dvojicí bodů $A \neq A'$. Vyjmenujte některé útvary, které jsou v daném posunutí samodružné.

4. Obce N a P, které byly na opačných březích potoka, se rozhodly postavit přes potok lávku (obr. 38a).
Určete na plánku co nejvýhodnější místo tak, aby cesta z N do P byla co nejkratší (lávka musí být kolmá k břehům potoka).
Dokažte, že uvedené řešení je správné (obr. 38b).

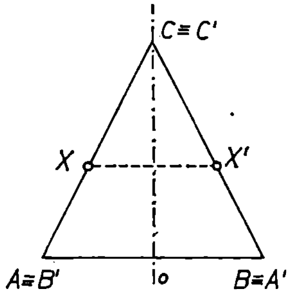
5. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho stran. Základny lichoběžníka jsou AB, CD.
a) $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 6$ cm, $DA = 4$ cm.
b) $AB = 7$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4$ cm, $DA = 6$ cm.

Osová souměrnost

Jestliže na papír nakreslíme inkoustem několik bodů a papír přeložíme (podle zvolené přímky o), dokud kresba neuschla, získáme ke každému bodu (vzoru) právě jeden otisk (obraz) v zobrazení, kterému říkáme **souměrnost podle osy o.** Otevřeme-li přeložený papír, najdeme snadno



Obr. 39



Obr. 40

předpis, jak ke každému bodu roviny ϱ sestrojit kružítkem a pravítkem obraz v osové souměrnosti.

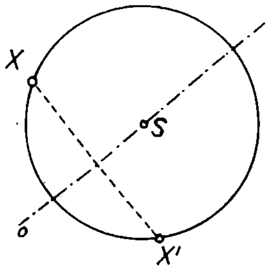
V rovině ϱ je dána přímka o (osa souměrnosti). Pro všechny body X, které leží na přímce o, platí $X' = X$.

Obraz bodu Y, který neleží na přímce o, dostaneme takto: Patu kolmice vedené z bodu Y k přímce o označíme Y_0. Bod Y' leží na polopřímce opačné k $Y_0\,Y$ tak, že $Y'Y_0 = YY_0$. (Obr. 39)

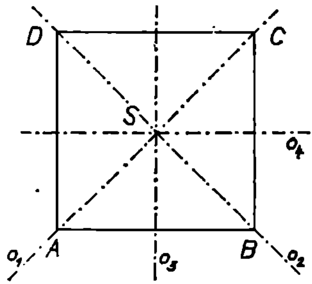
Osová souměrnost je rovněž přemístění a pro každou úsečku platí $A'B' = AB$. Pro vymodelování osové souměrnosti můžeme také použít průsvitky. Snadno si ověříte, že v tomto případě musíme při přemístění otočit průsvitku na rub, abychom k daným bodům získali obrazy. Takovému přemístění říkáme **nepřímé.**

V osové souměrnosti je obrazem přímky p přímka p'. Je-li $p \perp o$, pak $p' \equiv p$. Je-li p různoběžná s osou o a není k ní kolmá, protínají se přímky p a p' na ose o. Je-li $p \parallel o$, je $p' \parallel o \parallel p$. Obrazem úsečky XY je úsečka $X'Y'$ a $XY = X'Y'$.

Útvary, o kterých říkáme, že jsou souměrné podle osy



Obr. 41



Obr. 42

o, se v osové souměrnosti podle o **reprodukují.** Např. rovnoramenný trojúhelník je souměrný podle kolmice spuštěné z hlavního vrcholu na základnu (obr. 40).

Kružnice je souměrná podle každé přímky, která prochází jejím středem (obr. 41).

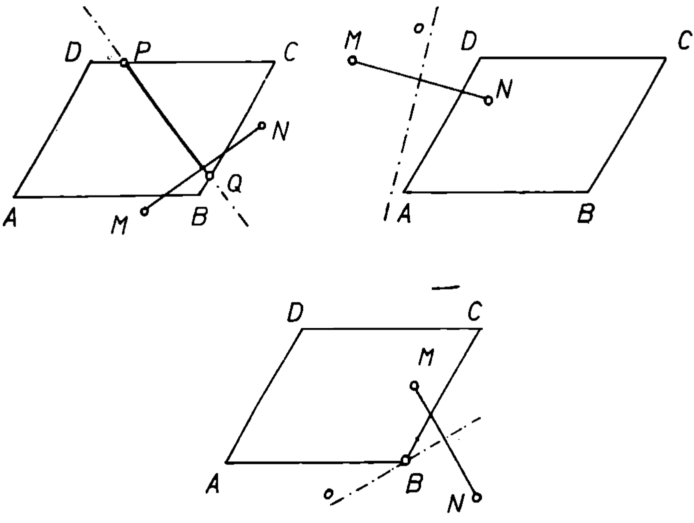
PŘÍKLAD 1,18

Najděte všechny osové souměrnosti, které reprodukují čtverec $ABCD$!

Takové osové souměrnosti jsou čtyři. Jejich osy jsou přímky, v nichž leží obě úhlopříčky a obě střední příčky (obr. 42).

PŘÍKLAD 1,19

Je dán kosočtverec $ABCD$ a dva různé body $M \neq N$. Najděte všechny body kosočtverce $ABCD$, které mají od bodů M a N stejnou vzdálenost.



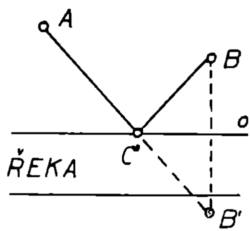
Obr. 43a, b, c

Všechny body, které leží v rovině ϱ a mají od bodů M, N stejnou vzdálenost, vyplňují přímku o, která prochází středem úsečky MN a je k přímce $\overleftrightarrow{MN}$ kolmá. Je to tzv. osa úsečky MN. V souměrnosti podle o se úsečka MN reprodukuje.

Body, které vyhovují úloze, musí tedy ležet na ose úsečky MN a současně v kosočtverci $ABCD$. Na obr. 43a je hledanou množinou bodů úsečka PQ. Podle polohy bodů MN vzhledem ke kosočtverci může být také množina prázdná (obr. 43b) nebo jednobodová (obr. 43c).

PŘÍKLAD 1,20

V obci A vypukl požár a z obce B jeli požárníci se stříkačkou a cestou se museli stavit u řeky, kde nabrali



Obr. 44

vodu. (Viz obr. 44.) Kde bylo nejvýhodnější nabrat vodu, aby cesta z A do B byla co nejkratší?

Bod B' je obraz bodu B v souměrnosti podle osy o. Nejkratší spojení z A do B' je úsečka AB', která protíná osu o v bodě C. Platí, že $B'C = BC$. Je proto nejvýhodnější nabrat vodu v místě C.

Kdyby nabírali vodu v místě $X \neq C$, platilo by:

$$AX + XB' > AC + CB',$$

(z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle AB'X$)

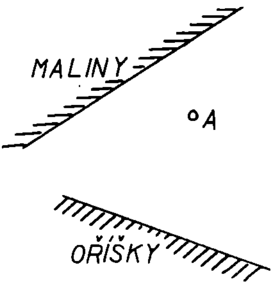
$$CB' = CB;\ XB' = XB$$

a také $$AX + XB > AC + BC$$

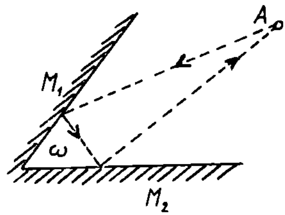
Cvičení

1. Na obr. 45 je dána řada znaků.
Najděte svislou osu souměrnosti každého znaku a všimněte si obrázku v pravé polovině. Zakreslete další znaky!

Obr. 45



Obr. 46



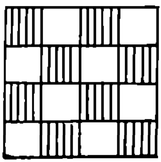
Obr. 47

2. Čtyři kamarádi tábořili na palouku v lese (v místě A) a měli přesně zakreslený plánek okolí (obr. 46). Hledali nejkratší cestu z tábora A pro maliny, pak pro oříšky a zpět do tábora. Našel ji Mirek.
Jakou cestu zvolil? Jak přesvědčil kamarády, že volil správně?

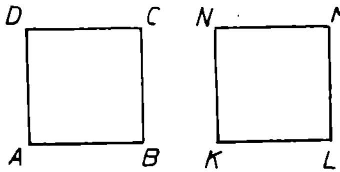
3. Dutý úhel ω na obr. 47 znázorňuje jeden roh kulečníku. V bodě A stojí koule. Koule má být uvedena v pohyb tak, aby po prvním odrazu na mantinelu M_1 a po druhém odrazu na mantinelu M_2 prošla polohou A. Pokuste se sestrojit body odrazu X_1 a X_2. Zkuste řešit tutéž úlohu pro úhel $\omega = \mathrm{R}$!

4. Najděte všechny osové souměrnosti, které reprodukují:
a) rovnostranný trojúhelník,
b) pravidelný šestiúhelník.

Popsali jsme čtyři různá přemístění roviny ϱ. Každé z nich je prosté zobrazení, a protože množinou vzorů i množinou obrazů jsou všechny body roviny ϱ, jsou všechna přemístění permutace v rovině ϱ.



Obr. 48



Obr. 49

Otočení kolem středu S — jeho zvláštním případem je středová souměrnost podle S — má jediný samodružný bod $S = S'$ (bod X je samodružný, právě když relaci náleží dvojice $[X, X]$). Posunutí nemá žádný samodružný bod — pro každý vzor a obraz platí, že jsou navzájem různé.

Osová souměrnost má nekonečně mnoho samodružných bodů a všechny vyplní přímku, které říkáme osa.

Víme ještě o jedné permutaci, která je přemístěním roviny (shodným zobrazením) a to je identická permutace (identita). Průsvitku necháme ležet na podložce v původní poloze a všechny obrazy a vzory splývají. Jestliže se průsvitka nemá pohnout z místa ani překlopit, musíme ji upevnit aspoň ve třech bodech, které tvoří vrcholy trojúhelníka. Máme-li tedy dány v rovině tři různé samodružné body, které neleží v přímce, jsou samodružné všechny body roviny.

Cvičení

1. Na obr. 48 je šachovnice o 16 polích. Popište shodnosti, které reprodukují tuto šachovnici i co do barvy polí.

2. Na obr. 49 jsou dva čtverce $ABCD$, $KLMN$, jejichž strany AB, KL mají tutéž délku a jsou rovnoběžné. Najděme (zkusmo) všechny shodnosti, které převádějí čtverec $ABCD$ (jako množinu bodů) ve čtverec $KLMN$ (jako množinu bodů). Popište tyto shodnosti a nakreslete náčrtky.