1. kapitola

MNOŽINY A VENNOVY DIAGRAMY

V této kapitole si stručně připomeneme některé základní poznatky o množinách a znázorňování množinových situací Vennovými diagramy.

Je-li nějaký objekt m prvkem množiny M, píšeme „$m \in M$“. Není-li m prvkem M, zapisujeme „$m \notin M$“. Říkáme, že množina je určena, jestliže o každém objektu umíme jednoznačně rozhodnout, zda je jejím prvkem či nikoliv. Množiny lze určovat tzv. charakteristickou vlastností (např. „F je množina všech prvočísel menších než číslo 8“); v případě konečných množin také výčtem, tj. vypsáním všech jejich prvků („$F = \{2, 3, 5, 7\}$“).

Prázdnou množinou nazýváme množinu, jež neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem $\emptyset$.

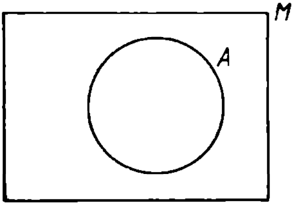
Množinu A nazýváme *podmnožinou* množiny B, právě když platí: každý prvek množiny A je také prvkem množiny B. Zapisujeme: $A \subset B$.

Říkáme, že *množiny A, B jsou si rovny*, právě když platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$. K zápisu rovnosti množin používáme obyčejného rovnítka; píšeme $A = B$.

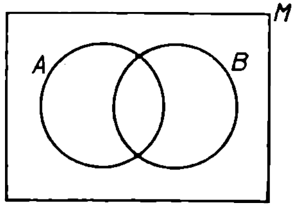
Nejsou-li splněny obě podmínky ve shora uvedené definici, říkáme, že *množiny A, B jsou různé*, a zapisujeme $A \neq B$.

Omezme v dalším rámec svých úvah na nějakou neprázdnou (jinak zcela libovolnou) množinu M. Písmeny A, B, C, D označujme podmnožiny množiny M.

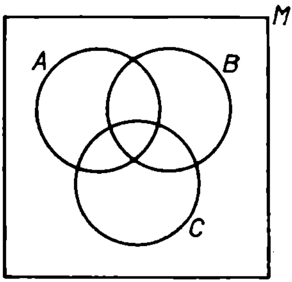
Skutečnost, že A je podmnožinou množiny M, můžeme znázornit graficky tzv. *Vennovým diagramem* (obr. 1). Obdobně ilustrujeme Vennovým diagramem skutečnost, že množiny A, B jsou podmnožinami množiny M (obr. 2).



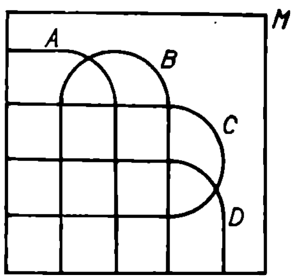
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

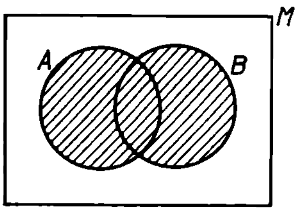
Na obrázcích 3 a 4 jsou ještě sestrojeny Vennovy diagramy pro tři množiny A, B, C a čtyři množiny A, B, C, D.

Ovály na obrázku 2 znázorňující množiny A, B rozdělí obdélník, jenž je obrazem množiny M, na čtyři části, kterým říkáme *pole Vennova diagramu*. Části obdélníka, které vznikají „skládáním" polí, nazýváme *oblasti Ven-*

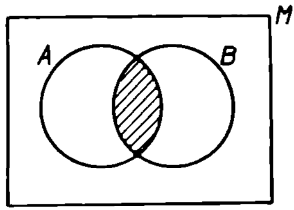
nova diagramu. Přitom pole počítáme také mezi oblasti.

Ve stejném smyslu budeme mluvit o polích a oblastech Vennových diagramů pro jednu, tři a čtyři množiny.

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *sjednocení množin* A, B a označujeme $A \cup B$. Je to množina všech těch prvků z M, které patří množině A nebo patří množině B. Přitom slůvko „*nebo*“ chápeme ve smyslu



Obr. 5



Obr. 6

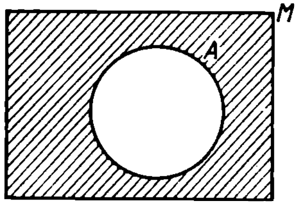
nevylučovacím (tj. do $A \cup B$ patří i prvky, které jsou z A i z B). Na obrázku 5 je vyšrafována oblast Vennova diagramu, jež je obrazem množiny $A \cup B$.

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *průnik množin* A, B a označujeme $A \cap B$. Je to množina všech těch prvků z M, jež patří A a zároveň patří B. Na obrázku 6 je vyšrafováno pole, jež znázorňuje množinu $A \cap B$.

Ke každé množině A existuje jednoznačně určená množina, jež se nazývá *doplněk množiny* A vzhledem k množině M (stručněji „doplněk množiny A“). Označujeme ji A'. Je to množina všech takových prvků z M, jež nepatří množině A. Lze ji charakterizovat těmito dvěma podmínkami:

$$A \cap A' = \varnothing, \; A \cup A' = M$$

Obraz množiny A' je vyšrafován na obrázku 7.



Obr. 7

Aplikujme nyní připomenuté definice na několika příkladech, zvláště si ukažme užití Vennových diagramů.

Příklad 1: Nechť je P_1 množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 5x + 6 = 0$, P_2 množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 4x + 3 = 0$. Určete $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, P_1'.
Řešení: Podle definice průniku množin je $x \in P_1 \cap P_2$, právě když $x \in P_1$ a zároveň $x \in P_2$, tj. právě když platí $x^2+5x+6 = 0$ a zároveň $x^2+4x+3 = 0$. Množina $P_1 \cap P_2$ je tedy rovna množině všech reálných kořenů soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x^2+5x+6 &= 0 \\ x^2+4x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešíte-li ji, zjistíte, že $P_1 \cap P_2$ je jednoprvková množina, jejímž prvkem je číslo —3, čili $P_1 \cap P_2 = \{-3\}$.
Ověřte, zda jsou správné i následující závěry o $P_1 \cup P_2$

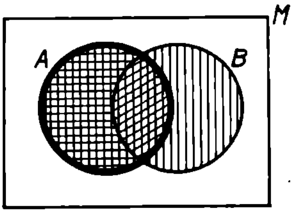
a P'_1: Množina $P_1 \cup P_2$ je rovna množině všech reálných kořenů rovnice $(x^2+5x+6).(x^2+4x+3) = 0$, neboli $P_1 \cup P_2 = \{-1, -2, -3\}$.
P'_1 je množina všech reálných čísel x, pro něž platí $x^2+5x+6 \neq 0$.

Příklad 2: Zjednodušte zápis množiny

$$[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů.

Řešení: Příklad vyřešíme užitím Vennova diagramu pro množiny A, B (viz obrázek 8). Svislými čarami vyšrafu-



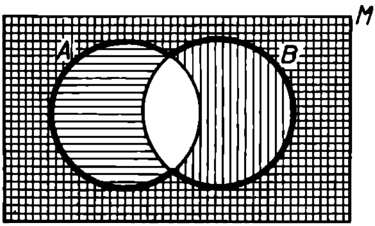
Obr. 8

jeme oblast, jež je obrazem množiny $A \cup B$, vodorovnými čarami oblast znázorňující $A \cap B'$ a čarami šikmými obraz množiny $A \cap B$. Obrazem uvažované množiny je potom oblast, která se skládá ze všech těch polí Vennova diagramu, jež jsou vyšrafována svisle a zároveň vodorovně, a dále ze všech polí vyšrafovaných šikmými čarami. Ohraničíme tuto oblast silnější čarou. Pak je ihned vidět, že zkoumaná množina $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$ je rovna množině A.

Příklad 3: Rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B množiny M platí:

$$(A' \cap B')' = A \cup B$$

Řešení: Sestrojme ve Vennově diagramu pro množiny A, B (obr. 9) postupně obrazy množin A', B', $A' \cap B'$. Pole, jež je na obrázku 9 vyšrafováno svislými i vodorovnými čarami, znázorňuje množinu $A' \cap B'$; oblast diagramu, jež je ohraničena silnější čarou, je potom obrazem množiny $(A' \cap B')'$ a zřejmě také znázorňuje množinu



Obr. 9

$A \cup B$ (srovnej s obrázkem 5). Platí tedy $(A' \cap B')' = A \cup B$ pro všechny podmnožiny A, B množiny M.

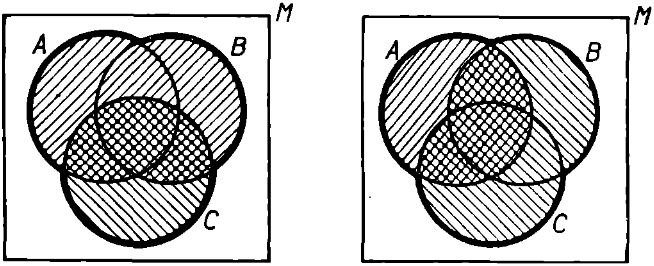
Příklad 4: Dokažte, že pro všechny podmnožiny A, B, C množiny M platí:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Řešení: Vyřešme daný úkol užitím Vennova diagramu. Sestrojme dvakrát Vennův diagram pro množiny A, B, C (obr. 10a, 10b). Na obrázku 10a je silnější čarou ohraničena oblast, jež je obrazem množiny $(A \cup B) \cup C$, na obrázku 10b oblast, jež znázorňuje množinu $A \cup (B \cup C)$. Porovnáním těchto oblastí zjišťujeme, že se skládají z týchž polí, znázorňují tedy sobě rovné množiny.

Druhou část příkladu vyřešte už každý samostatně.

Z řešení příkladu 4 plyne, že při tvoření sjednocení a průniku tří množin nezáleží na uzávorkování. Můžeme tedy psát „$A \cup B \cup C$“, „$A \cap B \cap C$“.



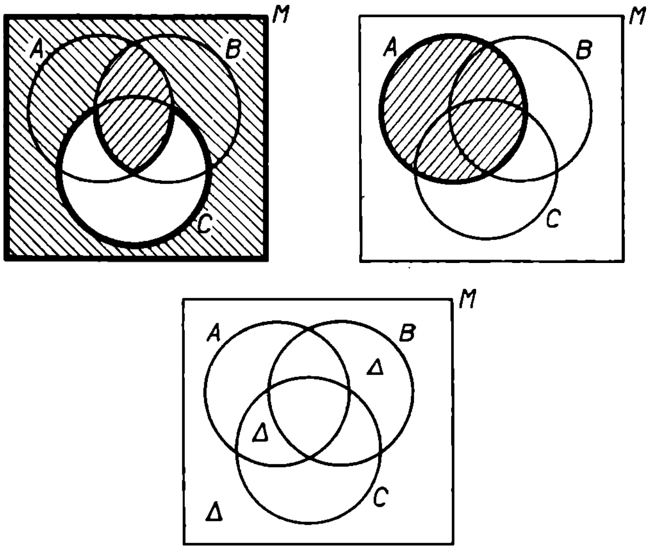
Obr. 10a, b

Poznámka: Vennovy diagramy názorně ilustrují různé množinové situace a jsou vhodným prostředkem pro řešení množinových úloh. Tyto diagramy zde chápeme ale pouze intuitivně, v podstatě jako jisté „obrázky“, jež znázorňují množiny. To s sebou přináší řadu problémů. Můžete například právem namítnout, že důkazy vět z příkladů 3 a 4 nejsou důkazy v přesném matematickém smyslu. Lze ovšem provést úvahy, z nichž plyne, že Vennovy diagramy můžeme používat skutečně oprávněně a bez jakýchkoliv obav. Tyto úvahy jsou však značně komplikované a nebudeme se jimi zde zabývat.

Příklad 5: Nechť jsou A, B, C podmnožiny množiny M. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby platilo

$$(A \cap B) \cup C' = A\,!$$

Řešení: Sestrojme třikrát Vennův diagram pro množiny A, B, C (obr. 11a, 11b, 11c). Na obrázku 11a znázorníme množinu $(A \cap B) \cup C'$, na obrázku 11b množinu A. Na obrázku 11c vyznačíme nějakým znakem, například $\triangle$, všechna ta pole Vennova diagramu, jež jsou částí obrazu právě jedné ze zkoumaných množin. Je-li některé z takto vyznačených polí obrazem neprázdné množiny, pak jsou množiny $(A \cap B) \cup C'$ a A různé.



Obr. 11a, b, c

Jedině v tom případě, kdy každé z těchto polí znázorňuje prázdnou množinu, jsou uvažované množiny sobě rovny. Vyznačená pole jsou postupně obrazy množin $A \cap B' \cap \cap C$, $A' \cap B \cap C'$, $A' \cap B' \cap C'$.

Jsou tedy množiny $(A \cap B) \cup C'$, A sobě rovny právě tehdy, když zároveň platí: $A \cap B' \cap C = \varnothing$, $A' \cap \cap B \cap C' = \varnothing$, $A' \cap B' \cap C' = \varnothing$.

Cvičení

1. Zvolme za rámec svých úvah množinu všech čtyřúhelníků v rovině. Písmenem A označme množinu všech rovnostranných čtyřúhelníků, písmenem B množinu všech čtyřúhelníků, které mají všechny vnitřní úhly pravé. Rozhodněte, zda platí:

a) $A \cap B$ je množina všech čtverců.
b) $A \cup B$ je množina všech čtyřúhelníků, které mají aspoň dvě osy souměrnosti.
c) B' je množina všech čtyřúhelníků, které mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý nebo tupý.
Určete dále množiny $A \cap B'$, $A' \cup B'$.

2. Zjednodušte zápisy těchto množin:
a) $[(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A')$
b) $[(A \cup C) \cap B'] \cup B$
c) $(A \cap B \cap D') \cup (D' \cap B' \cap A') \cup (A \cap B' \cap D') \cup (B \cap \cap D' \cap A')$

3. Rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B, C, D množiny M platí:

a) $A \cup (A \cap B) = A$
b) $(A' \cup B')' = A \cap B$
c) $(A \cap D) \cup (A \cup D) = A \cap D'$

d) $(B \cap A') \cup (D' \cap A) = B \cup (A \cap D')$
e) $(A \cap B) \cup C \subset A \cup B \cup C$

4. A, B, C jsou podmnožiny množiny M. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby platilo:

a) $A \cap B' = A$ b) $A \cup B = A \cup C$

c) $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C') = (C' \cap B) \cup A$