7. kapitola

BOOLEOVA ALGEBRA V ELEKTROTECHNICE

V této a následující kapitole budeme ilustrovat užití Booleovy algebry při řešení některých jednoduchých úloh z technické praxe. Zvláště využijeme poznatků o booleovských funkcích, s nimiž jsme se seznámili v 5. kapitole. Půjde zde pouze o informativní seznámení se s danou problematikou; k hlubšímu studiu vám mohou sloužit některé publikace z doporučené literatury uvedené v závěru knížky.

Uvažujme elektrický obvod, v němž je zapojeno zařízení, které podle našich pokynů proud buď propouští nebo nepropouští. Nejjednodušším takovým zařízením je *kontakt (spínač)*. Představte si jej například jako zcela obyčejný vypínač (klíč) nebo jako spínač elektromagnetického relé. Zabývejme se elektrickými sítěmi, v nichž jsou zařazeny kontakty; v dalším hovořme o tzv. *kontaktních sítích.*

Kontakt se může nacházet ve dvou stavech: *buď jím prochází proud* („raménko" spínače je sklopeno) *nebo jím proud neprochází* („raménko" spínače je odklopeno). *Označme tyto stavy postupně* 1 *a* 0. Právě tak jako jednotlivé kontakty i kontaktní síť může nabývat pouze dvou různých stavů: „*proud sítí prochází*" — *stav* 1, „*proud sítí neprochází*" — *stav* 0. Stav sítě bude zřejmě záviset na stavech kontaktů v ní zařazených a také na tom, jak jsou tyto kontakty v síti „zkombinovány". Je-li v síti zařazen jediný kontakt, pak stav sítě a stav příslušného kontaktu jsou sobě rovny.

Síť, v níž je zařazen jediný kontakt o stavu x (x je proměnná, oborem je dvouprvková množina stavů), se označuje schematicky tak, jak je uvedeno na obrázku 18.

Obr. 18

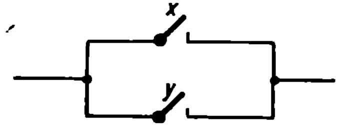
Této síti můžeme přiřadit síť s jedním kontaktem o stavu x', který bude vždy *v opačném stavu* než kontakt o stavu x (promyslete technickou realizaci). V tabulce 9 jsou uvedeny dvojice stavů [x, x'], jež mohou nastat, a na obrázku 19 je načrtnuto schéma této nové sítě.

Obr. 19

x	x'
0	1
1	0

tab. 9

Uvažujme nyní kontaktní síť, v níž jsou zapojeny *paralelně dva kontakty o stavech* x, y (schéma na obrázku 20). Dosazujme za x a y postupně jednotlivé prvky z množiny stavů a určujme výsledný stav sítě (viz tabulka 10).



Obr. 20

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	1

tab. 10

Sítí prochází proud, právě když je aspoň jeden z kontaktů ve stavu 1.

Obdobně zkoumejme výsledné stavy sítě při *sériovém zapojení kontaktů* (obrázek 21, tabulka 11).

Obr. 21

$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 11

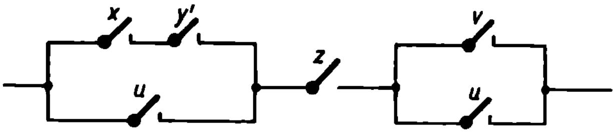
Touto sítí prochází proud právě tehdy, když oba kontakty jsou ve stavu 1 (tj. proud prochází oběma).

Odmyslíme-li si fyzikální interpretaci symbolů 0 a 1, pak tabulky 9, 10 a 11 jsou vlastně definičními tabulkami operací doplněk, sčítání a násobení na dvouprvkové množině D /$(D, +, ., ')$ — dvouprvková Booleova algebra/. Doplněk k prvku $x \in D$ lze realizovat sítí na obrázku 19; součet prvků z D sítí s kontakty zapojenými paralelně; součin prvků z D sítí s kontakty zapojenými sériově. Jinak řečeno, uvedenými kontaktními sítěmi lze realizovat*) booleovské funkce $f : y = x'$, $g : u = x+y$, $h : u = xy$, kde x, y jsou proměnné o oboru D.

Z našich úvah je zřejmé, že kontaktními sítěmi budeme moci realizovat i další, složitější booleovské funkce. Ilustrujme závěry, k nimž jsme dospěli, na několika příkladech.

*) Rčením „*kontaktní síť realizuje booleovskou funkci*“ budeme rozumět v podstatě toto: sítí prochází proud, právě když hodnota příslušné booleovské funkce je rovna 1.

Příklad 33: Je dáno schéma kontaktní sítě (obr. 22). Určete booleovskou funkci f o proměnných x, y, z, u, v, která je touto sítí realizována.



Obr. 22

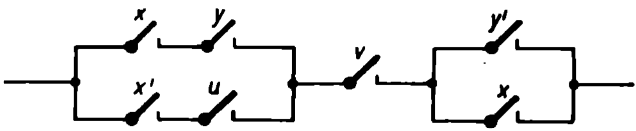
Řešení: Funkci f lze určit rovnicí takto (prověřte!):

$$f : w = (xy' + u).z.(v + u)$$

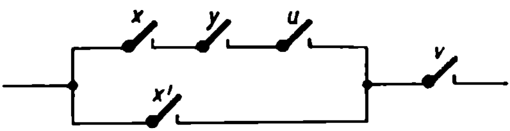
Po zjednodušení pravé strany rovnice můžeme psát

$$f : w = (xy'v + u).z$$

Příklad 34: Jsou dána schémata kontaktních sítí (obrázky 23, 24).



Obr. 23



Obr. 24

Rozhodněte, zda booleovské funkce f_1, f_2, jež jsou příslušnými sítěmi realizovány, jsou sobě rovny.
Řešení: Určíme nejprve každou z funkcí rovnicí. Dostaneme:

$$f_1 : w = (xy + x'u).v.(y' + x)$$
$$f_2 : w = (xyu + x').v$$

Každou z nich můžete určit tabulkou. Odtud už potom snadno dospějete k závěru. Proveďte tuto část řešení úkolu samostatně.

Příklad 35: Je dána booleovská funkce f o třech proměnných x, y, z definována tabulkou takto:

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Načrtněte schéma kontaktní sítě, která tuto funkci realizuje.

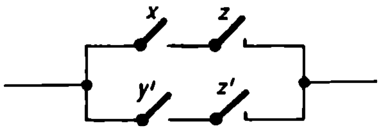
Řešení: Určíme nejprve funkci f rovnicí.

$$f : u = xyz + xy'z + xy'z' + x'y'z'$$

Po úpravách dostaneme

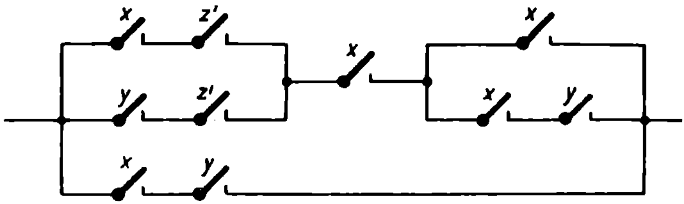
$$f : u = xz + y'z'$$

Schéma kontaktní sítě je na obrázku 25.



Obr. 25

Příklad 36: Je dána kontaktní síť, jež realizuje jistou booleovskou funkci f (schéma na obrázku 26). Rozhodněte, zda existuje kontaktní síť s nejvýše čtyřmi kontakty, jež realizuje funkci rovnou f.



Obr. 26

Řešení: Určíme funkci f rovnicí.

$$f : u = (xz' + yz') . x . (x + xy) + xy$$

Po úpravách pravé strany rovnice dostaneme

$$f : u = x . (z' + y) \qquad \text{Prověřte!}$$

Existuje tedy síť s třemi kontakty, jež realizuje funkci f (tj. síť, jež „funguje“ stejně jako síť výchozí). Načrtněte si její schéma!

Příklad 37: Lampa je ovládána třemi vypínači. Svítí právě tehdy, když aspoň dva z nich jsou zapnuty. Načrtněte schéma příslušné sítě (o co nejmenším počtu kontaktů).
Řešení: Označme vypínače postupně písmeny A, B, C; jejich stavy a, b, c. Stav vypínače A označme 1, právě když je zapnut; 0, právě když je vypnut. Stejně tak pro stavy vypínačů B a C.
Určeme tabulkou funkci g o třech proměnných a, b, c z množiny D, jejíž realizací bude hledaná elektrická síť. Prověřte tuto tabulku!

a	b	c	$g(a, b, c)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Určeme funkci g rovnicí. Lze psát

$$g : y = abc + abc' + ab'c + a'bc$$

a po úpravě pravé strany rovnice

$$g : y = ab + c.(a + b)$$

Schéma příslušné kontaktní sítě si už načrtněte sami!

Při řešení tohoto příkladu můžeme postupovat také takto:

Označme písmeny α, β, γ postupně výroky

α ... vypínač A je zapnut
β ... vypínač B je zapnut
γ ... vypínač C je zapnut

Z podmínek textu úlohy pak dospějeme k závěru, že lampa svítí (tj. sítí prochází proud) právě tehdy, když je pravdivý výrok

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

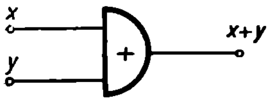
Přejděme k dvouprvkové Booleově algebře $(D, +, ., ')$ ($\alpha \to a$, $\beta \to b$, $\gamma \to c$). Potom lze předchozí závěr formulovat takto: Sítí prochází proud, právě když je $ab+ac+ +bc = 1$. Ještě jinak řečeno, sítí prochází proud, právě když hodnota funkce $g : y = ab+ac+bc$ (a po úpravě $g : y = ab+c.(a+b)$) je rovna 1.
Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

Booleovské funkce lze realizovat i jinými způsoby než pomocí kontaktních sítí. Namísto různých kombinací kontaktů mohou být v síti zařazeny *elektronické elementy* (diody, triody, tranzistory). Mezi základní, elementární části takovýchto obvodů patří tzv. *součtový člen, součinový člen a doplňkový člen (invertor).*

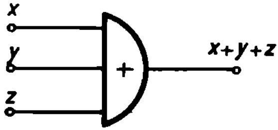
Části, z nichž se skládá součtový člen, můžeme přibližně popsat takto:
1. Dva nebo více *vstupů*, z nichž každý se může nacházet v jednom ze dvou stavů 0,1.*) Na obrázku 27 je schéma

*) Jde obvykle o dvě úrovně napětí; znakem 1 se označuje vyšší napětí, znakem 0 napětí nižší.

součtového členu se dvěma vstupy ve stavech x a y, na obrázku 28 schéma součtového členu se třemi vstupy ve stavech x, y, z.



Obr. 27

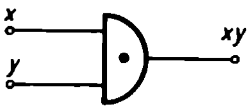


Obr. 28

2. Jeden *výstup*, který se opět může nacházet v jednom ze dvou stavů 0 nebo 1.
3. Zařízení, které pracuje tak, že na výstupu je stav 1, právě když aspoň jeden ze vstupů je ve stavu 1.

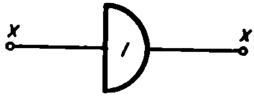
Součtový člen tedy v jistém smyslu nahrazuje funkci paralelně zapojených kontaktů v kontaktní síti.

Součinový člen nahrazuje v podstatě funkci sériově zapojených kontaktů v síti. Má vždy aspoň dva vstupy, jeden výstup a zařízení, které způsobuje, že výstup je ve stavu 1, právě když všechny vstupy jsou ve stavu 1. Na obrázku 29 je schéma součinového členu se dvěma vstupy ve stavech x, y.



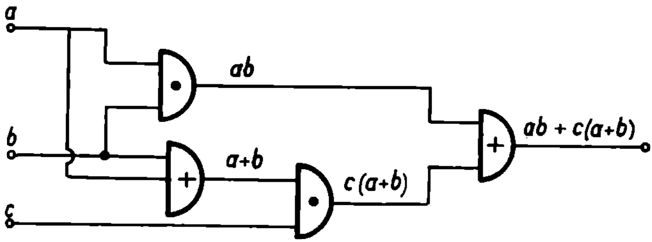
Obr. 29

Doplňkový člen (invertor) má vždy jeden vstup, jeden výstup a zařízení, které pracuje takto: je-li vstup ve stavu 1, je výstup ve stavu 0; je-li vstup ve stavu 0, je výstup ve stavu 1. Schéma invertoru se vstupem o stavu x je na obrázku 30.



Obr. 30

Pomocí součtových, součinových a doplňkových členů můžeme funkci g z příkladu 37 realizovat tak, jak je uvedeno na obrázku 31. Pro vaše pohodlí jsou popsány stavy u jednotlivých výstupů.



Obr. 31

Příklad 38: Výbor čtyř členů K, L, M, N rozhoduje většinou hlasů. Pouze v případě rovnosti hlasů má předseda K rozhodující hlas. Hlasování se provádí tímto systémem: Každý člen výboru stiskne tlačítko umístěné před sebou, právě když návrh schvaluje. Jestliže byl návrh přijat, rozsvítí se žárovka, jinak zůstane zhasnuta. Navrhněte příslušný obvod!

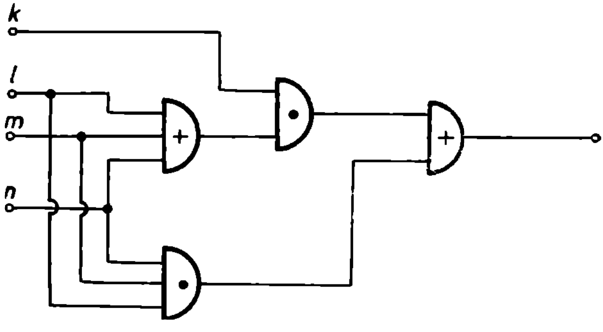
Řešení: Označme stavy tlačítek (vypínačů) u jednotlivých členů výboru K, L, M, N postupně k, l, m, n. Stav vypínače označme 1, právě když je příslušným členem výboru zapojen (stisknut). Výsledný stav sítě bude roven 1, právě když žárovka svítí.

Zkuste samostatně určit funkci h, jejíž realizací bude hledaný obvod. Srovnejte pak své závěry s naším výsledkem:

$$h : y = lmn + k.(l + m + n)$$

(Použijte některou z metod, jež byly uvedeny při řešení příkladu 37).

Na obrázku 32 je schéma obvodu se součtovými, součinovými a doplňkovými členy. Prověřte, že schéma je nakresleno správně!*)



Obr. 32

*) Naše zařízení bude „fungovat" správně jenom v tom případě, když všichni členové výboru, kteří hlasují „pro", stisknou tlačítka současně. Lze však také do obvodu zapojit zařízení, které zaručí, že si „obvod pamatuje", zda nějaké tlačítko bylo stisknuto (tuto funkci může plnit například tzv. *klopný obvod*).

Další příklad je malou ukázkou návrhu konstrukce elektrického obvodu miniaturního „zkoušecího“ stroje.

Příklad 39: Student obdrží tři otázky, na něž má odpovědět „ano“ nebo „ne“. Navrhněte obvod „zkoušecího stroje“, s nímž student pracuje takto: Chce-li na danou otázku odpovědět „ano“, stiskne příslušné tlačítko; v opačném případě tlačítko nestiskne (předpokládáme, že tlačítka jsou opatřena zařízením „na zapamatování“). Požadujeme, aby stroj po skončení zkoušky udal počet správných odpovědí.
Předpokládejme, že při této zkoušce má být správná odpověď na otázky A a C „ano“, na otázku B „ne“.
Řešení: Nechť jsou tlačítka popsána písmeny A, B, C; jejich stavy označme postupně a, b, c. Označme stav příslušného tlačítka 1, právě když je stisknuto. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možné kombinace těchto tří stavů; v posledním sloupci je uveden počet správných odpovědí.

a	b	c	Počet správných odpovědí
1	1	1	2
1	1	0	1
1	0	1	3
1	0	0	2
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	2
0	0	0	1

Určeme rovnicemi funkce f_3, f_2, f_1, f_0, které budou realizovány těmi částmi hledaného obvodu, jimž odpovídá postupně 3, 2, 1, 0 správných odpovědí. Pak je

$$\begin{aligned} f_3 &: y = ab'c \\ f_2 &: y = a.(bc+b'c')+a'b'c \\ f_1 &: y = abc'+a'.(bc+b'c') \\ f_0 &: y = a'bc' \end{aligned}$$

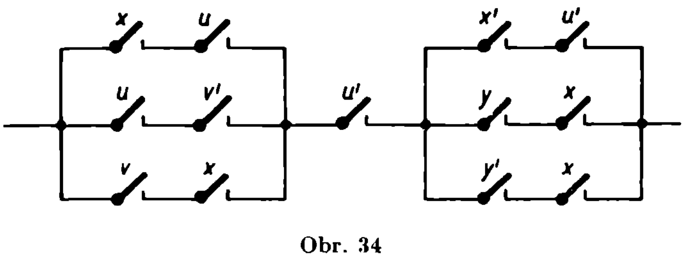
Schéma příslušného obvodu je na obrázku 33. Můžete si ho překreslit a u jednotlivých výstupů nadepsat vždy příslušný stav. Tak prověříte, zda je schéma nakresleno správně.

Cvičení

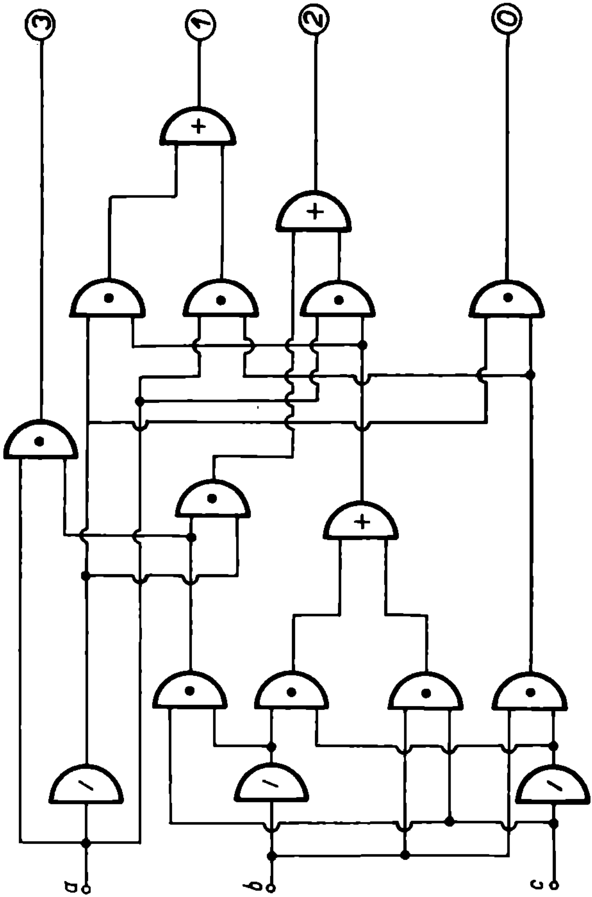
1. Pro každou z funkcí $g_1 : y = xz+ux'+x'z'u'$,
$g_2 : y = (xuv+ux').(v'+z)$

načrtněte schéma kontaktní sítě a obvodu s elektronickými elementy, jež tuto funkci realizují.

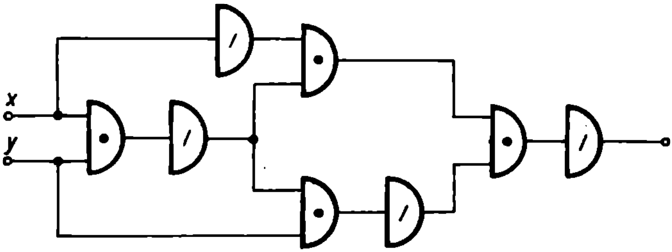
2. Sítě na obrázcích 34, 35, 36 realizují jisté funkce h_1, h_2, h_3. Načrtněte schémata sítí o co nejmenším počtu kontaktů (elementárních členů), jež realizují opět funkce h_1, h_2 a h_3.



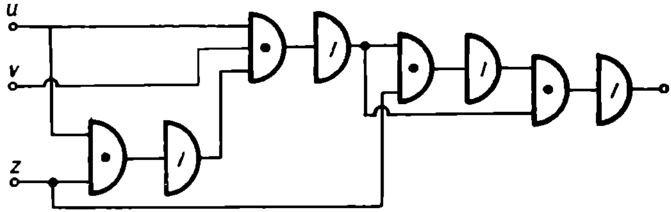
Obr. 34



Obr. 34



Obr. 35



Obr. 36

3. Lampa je ovládána třemi vypínači. Svítí, právě když je zapnutý lichý počet vypínačů. Nakreslete schéma příslušného obvodu!

4. Bezpečný chod stroje je kontrolován pěti vypínači A, B, C, D, E. Každý z vypínačů se vypne, jestliže odpovídající část stroje selže. Bezpečnostní zařízení zastaví stroj, právě když se vypne vypínač B nebo když se vypnou aspoň dva z ostatních vypínačů. Nakreslete schéma příslušného obvodu!

5. Řešte týž úkol jako v příkladě 4 pro případ, že bezpečnostní zařízení zastaví stroj, právě když je splněna aspoň jedna z podmínek a), b), c):

a) A je vypnut a zároveň aspoň jeden z B, C se vypne.
b) D se vypne a zároveň aspoň jeden z C, E se vypne.
c) Aspoň tři z A, B, C, D, E se vypnou.

6. Výbor pěti členů K, L, M, N, O se rozhoduje většinou hlasů. Navíc ale návrh není přijat v tom případě, když předseda K a zároveň místopředseda L jsou oba „proti". Systém hlasování je týž jako v příkladě 38. Navrhněte příslušný obvod!

7. Řešte týž úkol jako v příkladě 39 pro „zkoušecí" stroj se čtyřmi tlačítky. Správné odpovědi na otázky A a B jsou „ano", na otázky C a D „ne".