Booleova algebra

Výsledky cvičení

In: Oldřich Odvárko (author): Booleova algebra. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 113–[116].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403775

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1. Všechna tvrzení a), b), c) jsou pravdivá; množina všech rovnostranných čtyřúhelníků, jejichž aspoň jeden vnitřní úhel je ostrý nebo tupý (tj. množina všech kosočtverců); množina všech čtyřúhelníků, které nejsou rovnostranné nebo mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý nebo tupý (tj. množina všech čtyřúhelníků, jež nejsou čtverce) **2.** a) $A \cup B$ b) $A \cup B \cup C$ c) D' **3.** a) ano b) ano c) ne d) ne e) ano **4.** a) $A \cap B = \emptyset$ b) $A' \cap B \cap C' = \emptyset$ a zároveň $A' \cap B' \cap C = \emptyset$ c) $A \cap C = \emptyset$

2. kapitola

1. a) 0 b) 1 c) 0 **2.** a) ano b) ano **5.** a) ano b) ano c) ne

3. kapitola

1. a) Není komutativní ani asociativní $/(x-y)-z;\ x-(y-z)/$, neexistuje neutrální prvek b) není komutativní $/x+2y;\ y+2x/$, není asociativní $/(x+2y)+2z;\ x+2(y+2z)/$, neexistuje neutrální prvek c) je komutativní, není asociativní $/(x^2+y^2)^2+z^2;\ x^2+(y^2+z^2)^2/$, neexistuje neutrální prvek d) není komutativní $/x^y;\ y^x/$ ani asociativní $/(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}/$, neexistuje neutrální prvek **2.** Operace $u = x * y$: není komutativní ani asociativní, neexistuje neutrální prvek; operace $u = x \bigcirc y$: je komutativní i asociativní, neutrálním prvkem je 2. Operace $u = x * y$ není distributivní vzhledem k operaci $u = x \bigcirc y$ /$2 \ast (2 \bigcirc 3) = 2 \ast 3 = 2$; $(2 \ast 2) \bigcirc (2 \ast 3) = 3 \bigcirc 2 = 3$/ **3.** Úkolem je postupně prověřit, zda pro všechny prvky x, y, z množiny R platí: I. $\max(x, y) = \max(y, x)$, II. $\min(x, y) = \min(y, x)$, III. $\max(\max(x, y), z) = \max(x, \max(y, z))$, IV. $\min(\min(x, y), z) = \min(x, \min(y, z))$, V. $\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z))$, VI. $\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$; dále je třeba určit všechny takové prvky $e_1 \in R$, pro něž je $\max(x, e_1) = \max(e_1, x) = x$ pro každé $x \in R$; všechny prvky $e_2 \in R$, pro něž je $\min(x, e_2) = \min(e_2, x) = x$ pro každé $x \in R$. I.—VI. platí. Můžete při důkazech uvažovat případy: $x \leqq y \leqq z$, $x \leqq z \leqq y$, $y \leqq x \leqq z$, $y \leqq z \leqq x$, $z \leqq x \leqq y$, $z \leqq y \leqq x$. Neexistuje neutrální prvek vzhledem k žádné z obou operací. **4.** Platí zřejmě I.—VI. (viz př. 3); neutrální prvek operace „$u = \max(x, y)$ na D“ je 0, neutrální prvek operace „$u = \min(x, y)$ na D“ je 4. Unární operaci s požadovanými vlastnostmi nelze na D definovat (například k prvku $1 \in D$ neexistuje žádný prvek $x \in D$, pro nějž je $\max(1, x) = 4$ a zároveň $\min(1, x) = 0$/.

4. kapitola

1. Je modelem; neutrální prvek operace sjednocení je $\langle \frac{5}{2}, 3 \rangle$, operace průniku $\langle 2, 3 \rangle$ **2.** Neutrální prvky O_u; AB **4.** Neutrální prvky 1; 6 **5.** Využijte závěrů cvičení 3 a 4 z 3. kapitoly **6.** Neutrální prvky [2,2] a [3,3] **8.** Neutrální prvky: funkce f_0, pro niž platí: $f_0(x) = 2$ pro každé $x \in R$; funkce f_1, pro niž platí: $f_1(x) = 3$ pro každé $x \in R$ **10.** a) 1 b) $a + b'c$ c) $ab + a'c'$ d) $a + b + c'$ e) $(ab)'.cd'$ f) $a'.(b' + c)$ g) $bcd'.(a + e)$ h) 0 **11.** Důkaz /3/ pomocí axiómů /1/, /2/, /5/ až /10/ a vět z těchto axiómů plynoucích lze provést například takto: $((x+y)+z).x = (x+y).x + zx = x + zx = x$, $(x + (y + z)).x = xx + (y+z).x = x + (y+z).x = x$. Je tedy $((x+y)+z).x = (x+(y+z)).x$. Obdobně lze dokázat, že je také $((x+y)+z).x' = (x+(y+z)).x'$. Platí tedy dále i $((x+y)+z).(x+x') = (x+(y+z)).(x+x')$, čili $(x+y)+z = x+(y+z)$. Analogicky lze dokázat i /4/.

5. kapitola

1. $\{1\}$ **2.** Prázdná množina řešení **3.** $\{[1, 0], [1, 1]\}$ **4.** Pořadí hodnot proměnných ve čtveřicích je x, y, z, u — $\{[0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1]\}$ **5.** a) je-li $c = 1$ nebo platí-li $a = 1$ a zároveň $b = 1 : \emptyset$; $a = 1, b = 0, c = 0 : \{1\}$; $a = 0, b = 1, c = 0 : \{0\}$; $a = 0, b = 0, c = 0 : \{0,1\}$ b) $a = 0 : \{1\}$; $a = 1 : \{0,1\}$ c) $a = 0, b = 0, c = 0$ nebo $a = 1, b = 1, c = 1 : \{0,1\}$; $a = 0, b = 1$ $c = 0$ nebo $a = 1, b = 0$ $c = 1 : \{1\}$; $a = 1, b = 0, c = 0$ nebo $a = 0, b = 1, c = 1 : \{0\}$; $a = 0, b = 0, c = 1$ nebo $a = 1, b = 1, c = 0 : \emptyset$ d) $a = 1, b = 0 : \{0,1\}$; v ostatních případech $\{0\}$. **6.** $a = 0, b = 0 : \emptyset$; $a = 0, b = 1 : \{[0, 0]\}$; $a = 1, b = 0 : \{[1,1]\}$; $a = 1, b = 1 : \{[0,0], [1,1]\}$ **8.** $f_1 : u = y$; $f_2 : u = xz+y'z'$; $f_3 : u = x'y+y'z$ **9.** Nejsou si rovny **10.** $2^{(2^1)}$ $2^{(2^2)}$, $2^{(2^3)}$, $2^{(2^4)}$ atd.; $2^{(2^n)}$

6. kapitola

2. a) $(A \cap B) \cup C$ b) $A \cap B' \cap C' \cap D' \cap E \cap (F \cup G)$ **3.** a) $\{\{3, 5, 7\}, \{3, 4, 5, 7\}, \{3, 5, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}\}$ b) $\{\{2, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}\}$ c) $\emptyset$ d) $\{\{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$ **4.** Množina všech řešení je prázdná, právě když je $C \neq \emptyset$ nebo když je $A' \subset B$ a zároveň $A' \neq B$. Množina všech řešení je neprázdná, právě když je $C = \emptyset$ a zároveň $B \subset A'$ (přitom je jednoprvková právě tehdy, když $C = \emptyset$ a zároveň $A' = B$). **5.** a) $\{3\}$ b) $\{1\}$ **6.** $\emptyset$ **7.** Dvě možnosti: navštíví jenom A a B; navštíví jenom A, B a D

7. kapitola

2. $h_1 : z = xu'v$; $h_2 : z = x+y$; $h_3 : y = z+uv$ **3.** $f : u = x \,.$ $.\,(yz+y'z')+x'\,.\,(yz'+y'z)$ **4.** a, b, c, d, e stavy vypínačů A, B, C, D, E; stav a roven 1, právě když se vypínač A vypne (obdobně ostatní stavy); $f : y = b+a.(c+d+e)+cd+e\,.\,(c+d)$ **5.** $f : y =$ $= a\,.\,(b+c)+d\,.\,(c+e)+bce$ **6.** $f : y = k\,.\,(lm+ln+lo+mn+mo+$ $+no)+l\,.\,(mn+mo+no)$ **7.** f_4, f_3, f_2, f_1, f_0 funkce odpovídající po řadě částem obvodu, které realizují 4, 3, 2, 1, 0 správných odpovědí; $f_4 : y = abc'd'$; $f_3 : y = ab\,.\,(cd'+c'd) + c'd'\,.\,(ab'+a'b)$ $f_2 : y = abcd+a'b'c'd'+(ab'+a'b)\,.\,(cd'+c'd)$; $f_1 : y = cd\,.\,(ab'+$ $+a'b)+a'b'\,.\,(c'd+cd')$; $f_0 : y = a'b'cd$

8. kapitola

1. $f : z = xy$ **2.** $\mathrm{A} = a_2a_1a_0$, $\mathrm{B} = b_2b_1b_0$; $\mathrm{A} \leqq \mathrm{B}$; $f : y = a_2'b_2+$ $+ (a_2'+b_2)\,.\,(a_1'b_1 + (a_1'+b_1)\,.\,(a_0'+b_0))$