2. kapitola

CO JE PRAVDĚPODOBNOST?

2.1. Statistická pravděpodobnost

V ***teorii pravděpodobnosti*** užíváme názvů

POKUS — VÝSLEDEK POKUSU — JEV.

Pokus zpravidla může skončit různými výsledky a předem nedovedeme určit, který výsledek nastane. Říkáme, že jde o ***náhodný*** pokus.

PŘÍKLADY

Pokus ***P***	Výsledek pokusu ($V_1, V_2, \dots$)
— Hodíme mincí.	V_1: Padne rub. V_2: Padne líc.
— Hodíme hrací kostkou.	V_1: Padne jedno oko. V_2: Padnou dvě oka. V_3: Padnou tři oka. . . . .
— Lékař zjišťuje stav chrupu 13letého žáka určité školy.	V_1: Chrup je bezvadný. V_2: Chrup má jediný zub s kazem. V_3: Chrup má právě dva zuby s kazem. . . . .

— Zasadili jsme semeno hrachu z určitého pytle na určitý záhon. V_1: Semeno hrachu vzklíčilo. V_2: Semeno hrachu nevzklíčilo.

Každou část (podmnožinu) množiny všech možných výsledků daného pokusu $\boldsymbol{P}$ nazýváme jevem.

PŘÍKLADY

— Pokus: Hodíme mincí.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: padne líc (L), padne rub (R); $\boldsymbol{W} = \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$

Jev $\boldsymbol{J}_1$: padne líc; tedy $\boldsymbol{J}_1 = \{\mathsf{L}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_2$: padne rub; tedy $\boldsymbol{J}_2 = \{\mathsf{R}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_3$ (jev ***jistý***): padne rub nebo líc; tedy $\boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{W} = \{\mathsf{R}, \mathsf{L}\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_4$ (jev ***nemožný***): nepadne ani líc ani rub; tedy $\boldsymbol{J}_4 = \emptyset$.

— Pokus: Hodíme hrací kostkou.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: padne jedno oko (1), padnou dvě oka (2), ..., padne šest ok (6); $\boldsymbol{W} = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_1$: padne jedno oko; $\boldsymbol{J}_1 = \{1\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_2$: padne sudý počet ok; $\boldsymbol{J}_2 = \{2, 4, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_3$: padne aspoň 5 ok; $\boldsymbol{J}_3 = \{5, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_4$ (jev jistý): padne aspoň jedno oko; $\boldsymbol{J}_4 = \boldsymbol{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Jev $\boldsymbol{J}_5$ (jev nemožný): padne více než 6 ok; $\boldsymbol{J}_5 = \emptyset$.
. . . .

— Pokus: Zjistíme stav chrupu 13letého chlapce určité školy.

Množina $\boldsymbol{W}$ všech výsledků: chrup je bez kazu (0), jediný zub má kaz (1), právě dva zuby mají kaz (2), atd.

Jev J_1: chrup je bez kazu; $J_1 = \{0\}$.
Jev J_2: chrup má nejvýše dva zuby s kazem;
$J_2 = \{0, 1, 2\}$.
Jev J_3: chrup má aspoň jeden zub s kazem;
$J_3 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

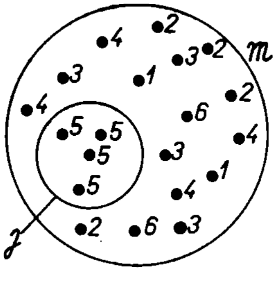
. . . .

Jestliže měl pokus výsledek, který patří jevu (množině) J, říkáme, že ***„nastal jev J“***.

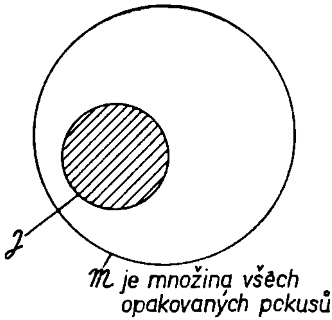
Zpravidla neprovádíme pokus jediný. Při opakování pokusu předpokládáme, že výsledek žádného z pokusů nezávisí na výsledcích předchozích pokusů. Říkáme, že pokusy jsou ***nezávislé***.

PŘÍKLAD

Pokus: Hodíme hrací kostkou. Výsledek pokusu: Padne 5 ok. Množina ***M*** pokusů: Hodili jsme 20-krát kostkou (opakování pokusu). Výsledky pokusů udává Vennův diagram na obrázku 35. Jev J: padne 5 ok. V množině ***M*** jsou čtyři pokusy, pro které nastal jev J.



Obr. 35



Obr. 36

Množina M všech opakovaných pokusů P má zpravidla mnoho prvků; tento počet pokusů označíme n. Všechny pokusy z množiny M, při nichž nastal jev J, tvoří jistou podmnožinu množiny M (na obrázcích ji zpravidla označujeme opět J). Počet prvků této podmnožiny značíme a a nazýváme

ČETNOST JEVU J

v množině M.

Racionální číslo dané zlomkem $\frac{a}{n}$, nazýváme

RELATIVNÍ ČETNOST JEVU J

v množině M.

Při mnohonásobném opakování téhož pokusu P za stejných podmínek relativní četnost jevu J zůstává přibližně stejná, blízká nějakému pevnému číslu p. Toto číslo se nazývá

PRAVDĚPODOBNOST JEVU J.

Pravděpodobnost jevu J lze přibližně určit jako relativní četnost jevu J v „dostatečně“ velké množině pokusů. Proto místo relativní četnost jevu J užíváme též názvu

STATISTICKÁ PRAVDĚPODOBNOST JEVU J.

Pravděpodobnost jevu J	$$p \doteq p_0 = \frac{a}{n}$$	Četnost jevu J
Statistická pravděpodobnost jevu J		Počet všech provedených pokusů

Pamatujte: *Pravděpodobnost (statistická pravděpodobnost) jevu **J** je číslo p, pro které platí*

$$0 \leqq p \leqq 1 .$$

Nemožný jev má pravděpodobnost $p = 0$, jistý jev má pravděpodobnost $p = 1$.

PŘÍKLAD

Pokus: Házíme mincí. Jev ***J***: Padne líc.

Počet opakovaných pokusů; (n)	Četnost jevu J; (a)	Statistická pravděpodobnost jevu J; (p_0)
100	48	$\frac{48}{100} = 0{,}48 = 48\ \%$
200	98	$\frac{98}{200} = 0{,}49 = 49\ \%$
400	212	$\frac{212}{400} = 0{,}53 = 53\ \%$
1 000	514	$\frac{514}{1\,000} = 0{,}514 = 51{,}4\ \%$

Všechny statistické pravděpodobnosti se „pohybují" kolem $0{,}5 = 50\ \%$. Můžeme vyslovit domněnku, že pravděpodobnost jevu ***J*** je asi 50 %.

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Hodíme hrací kostkou. Množina ***M*** vznikne tak, že pokus opakujeme 200krát ($n = 200$).

a) Jev J_1: padne jedno oko.
Jev J_2: padnou dvě oka.

.

.

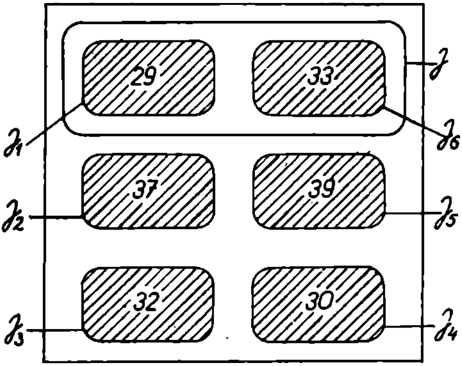
Jev J_6: padne šest ok.

b) Jev J: padne jedno oko nebo šest ok.

Výsledky opakovaného pokusu jsou zaznamenány v tabulce 1 a ve Vennově diagramu (obr. 37).

Tabulka 1

Jev	Četnost jevu
J_1	29
J_2	37
J_3	32
J_4	30
J_5	39
J_6	33
Celkem	200



Obr. 37

Pravděpodobnost jevu J_1 je přibližně rovna statistické pravděpodobnosti:

$$p_1 = \frac{29}{200} = 0{,}145 \doteq 15\ \%$$

Podobně vypočítáme pravděpodobnosti jevů J_2, J_3, J_4, J_5, J_6.

Výsledky výpočtů jsou uvedeny v tabulce:

Jev	Pravděpodobnost
J_1	0,145 $\doteq$ 15 %
J_2	0,185 $\doteq$ 18 %
J_3	0,16 = 16 %
J_4	0,15 = 15 %
J_5	0,195 = 20 %
J_6	0,165 $\doteq$ 16 %
Celkem	1,00 = 100 %

Pro každý pokus z množiny M nastane právě jeden z jevů $J_1, J_2, \ldots, J_6$. Proto pro součet jejich pravděpodobností platí

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 1 = 100\ \%,$$

neboť

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = \frac{29+37+32+30+39+33}{200} = \frac{200}{200} = 1.$$

Pravděpodobnost jevu J je přibližně

$$p = \frac{29+33}{200} = \frac{62}{200} = 0{,}31 \doteq 31\ \%.$$

Pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_6$ a pravděpodobnost p jsou určeny přibližně jako statistické pravděpodobnosti.

VÝZNAM PRAVDĚPODOBNOSTI

Dá se očekávat, že *při velkém počtu k nezávisle opakovaných pokusů* **P** *nastane jev* **J**, *jehož pravděpodobnost (statistická pravděpodobnost)* je p, *přibližně v*

$$p \cdot k$$

případech.

Předpokladem je, že pokus probíhá za stejných podmínek, za kterých byla zjišťována pravděpodobnost. (Např. hází se stále stejnou kostkou nebo mincí a stejným způsobem, kontroluje se chrup žáků z téže krajiny, kontrolujeme auta projíždějící určitou křižovatkou přibližně v tutéž denní dobu pracovního dne apod.).

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Zjištujeme kolik nákladních aut projelo křižovatkou K (jev ***J***). Celkem tu projelo 150 aut. Jev ***J*** a jeho četnost: Zjistili jsme, že projelo 48 nákladních aut. Pravděpodobnost jevu ***J*** je přibližně

$$p = \frac{48}{150} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25} = \frac{4.8}{4.25} = 0{,}32 = 32\ \%.$$

Za týden projede (v téže denní době) křižovatkou asi 5 000 aut, tj. $k = 5\,000$. Můžeme předvídat, že z nich bude asi

$$p.k = 0{,}32.5\,000 = 1\,600$$

nákladních aut.

PŘÍKLAD

Pokus ***P***: Házíme mincí: $n = 100$. Těchto 100 pokusů dává výsledky:

	padne líc	padne rub	celkem
Četnost jevu	48	52	100

Jev J: Padne rub; pravděpodobnost jevu J je přibližně

$$p = \frac{52}{100} = 0{,}52 = 52\ \%.$$

Hodíme-li toutéž mincí 2 500krát ($k = 2\,500$), můžeme předpokládat, že rub padne asi v

$$p \, . \, k = 0{,}52 \, . \, 2\,500 = 1\,300$$

případech.

PŘÍKLAD

Lékař prohlédl chrup u 600 třináctiletých žáků a zjistil 137 žáků se zdravým chrupem. Je tedy pokus P prohlídka chrupu 13letého žáka, počet pokusů $n = 600$, jev J je: žák měl zdravý chrup; četnost jevu J je $a = 137$. Pravděpodobnost p jevu J je přibližně

$$p = \frac{a}{n} = \frac{137}{600} \doteq 0{,}23 = 23\ \%.$$

Dá se tedy očekávat, že mezi 2 000 žáky ($k = 2\,000$) bude přibližně

$$23\ \% \, . \, 2\,000 = 0{,}23 \, . \, 2\,000 = 460$$

žáků se zdravým chrupem.

Ve všech předcházejících příkladech byla pravděpodobnost jevu vypočtena přibližně na základě skutečně provedených pokusů — na základě statistického zkoumání (tj. statistickou pravděpodobností).

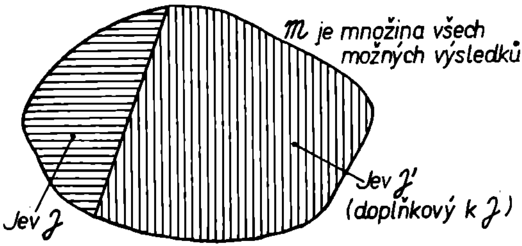
JEV DOPLŇKOVÝ

Jestliže při pokusu nenastal jev J, pak musel nastat jev J' (tj. doplněk množiny J v množině W všech možných výsledků pokusu P), který nazýváme

DOPLŇKOVÝ JEV K JEVU J.

PŘÍKLADY

Jev J	Doplňkový jev J'
— Při házení kostkou padne 5 ok.	— Při házení kostkou padne 1 oko nebo 2, 3, 4, 6 ok.
— Při házení mincí padne líc.	— Při házení mincí padne rub.
— Křižovatkou K projede nákladní vůz.	— Křižovatkou K projede jiný vůz než nákladní (osobní, autobus, jeřábový apod.).



Obr. 38

> *Je-li p pravděpodobnost jevu* $\boldsymbol{J}$, *je* $1 - p$ *pravděpodobnost doplňkového jevu* $\boldsymbol{J}'$.

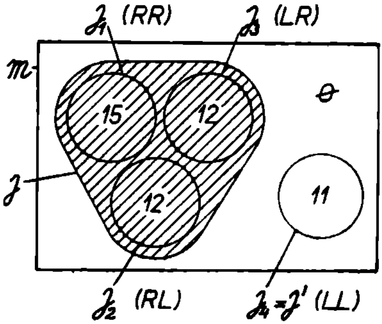
PŘÍKLAD

Pokus $\boldsymbol{P}$: Hodíme kovovou tříkorunou a korunou. Množina $\boldsymbol{M}$ vznikne tak, že pokus opakujeme 50krát ($n = 50$). Výsledky zapíšeme do tabulky:

Jev	Tříkoruna	Koruna	Četnost jevu
J_1	R (rub)	R	15
J_2	R	L (líc)	12
J_3	L	R	12
J_4	L	L	11
		Celkem	50

Jev J: padne aspoň na jedné minci rub (má četnost $15 + 12 + 12 = 39$).

Jev J' (doplňkový jev k jevu J): na žádné minci nepadne rub, tj. na obou mincích padne líc (má četnost 11). Vennův diagram:



Obr. 39

Pravděpodobnost p jevu J je přibližně

$$p = \frac{15 + 12 + 12}{50} = 0{,}78 = 78\ \%\,.$$

Pravděpodobnost p' jevu J' je přibližně

$$p' = \frac{11}{50} = 0{,}22 = 22\ \%\,.$$

Tedy

$$p' = 1 - p = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$$

nebo v procentech

$$p' = 100\ \% - p = 100\ \% - 78\ \% = 22\ \%\,.$$

Pamatujte si názvy (a jejich význam):

Pokus, výsledek pokusu, jev, jev jistý, jev nemožný, četnost jevu, relativní četnost jevu, pravděpodobnost, statistická pravděpodobnost, doplňkový jev.

CVIČENÍ

1. Hra. Dva hráči hází střídavě touž mincí. Na počátku hry má každý 0 bodů. Při každém hodu mincí si připíše hráč jedno z čísel 0, 1, 2 podle těchto pravidel:

a) Číslo musí být jiné, než číslo, které si hráč připsal při předchozím hodu.

b) Číslo připsané k „rubu" nechť je menší, než číslo připsané k „líci".

Každý z hráčů hodí desetkrát. Vyhrává, kdo má větší celkový součet počtu bodů. Zapisujte průběh hry např. takto:

Hráč A	R 1	L 2	L 1	R 0	L 2	R 0	R 1	L 2	R 0	L 2	Součet bodů 11
Hráč B	L 2	L 1	L 2	L 1	L 2	R 0	R 1	R 0	R 1	L 2	Součet bodů 12

Vyhrává hráč B. Je ovšem také možná remíza (nerozhodná hra).

2. Zjistěte, jaký je nejmenší možný součet počtu bodů a jaký je největší možný součet počtu bodů ve hře z cvičení 1.

3. Hra. V neprůhledném sáčku jsou kuličky označené všemi dvojcifernými čísly (10 až 99). Hráč po zatřepání sáčkem vytáhne jednu kuličku a zjistí ciferný součet čísla na ní napsaného a vrátí ji do sáčku.

Je-li ciferný součet číslo 5 až 14, postupuje do druhého kola. V druhém kole se hra opakuje; je-li ciferný součet v tomto kole 6 až 13, postupuje do třetího kola. Vyhrává v třetím kole, dosáhne-li tu součtu 7 až 12.

a) Zjistěte, kolik různých tahů umožňuje postup do druhého kola, kolik do prvního kola, kolik umožňuje výhru v třetím kole.

b) Jaká je pravděpodobnost postupu do prvního, druhého a třetího kola?

4. Zjednodušená sportka. Zvolte 6 sportů a označte je čísly 1 až 6; např. 1 - kopaná, 2 - plavání, 3 - lyžaření, 4 - horolezectví, 5 - lední hokej, 6 - skok vysoký. Každý hráč vsadí na tři z těchto sportů. Vedoucí hry hází hrací kostkou tak dlouho, až padnou tři různé počty ok. Padnou-li čísla dvou vsazených. sportů, vyhrává hráč II. cenu, padnou-li všech tří vsazených sportů, vyhrává hráč I. cenu.

Zapište do tabulky podle tohoto vzoru:

Hráč	1	2	3	4	5	6	7	8	
Vsadil	124	235	156	245	251	345	356	123	
Vyhrál cenu	II	II	—	I	II	—	—	—	

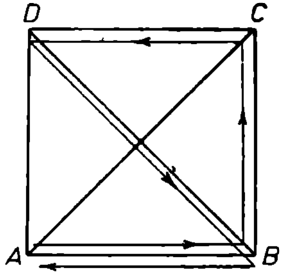
Vedoucí hry hodil 245.

5. Malé bludiště (obr. 40). Na obrázku je čtverec $ABCD$ a jeho úhlopříčky AC, BD. Hráč proběhne stranu AB a pak pokračuje takto:

a) nikdy se nevrací po cestě, po které bezprostředně předtím do bodu přišel;

b) hodí mincí: padne-li líc jde po cestě „vpravo", padne-li rub, jde po cestě „vlevo".

Hra končí, když se hráč dostane do bodu A. Vyhrává ten, kdo se dostane do A s nejmenším počtem hodů.



Obr. 40

Příklad průběhu hry a jejího zápisu L - líc, R - rub.

	L	L	R	L		
AB	BC	CD	DB	BA		

Průběh je zakreslen na obrázku 40.

a) Zahrajte tuto hru se čtyřmi tahy.

b) Zapište a zakreslete průběh hry: L L L, R R R R.

6. Při padesáti vrzích hrací kostkou nastaly tyto jevy s četnostmi uvedenými v tabulce

Padl počet ok	1	2	3	4	5	6
Četnost	8	9	7	10	9	7

Vypočtěte statistické pravděpodobnosti jevů:

a) padne jedno oko;

b) padne lichý počet ok;

c) padnou nejvýše 4 oka;

d) padne aspoň 5 ok.

7. Stejnou hrací kostkou jako v pokusech ze cvičení 6 hodíme tisíckrát. Kolikrát přibližně padne

a) sudý počet ok;

b) 2 nebo 5 ok;

c) 2 nebo 3 nebo 4 oka.

8. Ze 100 zasazených hrášků vzklíčilo 86. Zasadíme 2 500 hrášků z téhož pytle; kolik jich pravděpodobně nevzklíčí?

9. Na 100 školách se zjišťovalo sportování mládeže. Zjistilo se, že průměrně z 50 žáků je 28 lyžařů.

a) Kolik lyžařů připadá na 120 žáků?

b) Jaká je pravděpodobnost, že libovolně vybraný žák je lyžař?

c) Kolik musíme vzít žáků, abychom mezi nimi měli asi 100 lyžařů?

10. Mezi 32 hracími kartami je 12 figur (spodek — svršek — král). Pokusy bylo zjištěno, že při 100 tazích z úplné karetní hry byla tažena v 35 případech figura.

a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu figuru při tahu z úplné karetní hry?

b) Kolikrát asi musíme táhnout, abychom vytáhli z úplné karetní hry 60-krát figuru?

11. Stokrát vymrštěná koule na tzv. ruském kulečníku dala tyto počty bodů:

Jev (počet bodů)	2	5	10	20	50	100
Četnost	40	26	15	10	7	2

a) Vypočtěte jednotlivé pravděpodobnosti.

b) Kolikrát musím vymrštit kouli, abych získal přibližně 20-krát po 50 bodech?

12. Házím třemi mincemi současně. Při dvaceti pokusech dostanu výsledky (líc L — rub R) zapsané do tabulky takto:

1. mince	R	L	L	...
2. mince	R	R	R	...
3. mince	L	L	R	...

Vyplňte tabulku na základě skutečných pokusů.

Vypočtěte statistickou pravděpodobnost jevu, že padne
a) trojí líc;
b) dvojí líc a jeden rub.

2.2. Pravděpodobnost teoretická

V některých případech můžeme předpokládat, že všechny výsledky pokusu **P** jsou stejně pravděpodobné. Například při hodech mincí nebo hrací kostkou. Pak můžeme pravděpodobnost jevu **J** vypočítat pomocí

TEORETICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI.

Teoretická pravděpodobnost je racionální číslo dané zlomkem $p = \frac{a}{n}$, kde n značí počet všech možných výsledků při pokusu **P**, a počet všech výsledků, které charakterizují jev **J**.

teoretická pravděpodobnost jevu **J**	$p = \dfrac{a}{n}$	a … počet výsledků charakterizujících jev **J** n … počet všech možných výsledků pokusu

Pomocí teoretické pravděpodobnosti můžeme přibližně vypočítat četnost jevu **J** v daném počtu nezávisle opakovaných pokusů (aniž bychom museli tyto pokusy provádět). Tím se můžeme vyhnout často dosti zdlouhavému statistickému zkoumání.

Je-li p teoretická pravděpodobnost jevu J, potom teoretická pravděpodobnost doplňkového jevu je opět rovna $1 - p$.

PŘÍKLAD

Napíšeme přirozená čísla od 1 do 100. Jaká je pravděpodobnost, že číslo z nich namátkou vybrané nebude prvočíslo? (Prvočíslo je přirozené číslo $p > 1$, které má jen dělitele $1, p$.)

Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Počet možných výsledků je $n = 100$. Jev J' (napsané číslo je prvočíslo) nastane při a' výsledcích; přitom a' je počet všech prvočísel od 1 do 100. Jsou to čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, tj. $a' = 25$. Pravděpodobnost $p' = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Teoretická pravděpodobnost p jevu J (napsané číslo není prvočíslo) je

$$p = 1 - p' = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\ \%.$$

Jestliže pokládáme za stejně pravděpodobné napsání kteréhokoliv z čísel 1 až 100, pak pravděpodobnost jevu J se rovná jeho teoretické pravděpodobnosti. (Toho lze dosáhnout například losováním čísel 1 až 100.)

PŘÍKLAD

Máme určit teoretickou pravděpodobnost, že při napsání pěticiferného přirozeného čísla napíšeme číslo s nejvýše dvěma nulami.

Je zřejmé, co je pokus $\boldsymbol{P}$; počet možných výsledků je $n = 90\,000$. Jev $\boldsymbol{J}'$ je množina pěticiferných čísel s aspoň třemi nulami; četnost jevu $\boldsymbol{J}'$ je $324 + 9 = 333$. (První sčítance 324 udává počet čísel s třemi nulami; 9 je počet čísel se čtyřmi nulami.) Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}'$ je

$$p' = \frac{333}{90\,000} = 0{,}0037$$

Je tedy $p' \doteq 0$. Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ (napsání pěticiferného čísla s nejvýše dvěma nulami), který je doplňkový k jevu $\boldsymbol{J}'$, je

$$p = 1 - p' = 0{,}9963 \doteq 1\,.$$

Pamatujte si název:

Teoretická pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$.

CVIČENÍ

1. Narýsujte obrázek 41; A', B', C' jsou středy stran trojúhelníka ABC.

a) Určete všecky možné cesty z A do B, které vedou po nakreslených úsečkách, ale každým bodem procházejí nejvýš jednou. Zapište je podle tohoto vzoru $AC'TB'CB$. Tyto cesty tvoří množinu $\boldsymbol{M}$ o n lomených čarách. Určete n.

b) Vyberte z množiny $\boldsymbol{M}$ všecky cesty, které procházejí bodem B' a určete jejich počet a. Vypočtěte podíl $\frac{a}{n}$. Jaký význam má tento podíl?

c) Opakujte úlohu b) pro všechny cesty, které neprocházejí bodem B' ani C'.

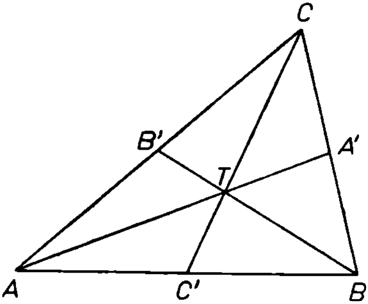
2. Na půdě se suší dva páry červených ponožek, 2 páry zelených a 4 páry modrých ponožek; všechny jsou stejné velikosti. Někdo sundává ponožky za tmy.

Kolik musí nejméně sundat ponožek, aby měl zaručeno, že přinese:

a) aspoň jeden pár stejnobarevných;

b) aspoň dva páry stejnobarevných (třeba každý pár jiné barvy);

c) aspoň dva páry stejnobarevných, a to oba téže barvy. (Poznámka. U ponožek nerozlišujeme levou a pravou ponožku.)



Obr. 41

3. K množině pokusů M a jevu J o četnosti a určete:

a) doplňkový jev J' a jeho četnost a';

b) pravděpodobnost p jevu J i pravděpodobnost p' jevu J'; ověřte, že je $p + p' = 1$.

c) Nakreslete Vennův diagram. Množinu M tvoří 20 pokusů — pokus je vrh dvou hracích kostek.

J: padne součet počtu ok 9 až 12.

J': . . . ., $a =$ . . . . . ., $p =$ . . . ., $a' =$ . . . . ., $p' =$ . . . . . .

d) Proveďte skutečně pokusy a jejich výsledky zapište do tabulky.

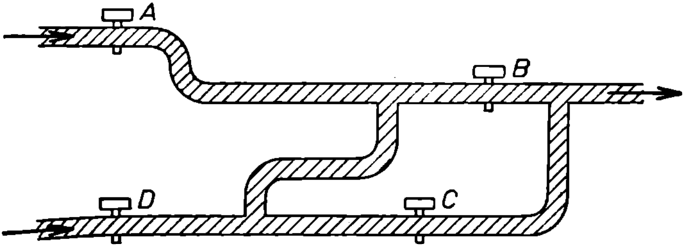
e) Určete teoretické pravděpodobnosti a porovnejte je s pravděpodobnostmi statistickými.

4. Na obrázku 42 je systém vodovodního potrubí s kohouty A, B, C, D. Voda přitéká i vytéká ve směru šipek.

a) Sestrojte strom všech možností otevření a uzavření kohoutů (A otevřen — A' uzavřen); viz obr. 43.

b) Vytáhněte ve stromu všecky možnosti průtoku vody a zapište je podle vzoru: $A'BC'D$. Zjistěte jejich počet a.

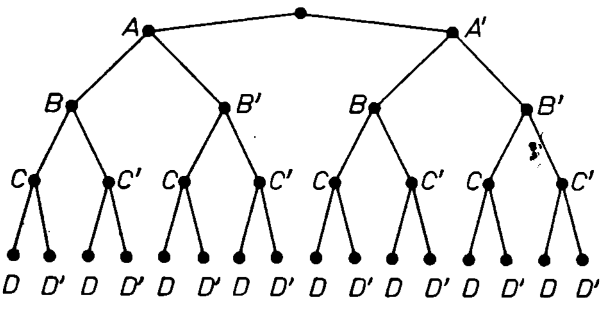
c) Zjistěte počet n všech možností postavení čtyř kohoutů a vypočtěte $\frac{a}{n}$. Jaká je pravděpodobnost (teoretická) při nahodilém postavení kohoutů, že voda bude protékat?



Obr. 42

5. Cvičení 6, 7 z článku 2,1 řešte teoretickou pravděpodobností a výsledky porovnejte s výsledky získanými statistickou pravděpodobností.

6. Na obrázku 44 je známá čtvercová síť; v ní jsou vyzna-



Obr. 43

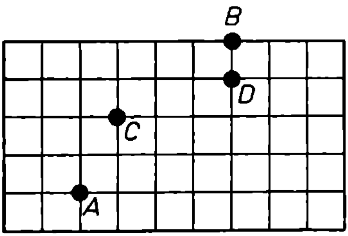
čeny body A, B jako kartézské grafy zlomků $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$. Dále jsou tam vyznačeny body C, D.

a) Zjistěte, kolika „cestami“ vpravo — nahoru lze dospět z bodu A do bodu B.

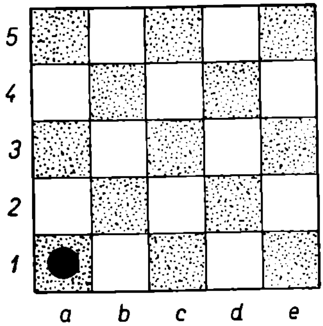
b) Zjistěte, kolik z těchto cest prochází bodem C, kolik bodem D.

c) Určete s jakou pravděpodobností prochází cesta bodem C, nebo bodem D, nebo oběma body C, D.

d) Určete pravděpodobnost, že cesta neprochází ani bodem C, ani bodem D.



Obr. 44



Obr. 45

7. Na obrázku 45 je zjednodušená šachovnice o 25 políčh. Na poli $a1$ stojí jezdec.

a) Vypište (jako množinu M) všecka pole, na něž se jezdec dostane dvěma skoky.

b) Vypište všecka pole z M, která leží v sloupci d.

c) Vypište všecka pole z M, která leží v řádku 3.

d) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky dostane buď do sloupce d nebo do řádku 3 (připouštíme možnost, že se jezdec dostane na pole $d3$).

e) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky nedostane ani do sloupce d ani do řádku 3?

f) Jaká je pravděpodobnost, že se jezdec dvěma skoky dostane zároveň do sloupce d a do řádku 3?

Ve cvičeních 8 až 15 znamená slovo „náhodně“, že všechny možné výsledky pokusů jsou stejně pravděpodobné.

8. Ze slova „pravděpodobnost“ se má náhodně vybrat jedno písmeno. Jaká je pravděpodobnost, že bude vybráno: **a)** písmeno „v“; **b)** písmeno „p“; **c)** písmeno označující některou samohlásku (a, e, o).

9. Z množiny slov $S = \{kolo, oko, sklo, lak, pluk, louka\}$ se vybírá náhodně jedno slovo. Jaká je pravděpodobnost, že ve vybraném slově

a) bude aspoň jedno „o“;
b) nebude buď „e“ nebo „u“;
c) budou aspoň dvě slabiky.

10. Karlík si přál k Ježíšku: auto na baterii, knížku, album na poštovní známky, samopal. Tatínek, maminka a starší bratr Jan mu chtějí koupit po jedné z těchto věcí. Jaká je pravděpodobnost, že v případě, když se předem nedohodnou, koupí

a) každý jinou věc;
b) nejvýše dva z nich stejnou věc.

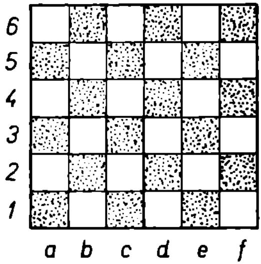
11. V jednom sáčku jsou 3 bílé kuličky a 5 černých, v druhém sáčku 4 bílé a 3 černé. Táhnu po 1 kuličce z každého sáčku.

a) Kolik možných výsledků je při opakování pokusu?
b) Kolik je pokusů, při nichž vytáhnu
. dvě kuličky téže barvy;
. dvě kuličky černé;
. dvě kuličky bílé;
. dvě kuličky různé barvy.
c) Vypočtěte příslušné teoretické pravděpobobnosti.
d) Proveďte 20 pokusů, výsledky zapisujte. Vypočtěte statistické pravděpodobnosti a porovnejte je s výsledky z úlohy **c)**.

12. Do 4 vagónů byly naloženy vyrobené stroje téhož druhu, do každého vagónu **a)** 3 kusy, **b)** 4 kusy, **c)** 5 kusů. Mezi naloženými stroji jsou dva vadné. Jaká je (teoretická) pravděpodobnost, že oba vadné stroje jsou v témže vagóně?

13. Volám telefonem svého přítele. První tři cifry jeho telefonního čísla znám spolehlivě, poslední tři cifry jsou 5, 4, 2, ale nevím, v jakém pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že hned napoprvé vytočím správné číslo?

14. Řešte cvičení 13 v tomto případě:
. první čtyři cifry telefonního čísla znám spolehlivě;
. čtvrtá cifra je sudá;
. pátá cifra je 1 nebo 7.



Obr. 46

15. Síla šachových figur; a) Na zmenšenou šachovnici (obr. 46) postavíme náhodně věž a jezdce. Vyjádřete v procentech teoretickou pravděpodobnost p_v, že věž ohrožuje jezdce a p_j, že jezdec ohrožuje věž. Čísla p_v, p_j lze považovat za „sílu" těchto figur. Porovnejte, jak se liší poměr $p_v : p_j$ od běžně užívaného poměru sil 5 : 3.

b) Řešte úlohu pro jiné dvojice figur.

Návod: Všimněte si, že stačí uvažovat pouze takové polohy figur, při nichž jedna je umístěna v „malém" čtverci, který je na obrázku 46 vyznačen tlustým orámováním.

2.3. Stromy logických možností

Při určování teoretické pravděpodobnosti je pro některé pokusy dost těžké určit množinu všech možných výsledků. V takových případech užíváme často

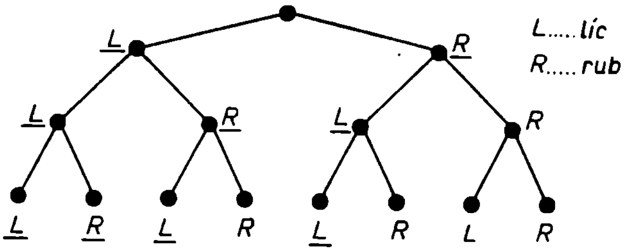
STROMŮ LOGICKÝCH MOŽNOSTÍ

PŘÍKLAD

Pokus **P** je házení třemi mincemi (např. tříkorunou, korunou a padesátihaléřem). Jev **J** je: padne aspoň na dvou mincích líc (*L*).

Množinu všech výsledků pokusu **P** určíme pomocí stromu logických možností (obr. 47).

Je celkem 8 možností:



Obr. 47

$\underline{LLL}$, $\underline{LLR}$, $\underline{LRL}$, LRR, $\underline{RLL}$, RLR, RRL, RRR.

Jev **J** tvoří čtyři (podtržené) možnosti.

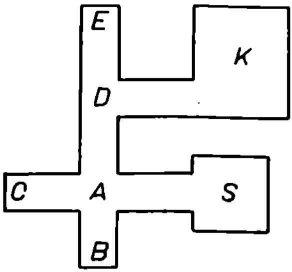
Pravděpodobnost jevu **J** je proto

$$p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

PŘÍKLAD

Na obrázku 48 je plán bludiště. V místě *K* je potrava. Pokus **P**: Vložíme myšku do bludiště v místě *S*. Myška ucítí potravu a snaží se k ní bludištěm dostat. Jev J_1:

Myška běží v bludišti za potravou nejkratší cestou (viz obr. 48, cesta $S - A - D - K$). Jev J_2: Myška zabočí nejvýše jednou do nesprávné chodby.



Obr. 48

Množinu všech možných výsledků pokusu **P** určíme pomocí stromu logických možností — obr. 49. (Ve stromu je silnějšími čarami vyznačena cesta $S - A - C - A - D - E - D - K$.)

Pokus **P** má celkem 10 možných výsledků. Pouze pro jeden výsledek nastane jev J_1 (viz koncový „uzel" stromu logických možností vyznačený ⊙). Jev J_2 nastane pro čtyři výsledky (viz koncové „uzly" ⊙ a ⊡).

Pravděpodobnosti p_1, p_2 jevů J_1 a J_2 jsou

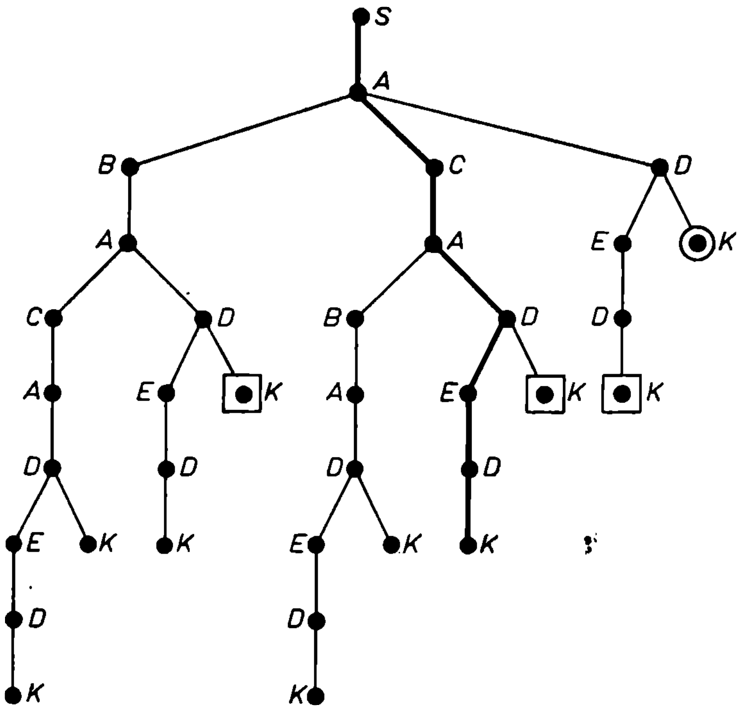
$$p_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%\,, \quad p_2 = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%$$

P o z n á m k a. Při sestrojování stromu logických možností, které má myška v bludišti, jsme předpokládali, že se pohybuje náhodně, avšak nevrací se ke startu S nikdy více než je to „nutné". V tom je skryt obecný návod

JAK NAJÍT VÝCHOD Z BLUDIŠTĚ

Pravidlo si vyslovíme přesně. Je třeba vyhovět dvěma požadavkům:

(a) *V bludišti nikdy neprocházíme touž chodbou dvakrát stejným směrem.*



Obr. 49

(**b**) *Na každé křižovatce*) si pamatujeme chodbu, kterou jsme přišli poprvé. Touto chodbou smíme z křižovatky odejít pouze v tom případě, že nemáme na vybranou jinou možnost.*

Prakticky můžeme toto pravidlo uskutečnit s použitím dopravních značek (obr. 50).

Obr. 50

Vcházíme-li do nějaké chodby, vyznačíme na jejím začátku „zákaz vjezdu". Jestliže z nějaké chodby vycházíme na určitou křižovatku po prvé, označíme tuto chodbu značkou „jednosměrný provoz" v ostatních případech „zákazem vjezdu".

Pro bludiště, která *nemají okružní chodby* lze udat ještě jednodušší návod. *Stačí vždy jít vlevo.*

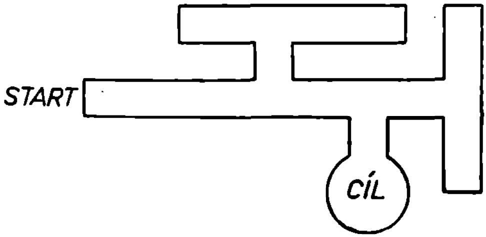
CVIČENÍ

1. Dva přibližně stejně silní soupeři hrají tenisový zápas na tři vítězné sety. Určete pravděpodobnost, že zápas skončí výsledkem 3 : 2 pro zvoleného hráče.

*) Za „křižovatku" pokládáme i konec každé slepé ulice.

2. Na jednom bájném ostrově se dlouhodobě sledovalo počasí. Denně se zjišťovalo, zda je slunečno nebo zataženo nebo prší. Statistika potvrdila starou místní pranostiku: „Jestliže jsi dnes zmokl, nemusíš si brát zítra deštník". Ukázalo se totiž, že nikdy neprší dva dny za sebou. Jinak se střídá počasí zcela náhodně. Máte určit pravděpodobnost, že když zmoknete v pondělí, pak nezmoknete v pátek.

3. Řešte úlohu o myšce pro bludiště na obrázku 51.



Obr. 51

4. Házíte třemi hracími kostkami. Určete pravděpodobnost, že padne dohromady aspoň 8 ok.

5. V šatně si odložili čtyři návštěvníci kabáty a klobouky. Protože klobouky spadly, šatnářka je pověsila náhodně k jednotlivým kabátům znovu. Určete pravděpodobnosti

a) všechny klobouky byly přiděleny ke správným kabátům;

b) aspoň dva klobouky patřily ke správným kabátům.

6. Na kroužku jsou tři patentní klíče: od branky do zahrady, od domovních dveří a od bytu. Po tmě beze světla je nemůžeme rozeznat. Chceme všechny zámky při návratu z kina otevřít. Nezbývá nic jiného, než u jednotlivých zámků klíče náhodně vyzkoušet. Je pochopitelné, že když zjistíme klíč od branky, nebudeme ho už zkoumat u domovních dveří. Máme zjistit pravděpodobnosti, že se zmýlíme nejvýše jednou.

7. Házíme čtyřmi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne líc nejvýše dvakrát?

2.4. Geometrická pravděpodobnost

Chceme-li určit teoretickou či statistickou pravděpodobnost určitého jevu ***J***, potřebujeme obvykle předem zjistit dvě celá nezáporná čísla. Například pro teoretickou pravděpodobnost to jsou:

a) číslo a, které udává počet prvků množiny všech výsledků charakterizujících jev ***J***;
b) číslo n, které značí počet prvků množiny ***Z*** všech možných výsledků.

Taková čísla existují, pokud jsou obě množiny (jev ***J*** i množina ***Z***) konečné. Jsou-li množiny ***J*** a ***Z*** nekonečné, nelze mluvit o počtu jejich prvků. Přesto můžeme teoretickou pravděpodobnost rozšířit i pro některé nekonečné množiny. Protože nemůžeme charakterizovat jejich „velikost“ počtem jejich prvků, užíváme obecnějšího pojmu tzv. ***MÍRY***. V souhlase s tím mluvíme v takovém případě o

MĚŘITELNÝCH MNOŽINÁCH.

Mezi měřitelné množiny patří například úsečky (s krajními body i bez nich).

MÍROU ÚSEČKY JE (zpravidla) JEJÍ DÉLKA.

Také některé křivky (např. kružnice a oblouky kružnic) jsou měřitelné; mírou je opět jejich délka.

Jiným příkladem měřitelných množin jsou obrazce (včetně hranic i bez hranice nebo její části).

MÍROU OBRAZCE JE (zpravidla) JEHO OBSAH.

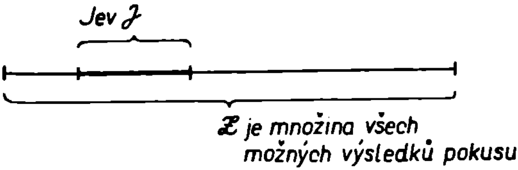
Míry úsečky i míry obrazce využíváme při tzv.

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI.

Každou z těchto možností si ukážeme zvlášť.

a) Množiny $\boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{J}$ jsou měřitelné; jejich mírou je jejich délka (např. úsečky, oblouky kružnic ap.):

$$\boxed{\text{geometrická pravděpodobnost jevu (množiny) } J} \;—\; p = \frac{j}{z} \qquad j: \boxed{\text{míra (délka) množiny } J} \qquad z: \boxed{\text{míra (délka) množiny } Z}$$



Obr. 52

PŘÍKLAD 1

Je dána úsečka $AB = 6$ cm.

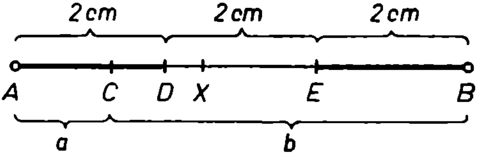
Pokus $\boldsymbol{P}$ je: zvolíme náhodně bod $C \in AB$, $(A \neq \neq C \neq B)$. Tím vzniknou dvě úsečky $a = AC$, $b = CB$.

Jev J_1: Některá z úseček a, b má délku aspoň dvakrát větší než druhá úsečka.

Jev J_2: Úsečka a je přesně dvakrát delší než úsečka b.

Množina $\boldsymbol{Z}$ všech možných výsledků pokusu $\boldsymbol{P}$ je množina všech bodů úsečky AB bez krajních bodů A, B.

Množina $\boldsymbol{M}_1$ všech výsledků charakterizujících jev $\boldsymbol{J}_1$



Obr. 53

se skládá ze dvou úseček (obr. 53): AD (bez bodu A), EB (bez bodu B); neboť (kreslete si vlastní obrázky):

$$\text{pro } C \in AD \text{ je } AC \leqq 2 \text{ cm}, CB \geqq 4 \text{ cm},$$

$$\text{pro } C \in EB \text{ je } AC \geqq 4 \text{ cm}, CB \leqq 2 \text{ cm}.$$

Zatím co

$$\text{pro } C \in DE \ (D \neq C \neq E), \text{ tj. } C \notin \boldsymbol{M}, \text{ je}$$

$$2 \text{ cm} < AC < 4 \text{ cm}, \ 2 \text{ cm} < CB < 4 \text{ cm}.$$

Pravděpodobnost p_1 jevu $\boldsymbol{J}_1$ je rovna geometrické pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{AD + EB}{AB} = \frac{2 + 2}{6} = \frac{4}{6} \doteq 0{,}67 = 67\ \%\ ^{*})$$

Množina $\boldsymbol{M}_2$ všech výsledků charakterizujících jev $\boldsymbol{J}_2$ je množina

$$\boldsymbol{M}_2 = \{E\}.$$

*) Délkou úsečky bez jednoho nebo obou krajních bodů rozumíme délku úsečky, která vznikne z dané úsečky doplněním chybějících krajních bodů.

Množina M_2 je „nulová" úsečka; její míra (délka) se rovná nule. Pravděpodobnost p_2 jevu J_2 je

$$p_2 = \frac{0}{AB} = \frac{0}{6} = 0\,,$$

tzn. p_2 je nulová pravděpodobnost. Ačkoliv jev J_2 není nemožný, je jeho pravděpodobnost rovna nule.

Kdybychom určovali délky s přesností na 1 mm, pak bychom dostali výsledek

$$p_2 = \frac{0{,}2}{6} \doteq 0{,}03 = 3\ \%\,.$$

Ověřte si to sami výpočtem.

Poznámka. **PŘÍKLAD 1** (str. 77) můžeme rozřešit přibližně i bez geometrické pravděpodobnosti. Můžeme použít opět teoretické i statistické pravděpodobnosti. Musíme však využít jistého zjednodušení. Ukážeme si to pro pravděpodobnost jevu J_1.

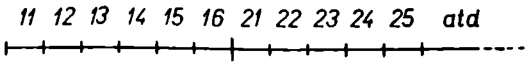
a) Použijeme teoretické pravděpodobnosti. Úsečku $AB = 6$ cm, která je (bez krajních bodů A, B) množinou všech možných výsledků rozdělíme na 60 shodných úseček délky 1 mm. Úsečky očíslujeme zleva doprava čísly 1, 2, ..., 60. (Ke každé z těchto úseček — s výjimkou úsečky č. 1 — počítáme i levý krajní bod; k žádné z nich nepočítáme jejich pravý krajní bod.)

Jev J_1 (viz **PŘÍKLAD 1** str. 77) nastane právě tehdy, jestliže „dělicí" bod C patří některé z úseček č. 1, 2, ..., 20 nebo 41, 42, ..., 60 (nesmí to však být levý krajní bod úsečky č. 41). Těchto shodných nepřekrývajících se úseček je celkem 40. Teoretická pravděpodobnost, že bod C patří některé z úseček č. 1, 2, ..., 20 nebo 41, 42, ..., 60 je tedy

$$p_1^* = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \doteq 0{,}67 = 67\ \%\,.$$

Vidíme, že p_1^* se rovná geometrické pravděpodobnosti p_1 jevu J_1 z **PŘÍKLADU 1**.

b) Použijeme statistické pravděpodobnosti. Uvnitř úsečky AB budeme náhodně volit bod C (pokus $\boldsymbol{P}$). Pokus provedeme celkem 100krát. Náhodnost volby zajistíme například takto: Úsečku AB rozdělíme na 36 shodných úseček, které označíme pomocí dvojciferných čísel zapsaných číslicemi 1, 2, ..., 6. (Viz obr. 54).



Obr. 54

Při každém pokusu umístíme „dělící“ bod C uvnitř úsečky, jejíž číslo „získáme“ pomocí hodu dvou hracích kostek.

Výsledky získané stem pokusů s hracími kostkami byly zaznamenány v tabulce četností se dvěma vstupy:

2. kostka / 1. kostka	1	2	3	4	5	6
1	5	1	4	3	3	3
2	1	4	2	1	1	4
3	1	2	1	0	2	2
4	3	3	6	3	1	4
5	1	4	4	7	2	4
6	4	3	3	2	0	5

Jevu J_1 z **PŘÍKLADU 1** (str. 77) odpovídají hody, jejichž četnosti jsou vyznačeny v tabulce ve dvou silně vytažených rámečcích. Těchto hodů je celkem 72.

Tomu odpovídá statistická pravděpodobnost

$$p_1^{**} = \frac{72}{100} = 0{,}72 = 72\ \%\,.$$

Tento výsledek se příliš neliší od obou pravděpodobností (geometrické a teoretické) získaných při předcházejících řešeních.

PŘÍKLAD 2

Parašutista přistál při nočním seskoku v místě A, které je vzdáleno 4 km od přímé silnice (s).

Pokus P. Parašutista se vydá rychlostí 5 km/hod z místa A neznámým směrem (pohybuje se po polopřímce).

Jev J. Parašutista narazí nejpozději během jedné hodiny na silnici.

Máme určit pravděpodobnost jevu J.

Množina Z všech možných výsledků je kružnice se středem A a poloměrem $r = 5$ km. Množina M charakterizující jev J je kratší oblouk $\overset{\frown}{BC}$ kružnice Z s krajními body na přímce s (obr. 55). Pravděpodobnost p jevu J je

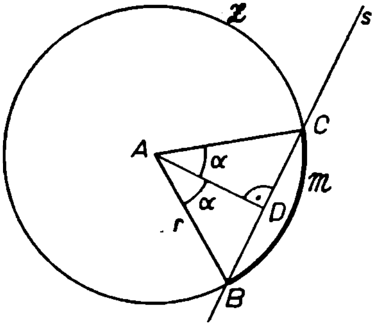
$$p = \frac{l}{z}\,,$$

kde l je délka (kratšího) oblouku $\overset{\frown}{BC}$ a z délka kružnice Z. Tedy

$$p = \frac{\pi r \dfrac{2\alpha}{180}}{2\pi r} = \frac{\alpha}{180} \quad (\alpha \text{ ve stupních})\,.$$

Velikost úhlu α zjistíme buď úhloměrem nebo výpočtem pomocí goniometrických funkcí:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8\,.$$



Obr. 55

Užijeme např. „Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7. až 9. ročník" — tab. M5 a zjistíme

$$\alpha \doteq 37^\circ\,.$$

Pravděpodobnost p je

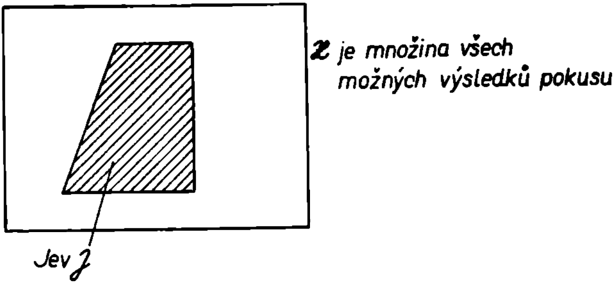
$$p = \frac{37}{180} \doteq 0{,}205 \doteq 20\,\%\,.$$

b) Množina $\boldsymbol{Z}$ všech možných výsledků pokusu $\boldsymbol{P}$ i jev $\boldsymbol{J}$ jsou měřitelné množiny, jejichž mírou je jejich obsah. (Množiny $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{J}$ jsou tedy měřitelné obrazce; obr. 56). Geometrickou pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ počítáme podle vzorce:

geometrická pravděpodobnost jevu (množiny) ***J*** — $p = \frac{j}{z}$

j — míra (obsah) množiny ***J***

z — míra (obsah) množiny ***Z***



Obr. 56

PŘÍKLAD 1

Je dán obdélník ***O*** $= ABCD$ s rozměry $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm.

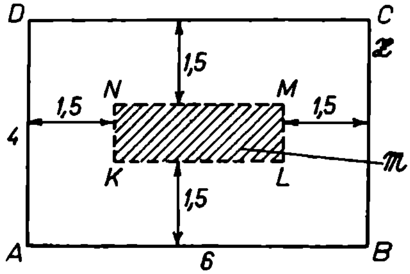
Pokus ***P***: Zvolíme náhodně bod $X \in$ ***O***.

Jev ***J***: Vzdálenost bodu X od obvodu obdélníku ***O*** je větší než 1,5 cm.

Množina ***Z*** všech možných výsledků pokus ***P*** je obdélník ***O***. Množina ***M*** všech výsledků charakterizujících jev ***J*** je vnitřek obdélníku $KLMN$ (obr. 57) — tj. obdélník $KLMN$ bez obvodu, který je proto na obrázku 57 vyznačen jen čárkovaně. Rozměry obdélníku jsou 1 cm a 3 cm.

Obsah vnitřku obdélníku $KLMN$ počítáme jako obsah celého obdélníku. Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{J}$ je

$$p = \frac{1.3}{6.4} = \frac{1}{2.4} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%.$$



Obr. 57

Doplňková pravděpodobnost p' jevu $\boldsymbol{J}'$ (tzn., že bod X má od obvodu obdélníku $\boldsymbol{O}$ vzdálenost nejvýše 1,5 cm) je

$$p' = 0{,}875 = 87{,}5\ \%.$$

Poznámka. Také tento **PŘÍKLAD 1** lze řešit za jistých jednodušších předpokladů bez geometrické pravděpodobnosti. (Srovnejte s poznámkou na str. 79 až 81.) Pokuste se sami o takové řešení.

PŘÍKLAD 2

Obdélník $\boldsymbol{O}$, který má rozměry 1 m a 2 m je rozdělen rovnoběžkami na shodné pásy šířky 5 cm a délky 1 m.

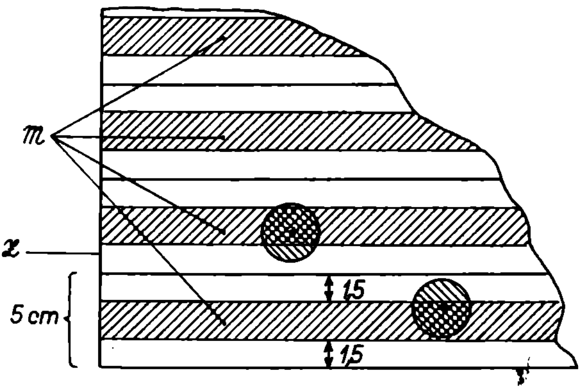
Pokus $\boldsymbol{P}$. Na obdélník náhodně umístíme minci o průměru 3 cm. (Střed mince musí patřit obdélníku ***O***; část mince tedy může „přečnívat ven".)

Jev ***J***. Celá mince leží uvnitř některého z 40 pásů.

Množina ***Z*** všech různých výsledků pokusu ***P*** (tj. umístění středu mince) je obdélník ***O***.

Množina ***W*** všech výsledků charakterizujících jev ***J*** se skládá ze 40 pásů (bez hraničních přímek) s rozměry 2 cm a 1 m. (Dvě možné polohy mince jsou na obr. 58 znázorněny.) Pravděpodobnost jevu ***J*** je

$$p = \frac{40.(2.100)}{100.200} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \%\,.$$



Obr. 58

Zajímavá poznámka. Vezměme opět obdélník ***O*** z předešlého příkladu. Pokus ***P*** změníme takto: Na obdélník budeme házet z výšky jehlu délky 5 cm. Jev ***J*** spočívá v tom, že jehla zasahuje do dvou různých pásů.

Nechť p je statistická pravděpodobnost jevu J. Dá se ukázat (užitím tzv. vyšší matematiky), že

$$\frac{2}{p} \approx \pi$$

(slovy: $\frac{2}{p}$ se přibližně rovná Ludolfovu číslu π).

Překvapující na tom je, že bychom mohli tímto způsobem mnohonásobným opakováním pokusu P experimentálně určit číslo π s libovolnou přesností.

Pamatujte název: geometrická pravděpodobnost.

CVIČENÍ

1. Na úsečce $AB = 10$ cm se volí náhodně bod C. Určete pravděpodobnost p, že úsečka AC bude aspoň o 1 cm delší než úsečka BC.

2. Na obvodu čtverce $ABCD$ o straně **a)** 5 cm; **b)** 8 cm; **c)** 4 cm; **d)** 2 cm se volí zcela náhodně bod $X \neq A$. Jaká je pravděpodobnost, že bude úsečka $AX \geqq 5$ cm.

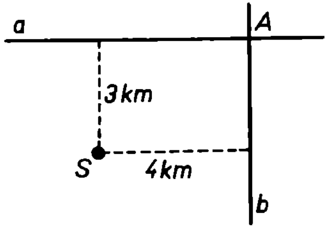
3. Trojúhelník $T = \triangle ABC$ má strany $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm. Bod X se volí náhodně mezi body A a B. Přímka CX dělí obvod trojúhelníku na dvě části délek O_1, O_2. Určete geometrickou pravděpodobnost, že

a) $|O_1 - O_2| \leqq 2$ cm;
b) jedna z částí O_1, O_2 je aspoň dvakrát delší než druhá.

4. Hodiny se zastavily mezi druhou a třetí hodinou. Jaká je pravděpodobnost, že hodinová a minutová ručička svírají úhel menší než 90°. (Návod: Užijte časové osy.)

5. Je dán čtverec $ABCD$ a bod M na straně BC tak, že $3\,BM = BC = 6$ cm. K je libovolný kruh o poloměru $r = 3{,}5$ cm a středu $S \in DM$. Určete pravděpodobnost, že kruh K obsahuje aspoň jeden vrchol čtverce.

6. V místě A se křižují kolmo dvě silnice a, b, (obr. 59). V místě S přistál parašutista. Odtud se vydá přímočaře rychlostí 6 km/hod. S jakou pravděpodobností narazí nejdéle po jednohodinovém pochodu na některou ze silnic a, b.



Obr. 59

7. Obdélník $O = ABCD$ má rozměry $a = AB = 5$ cm, $b = BC = 3$ cm. Zvolíme náhodně bod $X \in O$. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost bodu X od strany AB je větší než od strany BC?

8. Mořský ostrov má tvar kruhu K se středem O a poloměrem 4 km. Jaká je pravděpodobnost, že z náhodně zvoleného místa X je ke studni S, která je ve středu ostrova,

a) blíže než 3 km (jev J_1).

b) blíže než k moři (jev J_2).

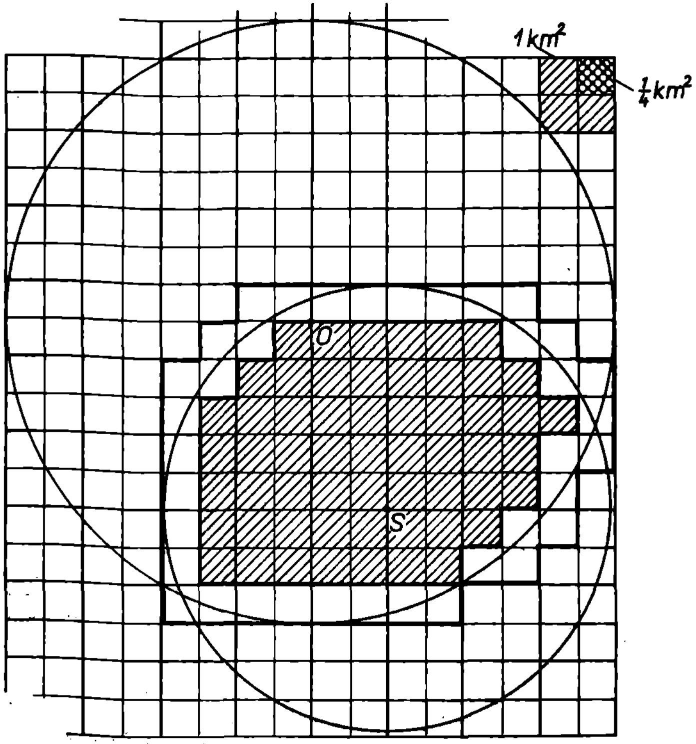
9. Řešte cvičení 8a pro případ, že studna S není ve středu ostrova. Dovedete vždy úlohu vyřešit?

10. Jestliže nedovedete řešit cvičení 9 (tzn. nedovedete vypočítat obsah množiny charakterizující jev J_1) můžete postupovat takto: Situaci znázorněte na čtverečkovaném papíře — viz např. obrázek 60.
Zmenšeno: 1 cm na obrázku značí 1 km ve skutečnosti.
1 cm^2 na obrázku značí 1 km^2 ve skutečnosti.
Vyznačíme všechny čtverečky, které jsou částí množiny M. Jejich počet je v_1. Tyto čtverce mají celkem obsah $o_1 = 1/4\ v_1$ km^2. Dále vyznačíme všechny čtverečky, které pokrý-

vají množinu M. Jejich počet je v_2. Tyto čtverce mají celkem obsah $o_2 = 1/4\ v_2\ \mathrm{km}^2$. Obsah množiny M je přibližně

$$o = \frac{1}{2}(o_1 + o_2)\ \mathrm{km}^2 .$$

Rýsujte a počítejte sami pro různé případy.



Obr. 60

11. Pole má tvar obdélníku $O = ABCD$ s rozměry $a = AB = 600$ m, $b = BC = 400$ m. V místech A, B, S (S je střed CD) jsou studánky. Na poli stojí v místě X traktorista. Jaká je pravděpodobnost, že má nejblíže ke studánce v místě A (B, S)?

12. Parašutista seskočil v noci v trojúhelníkové oblasti $T = ABC$. ($AB = 5$ km, $BC = 8$ km, $CA = 7$ km). V místě V vysílá krátkovlnná vysílačka s dosahem 5 km. Jaká je pravděpodobnost, že parašutista může zachytit tuto vysílačku. Uvažujte tyto případy: **a)** $V = A$; **b)** V je střed AB. Použijte postupu naznačeného ve cvičení 10.

13. Trojúhelník má strany $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 10$ cm. Bod X je náhodně zvolen uvnitř tohoto trojúhelníku. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost bodu X od strany AC je menší, než jeho vzdálenosti od zbývajících dvou stran BC, AB.

14. Na čtverečkovaný papír se čtverci o stranách 4 cm se hodí mince o průměru 2,5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že hozená mince je celá částí jednoho ze čtverců sítě?