# 6. kapitola

## NĚKOLIK ÚLOH Z MNOŽINOVÉ ALGEBRY A ALGEBRY PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT

Ilustrujme v této kapitole užitečnost zavedené Booleovy algebry na několika příkladech o množinách a z logiky.

**Příklad 28:** Zjednodušte zápis množiny

$$(A \cap E \cap C) \cup ((D \cap A)' \cup B)' \cup (E \cap C' \cap A) \cup$$
$$\cup ((B \cup D)' \cap A)$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů. Přitom $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ jsou podmnožiny dané neprázdné množiny $M$.
*Řešení*: V zápise uvažované množiny se vyskytuje celkem pět písmen označujících podmnožiny množiny $M$. V této knížce jsme uvedli Vennovy diagramy nejvýše pro čtyři množiny, nemůžeme tedy této grafické metody pro řešení našeho příkladu použít.*)

Využijme té skutečnosti, že množinová algebra $(\widehat{M}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry. Přepišme zápis dané množiny do symboliky užívané v Booleově algebře $(B, +, ., ')$. Půjde o tyto záměny: $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$, $D \to d$, $E \to e$, $\cap \to .$, $\cup \to +$. Dospějeme pak k prvku

$$aec + ((da)' + b)' + ec'a + (b + d)' . a$$

množiny $B$.

*) Množinové diagramy lze sice sestrojovat i pro více než čtyři množiny, řešení úloh pomocí nich je však už nepřehledné a komplikované.

(Všimněte si, že jsme na základě úmluvy o zápisech prvků Booleovy algebry vynechali také některé „zbytečné“ závorky.)

Použijeme-li nyní ke zjednodušení zápisu tohoto prvku axiómů a vět (1) až (25), dostaneme postupně

$$aec + ((da)' + b)' + ec'a + (b + d)' . a = aec + ec'a +$$
$$+ ((da)')'b' + b'd'a = ae . (c + c') + dab' + b'd'a =$$
$$= ae . 1 + ab' . (d + d') = ae + ab' = a . (e + b')$$

Poslední výraz opět zcela formálně přepíšeme do symboliky užívané v $(\tilde{M}, \cup, \cap, ')$. Dospíváme k závěru ... $A \cap (E \cup B')$.

Náš příklad lze řešit také takto: Přepíšeme-li každý z axiómů a vět (1)—(25) do symboliky používané v $(\tilde{M}, \cup, \cap, ')$, bude pravdivou větou o prvcích z $\tilde{M}$. Použijeme-li jich pak k úpravě zápisu uvažované množiny, dostaneme

$$(A \cap E \cap C) \cup ((D \cap A)' \cup B)' \cup (E \cap C' \cap A) \cup$$
$$\cup ((B \cup D)' \cap A) = ((A \cap E) \cap C) \cup ((A \cap E) \cap$$
$$\cap C') \cup (((D \cap A)')' \cap B') \cup (B' \cap D' \cap A) =$$
$$= ((A \cap E) \cap (C \cup C')) \cup (A \cap B' \cap D) \cup (A \cap$$
$$\cap B' \cap D') = (A \cap E \cap M) \cup ((A \cap B') \cap (D \cup$$
$$\cup D')) = (A \cap E) \cup ((A \cap B') \cap M) = (A \cap E) \cup$$
$$\cup (A \cap B') = A \cap (E \cup B')$$

Sami posuďte, který z obou způsobů řešení se jeví pohodlnější a elegantnější.

**Příklad 29:** Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývá výroková formule

$$((X \Rightarrow Y) \wedge (X' \Rightarrow Z')) \vee (Y' \wedge Z')$$

při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za X, Y, Z.

*Řešení*: Přejděme od našeho příkladu k tomuto úkolu: Určit všechny uspořádané trojice pravdivostních hodnot výroků dosazovaných za X, Y, Z, pro něž platí

$$\text{ph}\,[((X \Rightarrow Y) \wedge (X' \Rightarrow Z')) \vee (Y' \wedge Z')] = 0$$

Jestliže rozřešíme tento úkol, bude už v podstatě vyřešen i celý příklad.

Z úvah provedených ve 2. kapitole plyne, že můžeme bez obav „$X \Rightarrow Y$" zaměnit „$X' \vee Y$" a „$X' \Rightarrow Z'$" nahradit „$(X')' \vee Z'$". Označme dále $\text{ph}(X) = x$, $\text{ph}(Y) = y$, $\text{ph}(Z) = z$.

Náš úkol lze potom přeformulovat ještě takto:

Řešte rovnici $$(x'+y).((x')'+z')+y'z' = 0 \qquad (28)$$

o třech proměnných $x$, $y$, $z$ v množině $H \times H \times H$.

Vzhledem k tomu, že algebra pravdivostních hodnot $(H, +, ., ')$ je modelem dvouprvkové Booleovy algebry $(D, +, ., ')$, můžeme přejít k řešení rovnice (28) v množině $D \times D \times D$.*)

Použijme axiómů a vět (1)—(25) k úpravě její levé strany:

$$(x'+y).((x')'+z')+y'z' = (x'+y).(x+z')+y'z' =$$
$$= x'x+yx+x'z'+yz'+y'z' = yx+x'z'+z'.(y+y') =$$
$$= yx+(x'z'+z') = yx+z'$$

---

*) Po formální stránce bude zápis celého postupu řešení v obou případech zřejmě zcela shodný.

Přecházíme tedy k řešení rovnice $yx + z' = 0$ o proměnných $x$, $y$, $z$ z množiny $D$.

Podle (22) je $yx+z' = 0$ právě tehdy, když platí $yx = 0$ a zároveň $z' = 0$. Z tabulky 7 v kapitole 2 je vidět, že $yx = 0$, právě když je $y = 0$ nebo $x = 0$.

Dospíváme k závěru, že množina všech řešení rovnice (28) je rovna $\{[0, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 1]\}$.

Odtud už můžete sami formulovat odpověď, jež je požadována v textu příkladu. Zkouškou dosazením do zkoumané výrokové formule se můžete přesvědčit, že jsme počítali správně.

Zkuste ještě pro srovnání vyřešit náš příklad „tabulkovou metodou".

Další úloha je slovní, podmínky v textu nejsou matematizovány. Ukážeme na ní dva různé způsoby matematizace a několik různých metod řešení.

**Příklad 30:** Z města H do města K povede trať nové dálkové autobusové linky. Komise odborníků rozhoduje, ve kterých z měst A, B, C, D, která leží na této trati, má být zřízena zastávka. Byly podány tyto návrhy:

1. člen komise: Není vhodné zřizovat zastávku v obou z měst B a C, ale je nutné, aby autobus stavěl v B nebo v D.

2. člen komise: Autobusová zastávka by měla být určitě v C nebo v B; jsem dále proti tomu, aby byla současně v městech A a C.

3. člen komise: Není možné, aby byla zastávka zřízena v B a přitom nebyla zřízena v A. Jsem také proti tomu, aby autobus stavěl ve všech třech městech B, C a D.

Ve kterých z měst A, B, C, D byly zbudovány zastávky této autobusové linky, víme-li, že všechny návrhy byly respektovány a žádný další návrh nebyl podán?

*Řešení*: I. Pokusme se nejprve všechny podmínky z textu úlohy matematizovat tak, abychom dospěli k množinovým situacím.

Zvolme za rámec našich úvah množinu všech autobusových linek vedoucích z města H do města K a označme ji písmenem $Z$. Písmeny $A$, $B$, $C$, $D$ označme postupně tyto podmnožiny množiny $Z$:

$A$ ... množina všech autobusových linek, které staví v A
$B$ ... množina všech autobusových linek, které staví v B
$C$ ... množina všech autobusových linek, které staví v C
$D$ ... množina všech autobusových linek, které staví v D

Naším úkolem je určit takovou podmnožinu množiny $Z$, do níž patří „naše" autobusová linka. Vyjádřeme všechny podmínky z textu úlohy pomocí podmnožin $A$, $B$, $C$, $D$ a operací s nimi:
1. člen komise navrhuje, aby linka patřila do množiny $(B \cap C)' \cap (B \cup D)$.
2. člen komise zastává názor, že autobusová linka má patřit do množiny $(C \cup B) \cap (A \cap C)'$.
3. člen komise požaduje, aby tato linka patřila do množiny $(B \cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$. Promyslete důkladně všechna tři tvrzení!

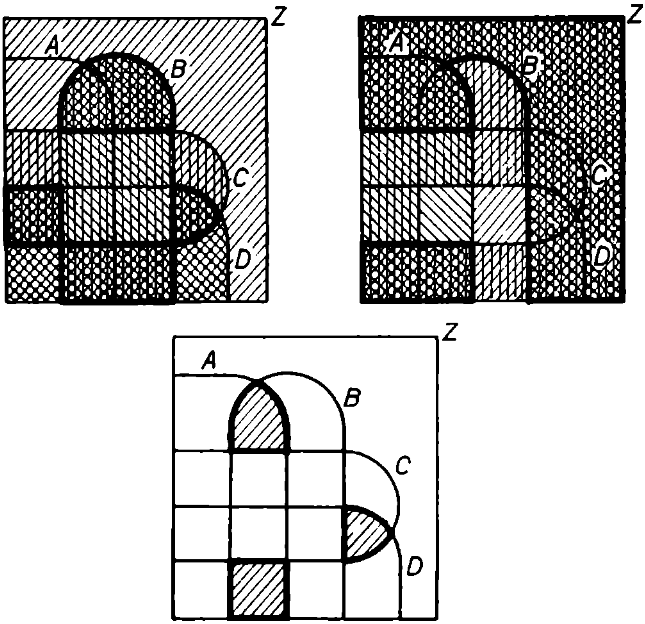
Vzhledem k tomu, že všechny tři návrhy byly schváleny, musí nově zaváděná linka patřit do průniku všech tří uvedených množin, tj. do množiny

$$(B \cap C)' \cap (B \cup D) \cap (C \cup B) \cap (A \cap C)' \cap (B \cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$$

Jenom na základě tohoto poměrně složitého zápisu množiny dáme asi těžko ihned odpověď. Pokusme se proto tento zápis co nejvíce zjednodušit.

a) Vyřešme nejprve daný úkol **užitím Vennova diagramu** pro čtyři množiny $A$, $B$, $C$, $D$. Na obrázku 14a je sestrojen obraz množiny $(B \cap C)' \cap (B \cup D) \cap \cap (C \cup B)$, na obrázku 14b je znázorněna množina $(A \cap C)' \cap (B \cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$. Na obrázku 14c je potom sestrojen obraz průniku těchto dvou množin.

Z obrázku 14c můžeme vyčíst tyto závěry: Nově zaváděná autobusová linka patří buď do množiny



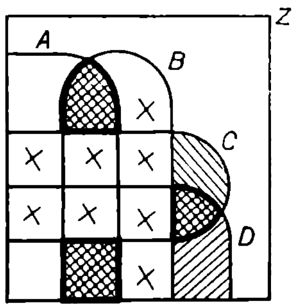

Obr. 14a, b, c

$A \cap B \cap C' \cap D'$ nebo do množiny $A \cap B \cap C' \cap D$ nebo do množiny $A' \cap B' \cap C \cap D$. Po schválení všech tří návrhů zůstávají tedy tyto možnosti pro zřízení zastávek:

Autobus bude stavět jenom ve městech A, B;
autobus bude stavět jenom ve městech A, B, D;
autobus bude stavět jenom ve městech C, D.

Zkouškou dosazením do textu úlohy se přesvědčte o správnosti uvedených závěrů.

Nemohli bychom vyřešit náš příklad Vennovým diagramem nějak elegantněji a jednodušeji než jsme provedli zde? Co kdybyste předem „vyškrtali" všechna pole Vennova diagramu, jež jsou obrazy těch podmnožin množiny $Z$, do nichž autobusová linka nemůže patřit (tj. například $B \cap C$, $A \cap C$ atd.) a pracovali už jenom se zbývajícími poli diagramu? Porovnejte své výsledky s obrázkem 15.




Obr. 15

b) Pro srovnání s metodou Vennova diagramu ukažme zjednodušení zápisu naší množiny booleovským výpočtem. Přejděme k zápisu v symbolice Booleovy algebry a použijme při úpravách axiómů a vět (1)—(25):

$$(bc)' . (b + d) . (c + b) . (ac)' . (ba')' . (bcd)' =$$
$$= [(b' + c') . ((b' + c') + d')] . (c + b) . (a' + c') . (b + d) .$$
$$. (b' + a) = (b' + c') . (c + b) . (a' + c') . (bb' + db' + ba +$$
$$+ da) = (b'c + c'b) . (a' + c') . (db' + ba + da) = (a'b'c +$$
$$+ a'bc' + bc') . (db' + ba + da) = (a'b'c + bc') . (db' + ba +$$
$$+ da) = a'b'cd + bc'db' + a'b'cba + bc'ba + a'b'cda +$$
$$+ bc'da = a'b'cd + abc' + abc'd = a'b'cd + abc' . (d + d') +$$
$$+ abc'd = a'b'cd + abc'd + abc'd'$$

Vrátíme-li se zpět k zápisu v množinové algebře, dostaneme

$$(A' \cap B' \cap C \cap D) \cup (A \cap B \cap C' \cap D) \cup (A \cap$$
$$\cap B \cap C' \cap D')$$

Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

II. Matematizujme podmínky z textu úlohy tak, abychom dospěli k problému z logiky.

Vyhledejme nejprve v textu všechny „jednoduché" výroky a označme je písmeny:

S ... autobus bude stavět v městě A,
T ... autobus bude stavět v městě B,
U ... autobus bude stavět v městě C,
V ... autobus bude stavět v městě D.

Zapišme symbolicky pomocí písmen S, T, U, V a znaků

„$\vee$", „$\wedge$", „$'$" všechny výroky jednotlivých členů komise.

1. člen ... $(T \wedge U)' \wedge (T \vee V)$
2. člen ... $(U \vee T) \wedge (S \wedge U)'$
3. člen ... $(T \wedge S')' \wedge (T \wedge U \wedge V)'$

Naším úkolem je určit všechny uspořádané čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro něž je pravdivá konjunkce všech těchto tří výroků. Máme tedy určit všechny uspořádané čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro které jsou zároveň pravdivé výroky $(T \wedge U)'$, $T \vee V$, $U \vee T$, $(S \wedge U)'$, $(T \wedge S')'$, $(T \wedge U \wedge V)'$.

a) Vyřešme tento úkol nejprve „tabulkovou metodou". Prověřte, zda řešení uvedené v následující tabulce je správné.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ph (S) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ph (T) | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ph (U) | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| ph (V) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ph $(T \wedge U)$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ph $((T \wedge U)')$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ph $(T \vee V)$ | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ph $(T \vee U)$ | | | 1 | 1 | 1 | | 0 | | | | 1 | 1 | 1 | | 0 | |
| ph $(S \wedge U)$ | | | 0 | 0 | 1 | | | | | | 0 | 0 | 0 | | | |
| ph $((S \wedge U)')$ | | | 1 | 1 | 0 | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | |
| ph $(S')$ | | | 0 | 0 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | |
| ph $(T \wedge S')$ | | | 0 | 0 | | | | | | | 1 | 1 | 0 | | | |
| ph $((T \wedge S')')$ | | | 1 | 1 | | | | | | | 0 | 0 | 1 | | | |
| ph $(T \wedge U \wedge V)$ | | | 0 | 0 | | | | | | | | | 0 | | | |
| ph $((T \wedge U \wedge V)')$ | | | 1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | |

Z tabulky zjišťujeme, že požadované vlastnosti mají tyto čtveřice pravdivostních hodnot: [1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]. Odtud dospějeme k týmž třem možnostem pro zřízení autobusových zastávek jako při předchozích metodách řešení.

b) Vyřešme úkol určit všechny čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro které je

$$\text{ph}[(\text{T} \wedge \text{U})' \wedge (\text{T} \vee \text{V}) \wedge (\text{U} \vee \text{T}) \wedge (\text{S} \wedge \text{U})' \wedge (\text{T} \wedge \wedge \text{S}')' \wedge (\text{T} \wedge \text{U} \wedge \text{V})'] = 1,$$

**booleovským výpočtem.**

Po přepisu do symboliky dvouprvkové Booleovy algebry $(D, +, ., ')$ docházíme k problému řešit rovnici

$$(tu)' . (t+v) . (u+t) . (su)' . (ts')' . (tuv)' = 1$$

o čtyřech proměnných $s, t, u, v$ v množině $D \times D \times D \times \times D$.

Po úpravě levé strany rovnice (všimněte si metody I.b) dostáváme

$$s't'uv + stu'v + stu'v' = 1$$

Z tabulky 6 z 2. kapitoly je vidět, že čtveřice $[s, t, u, v]$ patří do množiny všech řešení této rovnice, právě když platí $s't'uv = 1$ nebo $stu'v = 1$ nebo $stu'v' = 1$.
Podle (23) je $s't'uv = 1$ právě tehdy, když zároveň platí

$$\begin{aligned} s' &= 1, t' = 1, u = 1, v = 1, \text{ čili} \\ s &= 0, t = 0, u = 1, v = 1. \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme další dvě řešení rovnice:

$$\begin{aligned} s &= 1, t = 1, u = 0, v = 1 \\ s &= 1, t = 1, u = 0, v = 0 \end{aligned}$$

Množina všech řešení dané rovnice je tedy rovna {[0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 0]}. Odtud už snadno dojdeme k týmž „kombinacím" zastávek jako při všech předchozích způsobech řešení úlohy.

*Poznámka*: Někteří z vás jistě umíte řešit tyto typy úloh pomocí uzlových diagramů. Zkuste i tento způsob řešení!

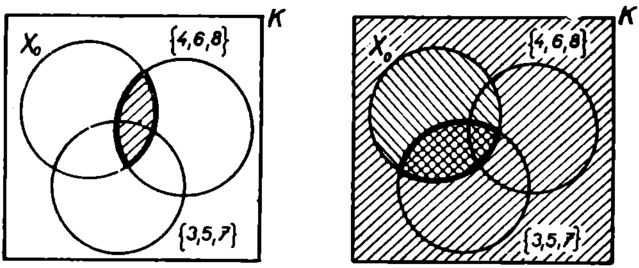
**Příklad 31:** Řešte rovnici

$$X \cap \{4, 6, 8\} = (X' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X \tag{29}$$

o jedné proměnné $X$ v množině $\widehat{K}$ všech podmnožin množiny $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

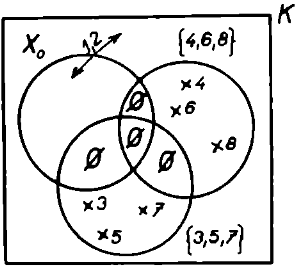
*Řešení*: I. Příklad vyřešme nejprve užitím Vennova diagramu. Předpokládejme, že množina všech řešení rovnice (29) v $\widehat{K}$ je neprázdná množina, tj. existuje aspoň jedna podmnožina $X_0$ množiny $K$, pro niž je
$X_0 \cap \{4, 6, 8\} = (X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$
pravdivý výrok.

Sestrojme třikrát Vennův diagram pro množiny $X_0$, $\{4, 6, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$ (obrázky 16a, b, c). Na obrázku 16a je sestrojen obraz množiny $X_0 \cap \{4, 6, 8\}$, na obrázku 16b je znázorněna množina $(X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$.




Obr. 16a, b

Množiny $X_0 \cap \{4, 6, 8\}$ a $(X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$ jsou si rovny, musí tedy každé pole diagramu, jež je částí obrazu právě jedné z těchto množin, znázorňovat prázdnou množinu (vzpomeňme na úvahy při řešení příkladu 5 v 1. kapitole). Vyhledejme všechna taková pole a na obrázku 16c do nich vepišme znak pro prázdnou množinu. Vzhledem k tomu, že průnik množin $\{4, 6, 8\}$ a $\{3, 5, 7\}$ je prázdná množina, lze znak $\emptyset$ vepsat do dalších dvou polí.




Obr. 16c

Nyní se na tomto obrázku pokusme obraz každého prvku množiny $K$ „umístit" do některého z polí diagramu, jež není označeno znakem $\emptyset$. Zřejmě lze jednoznačně zakreslit každý z obrazů prvků 4, 6, 8, 3, 5, 7. Obrazy čísel 1 a 2 nelze jednoznačně umístit, mohou se nalézat v kterémkoliv ze dvou zbývajících polí, v němž dosud není zakreslen obraz žádného prvku množiny $K$. Tuto skutečnost vyznačíme na obrázku 16c obloučkem spojujícím příslušná pole a nad něj připíšeme číslice 1 a 2.

Z obrázku už snadno nahlédneme, že platí: je-li $X_0$ řešením rovnice (29), pak je $X_0 \subset \{1, 2\}$. Vypišme všechny podmnožiny množiny $K$, pro něž platí tato podmínka: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$.

Zkouškou dosazením do dané rovnice „prověřte“ postupně každou z těchto množin. Zjistíte, že množina všech řešení je $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

II. Ukažme řešení rovnice (29) booleovským výpočtem. Přejděme k zápisu v Booleově algebře ($\{4, 6, 8\} \to a$, $\{3, 5, 7\} \to b$) a použijme axiómů a vět (1) až (25):

$$\begin{aligned} ax &= (x' + b) . x \\ ax &= x'x + bx \\ ax &= bx \end{aligned} \tag{30}$$

$$(ax)' . bx + ax . (bx)' = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned} (a' + x') . bx + ax . (b' + x') &= 0 \\ a'bx + ab'x &= 0 \\ (a'b + ab') . x &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Přejděme zpět k symbolice množinové algebry:

$$[(\{4, 6, 8\}' \cap \{3, 5, 7\}) \cup (\{4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 7\}')] \cap X = \emptyset$$

Po úpravě levé strany této rovnice dostaneme (prověřte!)

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap X = \emptyset \tag{33}$$

Přitom (33) platí právě tehdy, když je $X \subset \{1, 2\}$. Tento závěr je shodný s výsledkem předchozí metody řešení; množina všech řešení je $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Jistě jste si všimli, že při řešení booleovských rovnic jsme nijak nezdůrazňovali, že je třeba provádět zkoušku. Zabývejme se hlouběji tímto problémem. Vyjděme z konkrétního příkladu; zkoumejme z tohoto hlediska postup řešení rovnice (29).

Představme si, že rovnice (30) až (32) jsou přepsány do symboliky množinové algebry (případně si je do této symboliky přepište). Označme množiny všech řešení rovnic (29)—(33) postupně písmeny $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$.

Snadno nahlédneme, že platí $P = P_1$ (upravovali jsme pouze pravou stranu rovnice (29); přitom pro všechna $b$, $x$ množiny $B$ je $(x' + b).x = bx$). Od rovnice (30) jsme dospěli k rovnici (31) užitím věty (24). Jestliže si ji znovu připomenete, je ihned zřejmé, že platí $P_1 = P_2$. Sami prověřte, že je také $P_2 = P_3$, $P_3 = P_4$. Odtud plyne $P = P_4$.

Z této úvahy vyplývá, že v našem případě není třeba zkoušku provádět; je pro nás nejvýše kontrolou správnosti výpočtů.

Tento závěr je možno zobecnit na všechny případy booleovských rovnic a jejich soustav, při jejichž řešení používáme jenom axiómů a vět (1)—(25).

Některým z vás se možná zdá úprava rovnic užitím věty (24) zbytečně komplikovaná. Můžete namítat, že po této úpravě (tj. po „anulování" rovnice) dostaneme obvykle na levé straně dané rovnice složitější výraz, který pak často zjednodušujeme dosti pracně. Přitom při řešení „číselných" rovnic používáme *ekvivalentní**) *úpravy*, jež jsou daleko „jednodušší":
*Násobíme obě strany rovnice stejným číslem různým od nuly; přičítáme k oběma stranám rovnice stejné číslo.*

Nebylo by vhodnější namísto věty (24) (respektive

---

*) Volně řečeno, o ekvivalentní úpravě hovoříme tehdy, když platí: upravíme-li pomocí ní nějakou rovnici, pak množiny všech řešení této rovnice a rovnice upravené jsou si rovny.

(25)) při řešení booleovských rovnic užívat takovýchto jednoduchých úprav?

Vraťme se k rovnici (30) z příkladu 31 a vynásobme obě její strany například prvkem $b'$ ($b \neq 1$, tedy $b' \neq 0$):

$$axb' = bxb'$$
$$ab'x = 0$$

Po přepisu do symboliky množinové algebry ($\hat{K}$, $\cup$, $\cap$, $'$) dostáváme

$$\{4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 7\}' \cap X = \emptyset$$

a po úpravách levé strany této rovnice

$$\{4, 6, 8\} \cap X = \emptyset$$

Odtud plyne $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

Porovnáme-li tento závěr s množinou všech řešení rovnice (29), můžeme konstatovat, že *násobení obou stran booleovské rovnice daným prvkem není ekvivalentní úpravou.* Sice jsme tedy „vyřešili" rovnici (29) tímto způsobem rychleji, ale musíme nyní provést ještě zkoušku, která bude dosti zdlouhavá — je nutno „prověřit" 32 podmnožin množiny $K$.

Obdobně zjistíme, že ani *úprava „přičtení stejného prvku k oběma stranám rovnice" není ekvivalentní.* Jestliže například přičtete k oběma stranám rovnice (30) prvek 1, dostanete nakonec $X \subset K$.

V čem tkví příčina našeho „neúspěchu"?

Jistě víte, že *pro všechna reálná čísla $a$, $b$, $c$ platí věty: Je-li $a+c = b+c$, pak je $a = b$; je-li $ac = bc$ a zároveň $c \neq 0$, pak je $a = b$.*

Tyto věty v Booleově algebře neplatí. V modelu ($K$, $\cup$, $\cap$, $'$) z příkladu 31 je například $\{1, 2\} \cup \{3, 4,$

$5\} = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$, $\{1, 2\} \cap \{4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cap$ $\cap \{4, 5\}$ a přitom je $\{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\}$.

*Poznámka*: V příkladě 31 jsme užitím věty (24) dospěli k „anulovanému“ tvaru rovnice. Dá se obecně dokázat, že v $(B, +, ., ')$ platí: *Každou rovnici o jedné proměnné $x$ lze převést na tvar*

$$ax + bx' + c = 0\,,$$

*kde $a$, $b$, $c$ jsou konstanty z množiny $B$.*

Na závěr této kapitoly uveďme ještě jednu slovní úlohu vedoucí k řešení booleovské rovnice.

**Příklad 32:** Ve třech pavilónech A, B, C výstavního areálu jsou umístěny exponáty z českého skla a bižuterie. Detektivové Ping a Pong vyšetřují krádež vzácné křišťálové vázy, jež byla vystavena v pavilónu A. Je již zřejmé, že pachatelé jsou mezi osmi návštěvníky, které si zde pro stručnost označíme $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$. Zkušenější Ping už zná jednoho z pachatelů krádeže. Snaží se i Ponga dovést k řešení úkolu.

Pong: „Zjistil jsem, že v pavilónu A byli $a$, $e$, $h$ a s nimi nebo mezi nimi všichni pachatelé.“
Ping: „Mohu vám prozradit, že nikdo další z podezřelých tam už nebyl.“
Pong: „V pavilónu B byli všichni kromě $b$ a $c$. V pavilónu C byli určitě $d$, $f$, $g$, $h$.“
Ping: „Já jsem navíc zjistil, že v C byli také všichni ti, kteří nepatří mezi zloděje. Ale už nikdo více.“
Pong: „Ve všech třech pavilónech byli jenom $a$, $h$.“
Ping: „Správně. A teď už můžete určit jednoho pachatele a rozhodnout, kteří další z návštěvníků připadají v úvahu jako jeho společníci.“

*Řešení*: Matematizujme text naší úlohy tak, abychom dospěli k množinovým situacím.

Zvolme za rámec našich úvah množinu všech podezřelých návštěvníků a označme ji písmenem $V$; je tedy $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Množinu zlodějů označme $X$. Podmínky uvedené v textu úlohy můžeme pak zapsat takto:

Množina všech návštěvníků

v pavilónu A ... $\{a, e, h\} \cup X$
v pavilónu B ... $\{b, c\}'$
v pavilónu C ... $\{d, f, g, h\} \cup X'$

Množina návštěvníků, kteří byli ve všech pavilónech

je jednak ... $(\{a, e, h\} \cup X) \cap \{b, c\}' \cap (\{d, f, g, h\} \cup X')$
a jednak ... $\{a, h\}$

Odtud dospíváme k rovnici

$$(\{a, e, h\} \cup X) \cap \{b, c\}' \cap (\{d, f, g, h\} \cup X') = \{a, h\} \quad (34)$$

o jedné proměnné $X$.

Naším úkolem je určit množinu všech jejích řešení v množině $\widehat{V}$ všech podmnožin množiny $V$.

Řešme tento úkol booleovským výpočtem pomocí axiómů a vět (1)—(25). Přejděme k zápisu v Booleově algebře ($\{a, e, h\} \to j$, $\{d, f, g, h\} \to k$, $\{a, h\} \to m$). Všimněte si ještě, že je $\{b, c\}' = \{a, e, h\} \cup \{d, f, g, h\}$.

Sledujte pozorně jednotlivé kroky řešení a vždy si je odůvodněte podle příslušného axiómu či věty!

$$(j + x) . (j + k) . (k + x') = m$$

$$((j + x) . (j + k) . (k + x'))' . m + (j + x) . (j + k) . (k + x') .$$
$$. m' = 0$$

$$(j'x' + j'k' + k'x) . m + (j + kx) . (km' + x'm') = 0$$

$$j'x'm + j'k'm + k'xm + jkm' + kxm' + jx'm' = 0$$

$$(km' + k'm) . x + (jm' + j'm) . x' + (jkm' + j'k'm) = 0$$

Podle (22) je dále

$(km'+k'm).x = 0$ a zároveň $(jm'+j'm).x' = 0$ a zároveň $jkm'+j'k'm = 0$.

Přejděme zpět k symbolice množinové algebry; dostaneme

$$[(\{d, f, g, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{d, f, g, h\}' \cap \{a, h\})] \cap X = \emptyset \qquad (35)$$

$$[(\{a, e, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{a, e, h\}' \cap \{a, h\})] \cap X' = \emptyset \qquad (36)$$

$$(\{a, e, h\} \cap \{d, f, g, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{a, e, h\}' \cap \{d, f, g, h\}' \cap \{a, h\}) = \emptyset \qquad (37)$$

Nejprve rozhodněte, zda výrok (37) je pravdivý či nikoliv. Pravdivost tohoto výroku je zřejmě nutnou podmínkou pro to, aby množina všech řešení rovnice (34) byla neprázdná.

Zjistíte, že (37) je výrok pravdivý.

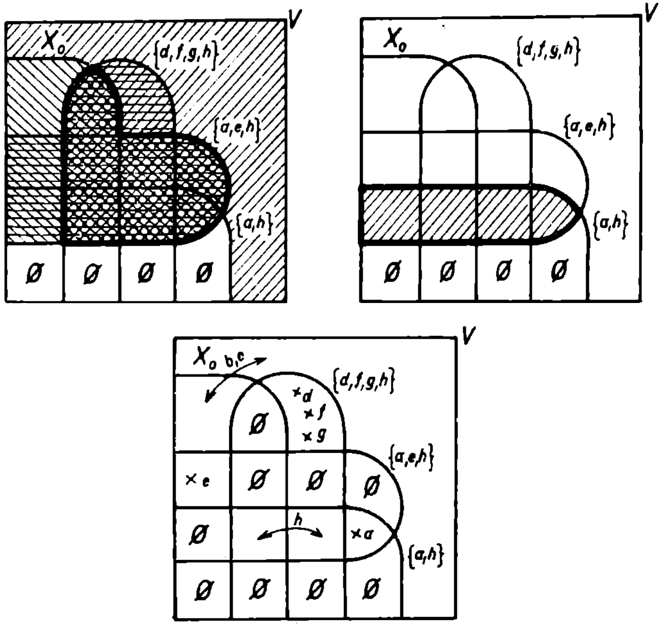
Upravte dále levé strany rovnic (35) a (36); porovnejte pak své závěry s našimi:

$$\{a, d, f, g\} \cap X = \emptyset$$
$$\{e\} \cap X' = \emptyset$$

Odsud postupně dostáváme

$$X \subset \{b, c, e, h\}$$
$$\{e\} \subset X$$

Nyní už může Pong podat řešení úkolu (zkouškou dosazením do textu příkladu se přesvědčte, že následující závěry jsou správné): Jedním z pachatelů krádeže je určitě podezřelý $e$. Další, kteří připadají v úvahu jako jeho společníci, jsou $b$, $c$, $h$. Z podezření jsou vyloučeni $a$, $d$, $f$, $g$.




Obr. 17a, b, c

Na obrázcích 17a, b, c je ještě provedeno řešení příkladu užitím Vennova diagramu pro množiny $X_0$, $\{a, e, h\}$, $\{d, f, g, h\}$, $\{a, h\}$.

## Cvičení

**1.** Řešte cvičení 2 a 3 z 1. kapitoly a cvičení 3 a 5 z 2. kapitoly booleovským výpočtem.

**2.** Zjednodušte zápisy těchto množin:

a) $(D \cap A \cap B) \cup (C \cap (A \cup E)') \cup (D' \cap (A' \cup B')') \cup$

$\cup ((A' \cap E')' \cap C)$

b) $(A \cup C) \cap (D \cap G)' \cap (A \cap B)' \cap (D \cup E) \cap (F \cup G) \cap C' \cap$

$\cap (A \cap D)' \cap (D \cap C)'$

**3.** Řešte rovnice o jedné proměnné $X$ v množině všech podmnožin množiny $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

a) $(X \cap \{4, 6, 7\}) \cup \{3, 5, 7\} = X$

b) $(X' \cup \{1, 4, 5\}) \cap (X \cup \{2, 3\}) = \varnothing$

c) $(X \cup \{1, 4, 5\}) \cap (X' \cup \{1, 2, 3\}) = \varnothing$

d) $(\{2, 4, 7\} \cap X') \cup (X \cap \{1, 2, 5\}) = \{3, 4, 5, 6\}'$

**4.** Nechť $\widehat{M}$ je množina všech podmnožin neprázdné množiny $M$. Řešte rovnici $(A \cap X) \cup (B \cap X') \cup C = \varnothing$ o proměnné $X$ z $\widehat{M}$ a parametrech $A, B, C$ z $\widehat{M}$.

**5.** Vraťte se k modelu Booleovy algebry, který byl uveden ve cvičení 4 ze 4. kapitoly. Označte nejmenší společný násobek (největší společný dělitel) prvků $r$, $s$ množiny $C$ symbolicky $\mathrm{n}\,(r, s)$ $(\mathrm{D}\,(r, s))$.

Řešte pak rovnice

a) $\mathrm{n}(\mathrm{D}(x, 2), 3) = \mathrm{D}(\mathrm{n}\,(3, x'), x)$

b) $\mathrm{D}(\mathrm{n}(x, \mathrm{D}(1, x)), 6) = \mathrm{n}\,(\mathrm{D}(x', 3), 2)$

o jedné proměnné $x$ v množině $C$.

6. Uvažujme model Booleovy algebry ($V$, $*$, $\circ$, $^-$) ze cvičení 7 ke 4. kapitole. Zvolte konkrétně $n = 3$. Řešte pak rovnici

$$\overline{([x_1, x_2, x_3] * [2, 3, 2])} * [x_1, x_2, x_3] = [2, 2, 3]$$

o jedné proměnné $[x_1, x_2, x_3]$ v množině $V$.

7. Třída II. b jistého gymnasia se chystá na výlet. Je předběžně dohodnuto, že navštíví některá z pěti výletních míst, která zde pro stručnost označíme A, B, C, D, E. Později byly podány ještě tyto upřesňující návrhy: Navštívit zároveň A i B nebo se podívat do C i D. Vynechat návštěvu C. Nenavštěvovat současně C a D. Vynechat aspoň jedno z míst E, A nebo nenavštěvovat zároveň B a E. Která výletní místa z uvedených pěti třída navštíví, předpokládáme-li, že všechny návrhy „prošly“ a jiné podány nebyly?