III.

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE A JEJICH POUŽITÍ

1. Vytvořující funkce. Mějme posloupnost reálných čísel

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{1}$$

a předpokládejme, že řada

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{2}$$

má kladný poloměr $\varrho > 0$. Potom pro všechna reálná čísla q z intervalu $-\varrho < q < \varrho$ je definována hodnota $A(q)$ řady (2). Tím je v tomto intervalu definována jistá funkce f, $f(q) = A(q)$. Funkci f nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti (1); řadu $A(x)$ budeme — ač to není zcela obvyklé — nazývat také *vytvořující řadou* posloupnosti (1).

Jak vyplývá z definice pojmu poloměru řady, není v případě $\varrho < \infty$ vyloučeno, že existují též hodnoty $A(\varrho)$ a $A(-\varrho)$, případně jen jedna z nich, takže definici funkce f lze rozšířit též o tyto krajní hodnoty. Pro $|q| > \varrho$ ani $A(q)$, ani $f(q)$ samozřejmě nedefinujeme. Je-li řada $A(x)$ příslušná k posloupnosti (1) banální, byla by funkce f definována jen v jediném bodě $q = 0$. Takový pojem by zřejmě nebyl moc užitečný, a proto v takovém případě o vytvořující funkci nemluvíme; pojem vytvořující řady má ovšem smysl vždy.

Jestliže je daná posloupnost (1) konečná, představujeme si ji vždy doplněnou nulami (srv. první paragraf druhé kapitoly); příslušnou vytvořující řadou je pak zřejmě mnohočlen, takže vytvořující funkce je definována pro všechna reálná q.

Příklad 1. Funkce $f(q) = (1 + q)^n$, $n \geqq 0$, celé je vytvořující funkcí posloupnosti binomických koeficientů $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Jestliže je daná posloupnost (1) omezená, tzn. jestliže existuje kladná konstanta K taková, že nerovnost $|a_k| < K$ platí pro všechny členy a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) posloupnosti (1), má příslušná vytvořující řada (2) poloměr rovný aspoň 1, takže vytvořující funkce posloupnosti (1) je definována alespoň v intervalu $-1 < q < 1$.

Příklad 2. Funkce $f(q) = (1 - q)^{-1}$, definovaná v intervalu $-1 < q < 1$, je vytvořující funkcí posloupnosti

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \tag{3}$$

složené ze samých jedniček. Příslušnou vytvořující řadou je řada (II.8).

Základní početní operace s řadami mají svá vyjádření v odpovídajících operacích s jejich koeficienty. Poněvadž operace dosazení do řady respektuje početní operace s řadami (viz druhý „axióm“ v šestém paragrafu druhé kapitoly), můžeme formulovat následující zásady.

Mějme dány dvě posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ s vytvořujícími funkcemi $f(q)$ a $g(q)$, definovanými (aspoň) v jistém intervalu $-a < q < a$, $a > 0$ (za číslo a lze vzít např. menší z poloměrů řad $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$). Potom funkce $v(q) = f(q) + g(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ takové, že $c_k = a_k + b_k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ a funkce $w(q) = f(q) \cdot g(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$, jejíž členy jsou dány vzorcem (II.5).

Příklad 3. Nechť je dána posloupnost (1) s vytvořující funkcí $f(q)$, potom $g(q) = (1 - q) \cdot f(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $a_0, (a_1 - a_0), (a_2 - a_1), \ldots, (a_k - a_{k-1}), \ldots$ Funkce f a g jsou tu definovány ve stejném intervalu hodnot q. Obráceně pak funkce $h(q) = (1 - q)^{-1} \cdot f(q)$ bude vytvořující funkcí posloupnosti $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ postupných součtů $s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, členů posloupnosti (1). Funkce $h(q)$ je definována v průniku definičního intervalu funkce $f(q)$ s intervalem $-1 < q < 1$.

Cvičení

1. Najděte vytvořující funkce posloupností

   a) $1, 2, 6, 20, 70, \ldots, \binom{2k}{k}, \ldots$;

   b) $1, 2, 3, 4, \ldots, k, \ldots$;
   c) $1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots$;
   d) $1, 8, 27, 64, \ldots, k^3, \ldots$
   a určete též jejich definiční intervaly.
2. Určete posloupnosti, kterým odpovídají vytvořující funkce
   a) $f(q) = (2 + 3q)^5$;
   b) $f(q) = (1 - 2q)^{-2}$;
   c) $f(q) = 2^q$.

3. S použitím výsledků cvičení 1c, 1d odvoďte vzorce pro součty druhých a třetích mocnin přirozených čísel

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \; ; \qquad S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \; .$$

2. Rekurentní vztahy. Při vyšetřování posloupností čísel se často ocitáme v situaci, kdy neznáme všechny jednotlivé členy posloupnosti, ale jen jisté vztahy mezi nimi, označované obvykle jako *vytvářecí zákony* posloupnosti nebo *rekurentní vzorce*, anebo též *diferenční rovnice*. Tyto vztahy umožňují sice postupně vypočítat všechny členy posloupnosti (tj. kterýkoliv z nich), ale zpravidla je k určení jednoho členu třeba nejprve znát všechny předcházející. Dáváme proto většinou přednost *explicitním* vzorcům, *explicitnímu* vyjádření obecného členu posloupnosti. Odvození explicitních vzorců z rekurentních bývá pak více či méně složitou záležitostí v závislosti na druhu daných rekurentních vztahů.

Příklad 4. Známým příkladem je tzv. aritmetická posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ charakterizovaná tím, že rozdíl (diference) dvou po sobě následujících členů je konstantní:

$$a_{k+1} - a_k = d = \text{konst.}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Ze (4) ovšem snadno odvodíme explicitní vzorec $a_k = a_0 + kd$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Vidíme, že k úplnému určení posloupnosti je vedle rekurentního vzorce (4) třeba ještě znát počáteční člen a_0.

Příklad 5. Jiným známým příkladem je geometrická posloupnost $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ charakterizovaná svým vytvářecím zákonem $b_{k+1} = qb_k$, $q \neq 0$ (q = konst., je tzv. kvocient geometrické posloupnosti). Explicitní vzorec je zde $b_k = b_0 q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; potřebujeme tu opět znát vedle čísla q také počáteční člen posloupnosti b_0.

Při odvozování explicitních vzorců z daných rekurentních vztahů můžeme v mnoha případech využít též pojmu vytvořující funkce, resp. vytvořující řady posloupnosti. Ze vztahů mezi členy posloupnosti odvodíme určité podmínky, kterým musí příslušná vytvořující funkce, resp. řada vyhovovat, podle nich najdeme vytvořující řadu; členy posloupnosti se pak objeví jako koeficienty této řady. Hlavní předností takového postupu je jeho obecnost a určitá *mechaničnost*, poskytuje nám takřka *„samočinný" algoritmus* pro řešení daného úkolu. Nemáme zde možnost (a ani to neodpovídá cílům naší knížky) pouštět se do rozvíjení obecné, *systematické* teorie řešení úloh tohoto typu, a tak si tu jen osvětlíme základní myšlenku použití vytvořujících funkcí na jednom konkrétním příkladě, který je ostatně sám o sobě zajímavý. Odvodíme si explicitní vzorec pro tzv. *Fibonacciova čísla.*

Posloupnost Fibonacciových čísel (budeme si je značit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$) je dána poměrně velmi jednoduchým vytvářecím zákonem. Začíná dvěma jedničkami, tzn. $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$, a každý další její člen je vždy součtem dvou členů předcházejících. Platí tedy

$$\varphi_{k+2} = \varphi_{k+1} + \varphi_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Je to tedy posloupnost čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Označme si $\Phi(x)$ příslušnou vytvořující řadu posloupnosti Fibonacciových čísel

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots \tag{6}$$

a položme pak $A(x) = \Sigma a_k x^k = \Phi(x) - x\,\Phi(x) - x^2\,\Phi(x)$. Budeme hledat postupně koeficienty řady $A(x)$. Zřejmě je $a_0 = A(0) = \Phi(0) = \varphi_0 = 1$ a dále $a_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = 0$. Pro $k = 2, 3, 4, \ldots$ platí pak $a_k = \varphi_k - \varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}$, takže podle (5) je $a_k = 0$ pro všechna $k \geqq 2$. Je tedy $A(x) = I(x)$, avšak $A(x) = \Phi(x)\,[1 - x - x^2]$. To však znamená, že řada $\Phi(x)$ je reciproká k řadě – mnohočlenu $1 - x - x^2$.

Při určování koeficientů řady $\Phi(x)$, tj. Fibonacciových čísel φ_k, můžeme dále postupovat dvěma způsoby. Prvý z nich spočívá v tom, že mnohočlen $1 - x - x^2$ vyjádříme ve tvaru součinu dvou dvojčlenů

$$1 - x - x^2 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5} + 1}\,x\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}\,x\right), \tag{7}$$

takže řada $\Phi(x)$ bude také součinem řad reciprokých k těmto dvěma dvojčlenům, tedy řad

$$\Phi_1(x) = \left[1 + \frac{2}{\sqrt{5} + 1}\,x\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(\sqrt{5} + 1)^k}\,x^k$$

a

$$\Phi_2(x) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}\,x\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{5} - 1)^k}\,x^k\,.$$

V součinu $\Phi(x) = \Phi_1(x)\,.\,\Phi_2(x)$ bude podle vzorce (II.5) koeficient při x^n roven součtu

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{2^j}{(\sqrt{5}+1)^j} \cdot \frac{2^{n-j}}{(\sqrt{5}-1)^{n-j}} =$$

$$= 2^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(\sqrt{5}+1)^j\,(\sqrt{5}-1)^{n-j}} =$$

$$= 2^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(1-\sqrt{5})^j}{4^j} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n-j}}{4^{n-j}} =$$

$$= 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} (1-\sqrt{5})^j (1+\sqrt{5})^{n-j}\,.$$

To však lze podle vzorce (II.13), kde položíme $a = 1 + \sqrt{5}$, $b = 1 - \sqrt{5}$, psát též jako

$$2^{-n} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})} = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Jiné zajímavé vyjádření Fibonacciových čísel dostaneme, jestliže si mnohočlen $1 - x - x^2$ představíme jako výsledek substituce mnohočlenu $N(x) = x + x^2 = x(1 + x)$ do mnohočlenu $M(x) = 1 - x$. Poněvadž k $M(x)$ je reciproká řada (II.8), vidíme, že

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} x^{k+j}\,. \tag{9}$$

Koeficient při x^n ve $\Phi(x)$, tj. číslo φ_n, je tedy roven součtu

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} ; \tag{10}$$

přímý důkaz rovnosti výrazů (10) a (8) by asi nebyl právě snadnou záležitostí.

Z důvodů, které jsme si uvedli hned na začátku, musíme opustit tuto velmi zajímavou oblast aplikací teorie vytvořujících funkcí a spokojit se s jediným podrobněji provedeným příkladem. Čtenáře, který by se o rekurentní vztahy a diferenční rovnice zajímal hlouběji, musíme odkázat na speciální literaturu o diferenčním počtu.

Cvičení

4. Najděte vytvořující řadu obecné aritmetické posloupnosti s počátečním členem a_0 a diferencí d.
5. Určete posloupnost $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, jestliže $b_0 = 1$ a $b_{k+1} = 2b_k + 1$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
6. Najděte obecný tvar posloupností $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, s počátečním členem $a_0 = 0$, jestliže pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí v nich rekurentní vztah tvaru $a_{k+1} = \alpha a_k + \beta$, kde α a β jsou pevná reálná čísla, $\alpha \neq 0$.
7. Najděte posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, ve které je $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ a platí $a_k + k = a_{k+2}$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$
8. Najděte vytvořující funkci posloupnosti $F_m(0), F_m(1), F_m(2), \ldots, F_m(k), \ldots$

3. Kombinace. Již ve druhém paragrafu první kapitoly jsme si připomněli, že se binomickým koeficientům $\binom{n}{k}$,

$0 \leqq k \leqq n$, říká také *kombinační čísla*, protože $\binom{n}{k}$ je právě počet kombinací k-té třídy z n prvků. Tuto souvislost si můžeme názorně vyjádřit pomocí pojmu vytvořující řady, resp. funkce. Pro určení počtu kombinací a podobných dalších vlastností je totiž zcela lhostejné, z jakých „prvků" vlastně své kombinace tvoříme, z které množiny je vybíráme; rozhodující je pouze jejich celkový počet, jejich vzájemná rozlišitelnost, jedinečnost či opakovatelnost apod. Můžeme tedy uvažovat i takový případ, kdy tvoříme kombinace prvků z dané množiny v podstatě abstraktních symbolů, s nimiž zacházíme podle určitých obecných pravidel.

Ukážeme si to opět na konkrétním příkladě. Vezměme si součin n lineárních dvojčlenů v proměnné x

$$P(x) = (1 + a_1x)(1 + a_2x) \ldots (1 + a_nx) \ , \qquad (11)$$

kde jsme písmeny $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označili jistých n nenulových reálných čísel obecně vesměs navzájem různých, o nichž zatím nic dalšího nepředpokládáme. Výraz $P(x)$ je zřejmě mnohočlen stupně n v proměnné x.

Rozepíšeme si součin stojící v (11) vpravo; dostaneme tak součet 2^n sčítanců, z nichž každý je součinem n faktorů vybraných po jednom z daných n dvojčlenů. Vybereme-li při tom z k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) dvojčlenů faktor tvaru a_jx a ze zbývajících $n - k$ dvojčlenů faktor 1, dostaneme člen s x^k opatřený koeficientem, jenž je součinem vybrané k-tice čísel a_j. Každé takové k-tici, tj. každé kombinaci k-té třídy z n prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odpovídá právě jeden člen s x^k. Máme tak

$$\begin{aligned} P(x) = 1 &+ \qquad (12) \\ &+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + \\ &+ (a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ldots + a_{n-1}a_n)x^2 + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \\
&+ \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n)x^3 + \ldots + \\
&+ a_1a_2 \ldots a_n \, . \, x^n \, .
\end{aligned}
$$

V mnohočlenu $P(x)$ je tedy koeficient při x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) právě součet součinů všech možných kombinací k-té třídy z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ve výrazech pro $P(x)$ položme nyní $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Podle (12) bude potom koeficient při x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) roven právě *počtu všech kombinací k-té třídy z n-prvků.* Zároveň však podle (11) bude $P(x) = (1 + x)^n$, takže koeficientem při x^k bude číslo $\binom{n}{k}$.

Základní myšlenkou tohoto způsobu odvození významu $\binom{n}{k}$ jakožto kombinačních čísel je reprezentace procesu tvoření k-tic z dané n-prvkové množiny pomocí procesu vybírání faktorů z jednotlivých členů násobených mnohočlenů. Tento proces výběru si můžeme představit též ve formě postupného n-násobného rozhodování. Bereme postupně jednotlivé dvojčleny v součinu v (11) a rozhodujeme se pro jeden či druhý člen jakožto faktor.

Stejného postupu lze užít i ve složitějších případech, kdy máme na výběr více než jenom dvě možnosti (prvek a_j zařadit nebo nezařadit). Vezměme si např. součin (pro jednoduchost se omezíme na dva prvky a_1, a_2)

$$Q(x) = (1 + a_1x + a_1^2x^2)(1 + a_2x + a_2^2x^2) \, . \quad (13)$$

Při tvoření jednotlivých členů při roznásobení

$$
\begin{aligned}
Q(x) = 1 + a_1x + a_2x + a_1^2x^2 + a_2^2x^2 + a_1a_2x^2 + \\
+ a_1^2a_2x^3 + a_1a_2^2x^3 + a_1^2a_2^2x^4
\end{aligned}
$$

se rozhodujeme (postupně dvakrát) vždy pro jednu ze tří možností: prvek a_j ($j = 1, 2$) vůbec nevzít nebo vzít v první anebo ve druhé mocnině (tj. jakoby dvakrát). Koeficienty při x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 4$) v mnohočlenu $Q(x)$, tj. v

$$Q(x) = 1 + (a_1 + a_2)x + (a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)x^2 + \\ + (a_1^2a_2 + a_1a_2^2)x^3 + a_1^2a_2^2x^4 \tag{14}$$

nám pak reprezentují různé možné způsoby výběru vždy celkem k prvků, přičemž jak prvek a_1, tak také a_2 se v nich může objevit nulkrát, jednou nebo dvakrát.

Po dosazení $a_1 = a_2 = 1$ dostaneme ve (14) jako koeficient při x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 4$) opět počet těchto tzv. kombinací k-té třídy s opakováním (a to nejvýše jedním opakováním pro každý prvek) ze dvou prvků a_1, a_2. Zároveň plyne z (13), že pak je $Q(x) = (1 + x + x^2)^2$. Porovnáním obou výrazů, resp. odpovídajících si koeficientů získáme vyjádření čísel udávajících počet příslušných kombinací.

Příklad 6. Mějme tři bílé, dvě černé a dvě modré koule; z těchto sedmi koulí vybereme tři. Kolika různých kombinací barev můžeme přitom dosáhnout? Jde o kombinatorickou úlohu klasického typu; jejím převedením na problém výběru faktorů při násobení tří mnohočlenů dojdeme k součinu

$$R(x) = (1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2)(1 + \\ + mx + m^2x^2) ,$$

ve kterém nás zajímají členy obsahující x^3. Dosazením $b = c = m = 1$ dostaneme pak jejich počet jako koeficient při x^3 v součinu $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)^2$. Výsledkem je v prvním případě součet $b^3 + b^2c + b^2m + bc^2 + + bm^2 + cm^2 + c^2m + bcm$; pro počet barevných kombinací vychází pak 8.

Příklad 7. Hledejme *počet kombinací k-té třídy s neomezeným opakováním z n prvků*, tj. počet způsobů, jimiž lze z n různých prvků vybrat k ne nutně různých. Obvyklým postupem přejdeme k vyšetřování koeficientů při x^k v součinu

$$P(x) = (1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + \ldots + a_1^m x^m + \ldots)\,(1 + a_2 x + a_2^2 x^2 + \ldots + a_2^m x^m + \ldots) \ldots (1 + a_n x + a_n^2 x^2 + \ldots + a_n^m x^m + \ldots)\,. \tag{15}$$

Dále jako obvykle položíme $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ a vidíme, že pak

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^m + \ldots)^n = (1 - x)^{-n} = B_{-n}(-x)\,.$$

Koeficient při x^k v řadě $B_{-n}(-x)$ je ovšem

$$(-1)^k \binom{-n}{k} = \binom{n + k - 1}{k}$$

— viz vzorec (II.18); pro počet kombinací k-té třídy s neomezeným opakováním z n prvků máme tedy výraz $\binom{n + k - 1}{k}$.

Cvičení

9. Určete počet kombinací šesté třídy s libovolným opakováním ze tří prvků, jestliže se v každé kombinaci vyskytují vždy všechny tři prvky.
10. Určete počet kombinací čtvrté třídy z n prvků, jestliže se každý prvek vyskytuje v každé kombinaci vždy v sudém počtu exemplářů.
11. Z pěti prvků $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tvoříme kombinaci s opakováním, vyhovující těmto podmínkám:

a) Prvky α, β, γ se vyskytují v sudém, δ a ε v lichém počtu exemplářů.

b) Počet exemplářů prvku α je vždy alespoň dvojnásobkem počtu exemplářů prvku δ.

c) V kombinaci nejsou nikdy prvky α a β současně, prvky α a γ jsou přítomny současně jen tehdy, když je přítomen též prvek δ.

d) Je-li v kombinaci sudý počet exemplářů prvku α, je v ní lichý počet exemplářů prvku β a obráceně; prvek δ je přítomen nejvýše ve dvou exemplářích, prvek ε nejvýše v jednom.

Určete jejich počty.

12. Určete počet kombinací k-té třídy z n prvků takových, že v kombinaci je vždy m prvků ve dvou exemplářích a $n - 2m$ prvků v jednom exempláři ($0 \leqq m \leqq 2m \leqq \leqq n$).

13. Ukažte, že počet kombinací k-té třídy z n prvků takových, že v kombinaci je vždy jeden prvek v p exemplářích a $n - p$ prvků v jednom exempláři, je dán součtem

$$\binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-1} + \ldots + \binom{n-p}{k-p},$$

$0 < p < k$.

4. Exponenciální vytvořující funkce. V první kapitole jsme si v souvislosti se studiem normálních soustav mnohočlenů vedle obyčejných koeficientů mnohočlenů zavedli též obecnější pojem *koeficientů vzhledem k určité normální soustavě* (viz paragraf 6 první kapitoly). Také tento pojem bychom mohli rozšířit z mnohočlenů na řady. Při dané normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, vyhovujících známým podmínkám (i), (ii) a (iii) bychom studovali „řady vzhledem k dané normální soustavě“, tj. výrazy tvaru

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \,. \tag{16}$$

V obecném případě bychom však brzy narazili na dosti vážné potíže, např. při vyšetřování operace dosazení do řady. Existuje však jeden speciální případ, kdy řady tvaru (16) skutečně používáme. Je to případ normální soustavy mnohočlenů $P_k(x) = x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, který je celkem jednoduchý, takže ho dokážeme zvládnout i našimi poměrně omezenými prostředky, a který přitom vede k velmi užitečným výsledkům.

Mějme tedy znovu posloupnost reálných čísel (1) a vedle její vytvořující řady $A(x)$ dané vzorcem (2) vezměme řadu

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2/2! + \ldots + a_k x^k/k! + \ldots; \tag{17}$$

nazveme ji *exponenciální vytvořující řadou* posloupnosti (1). Poloměr řady $G(x)$ není ovšem nikdy menší nežli poloměr řady $A(x)$, ba dokonce víme (viz konec šestého paragrafu druhé kapitoly), že řada $G(x)$ je celistvá, jakmile má řada $A(x)$ kladný poloměr. Může se dokonce stát, že řada $G(x)$ má kladný poloměr, i když řada $A(x)$ je banální. Do řady $G(x)$ můžeme tedy dosazovat stejně dobře a obvykle podstatně lépe (tj. s menšími omezeními) než do řady $A(x)$. Funkce $g(q) = G(q)$, kterou si takto (pro q menší nežli poloměr řady $G(x)$) můžeme definovat, se nazývá *exponenciální vytvořující funkcí* posloupnosti (1); její definiční interval obsahuje (a obvykle dokonce přesahuje) definiční interval vytvořující funkce posloupnosti (1). Není těžké udat příklad posloupnosti, která nemá vytvořující funkci, má však exponenciální vytvořující funkci.

Příklad 8. Posloupnost $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ má za exponenciální vytvořující řadu celistvou řadu $E(x)$; příslušná exponenciální vytvořující funkce je $g(q) = e^q$ (viz osmý paragraf druhé kapitoly).

Cvičení

14. Najděte exponenciální vytvořující řady a funkce posloupností
    a) $0, 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots,$
    b) $0, 1, 4, 9, \ldots, k^2, \ldots,$
    c) $0, 2, 6, \ldots, k^2 - k, \ldots$
15. Najděte posloupnost, jejíž exponenciální vytvořující funkcí je $g(q) = (1 + q)^n$.
16. Jaké operaci s posloupnostmi odpovídá a) sčítání, b) násobení jejich exponenciálních vytvořujících funkcí?
17. Dokažte, že exponenciální vytvořující řadou posloupnosti Stirlingových čísel druhého druhu je

$$H_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n/n! = [E(x) - 1]^k/k!$$

5. Permutace a variace. Při tvoření kombinací k-té třídy z n prvků, tj. při vybírání k-tic prvků z dané n-prvkové množiny, nerozlišujeme výsledné kombinace podle pořadí, v jakém byly jednotlivé prvky vybrány. Také součin (11), jehož jsme užili ke stanovení počtu kombinací, je nezávislý na pořadí, v němž jsou jeho činitelé zapsáni; násobení je komutativní operace.

Jestliže tedy chceme při postupném vybírání prvků z dané množiny rozlišovat také pořadí (v takovém případě už nemluvíme o kombinacích, ale obvykle o *variacích* nebo o *uspořádaných výběrech*), musíme postup uvedený ve třetím paragrafu obměnit tak, aby pořadí respektoval. Cesta vedoucí přes zavedení nové, nekomutativní operace je sice možná, ale nepříliš schůdná. Spokojíme se proto takovou úpravou, která dovoluje určit počet uspořádaných výběrů, ale nedává jejich úplný výčet tak, jak jsme to u kombinací viděli v (12).

Z elementární kombinatoriky víme, že počet permutací n prvků, tj. počet různých způsobů, jimiž lze uspořádat n navzájem rozlišitelných prvků, je dán číslem $n! = F_n(n)$. Mějme opět n různých „čísel" $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a utvořme z nich všechny kombinace k-té třídy. Jejich počet se nám objeví v (12) jako koeficient při x^k po dosazení $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Avšak každou takovou k-tici různých prvků můžeme uspořádat $k!$ různými způsoby. Počet variací k-té třídy je tedy $k!$ krát větší. Vyjádříme-li si týž mnohočlen (12) vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, bude nový koeficient při $x^k/k!$ přirozeně právě $k!$ násobkem původního koeficientu při x^k. Přechod k soustavě $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ znamená přechod od vytvořujících řad a funkcí k *exponenciálním vytvořujícím řadám* a funkcím; ukážeme si, že exponenciální vytvořující řady a funkce tvoří přirozený nástroj vyšetřování uspořádaných výběrů.

Podívejme se ještě na poněkud obecnější případ tzv. *variací s opakováním*, kdy máme při výběru k dispozici více exemplářů stejného prvku. Vezmeme-li takové stejné prvky do výběru, nedokážeme je pak rozlišit. Existuje např. jen jeden způsob, jak z n stejných prvků vybrat k-tici, neboť zde pořadí vůbec nerozhoduje. Má-li se počet uspořádaných výběrů (variací) objevit jako koeficient při $x^k/k!$ (k je počet vybraných prvků, „třída" variace neboli „rozsah" výběru), musí být v případě nerozlišitelných prvků tento koeficient rovný 1. To tedy znamená, že místo součinů tvaru (13), (15) apod. musíme při vyšetřování variací brát podobné součiny mnohočlenů, jejichž koeficienty vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou rovny 1. Máme-li tedy např. po dvou exemplářích dvou různých prvků a_1 a a_2, vezmeme místo (13) součin

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2/2!)\,(1 + a_2x + a_2^2x^2/2!)\ ; \qquad (18)$$

po roznásobení a dosazení $a_1 = a_2 = 1$ dostaneme odtud skutečně počty variací třídy $k = 0, 1, \ldots, 4$ jako koeficienty (vzhledem k soustavě $x^m/m!$) mnohočlenu

$$1 + 2x + 4x^2/2! + 6x^3/3! + 6x^4/4!$$

Příklad 9. Ze dvou prvků a_1 a a_2 tvořme variace páté třídy s podmínkou, že se v nich prvek a_1 objeví v lichém počtu exemplářů a prvek a_2 nejvýše dvakrát. Počet variací tohoto druhu dostaneme z koeficientu při $x^5/5!$ v součinu

$$(a_1x + a_1^3x^3/3! + a_1^5x^5/5!)\,(1 + a_2x + a_2^2x^2/2!)\,.$$

Snadno se vidí, že tento koeficient je

$$a_1^5 + \frac{5!}{2!\,3!}\;a_1^3a_2^2\ ,$$

takže po obvyklém dosazení $a_1 = a_2 = 1$ vyjde pro hledaný počet výsledek 11.

Podobně se postupuje i v obecnějších a složitějších případech. Princip použití exponenciálních vytvořujících řad pro studium variací je snad z uvedených příkladů dostatečně patrný. Při troše cviku není ani nutné vypisovat ve výchozích mnohočlenech, resp. řadách dané prvky a_1, $a_2, \ldots$, a je možno psát rovnou součiny po dosazení $a_1 = a_2 = \ldots = 1$. Na rozdíl od případu kombinací nám totiž rozpis součinů stejně nedá výčet variací, ale jen jejich počet.

Všimněme si ještě dvou speciálních a vlastně téměř triviálních výsledků.

Koeficient při $x^k/k!$ v mnohočlenu $(1 + x)^n$ je $k!\binom{n}{k} = F_k(n)$; to je *počet variací (bez opakování) k-té třídy z n prvků.*

Počet variací k-té třídy z n prvků s libovolným opakováním dostaneme jako koeficient při $x^k/k!$ v řadě

$$(1 + x + x^2/2! + \ldots + x^j/j! + \ldots)^n .$$

Výraz v závorce však není nic jiného než naše známá řada $E(x)$; podle (II.61) je $[E(x)]^n = E(nx)$ a hledaný koeficient je tedy n^k. Variace s neomezeným opakováním lze ovšem vyjádřit též jako prvky k-té kartézské mocniny dané n-prvkové množiny a ta má ovšem n^k prvků.

Na závěr ještě poznámku k terminologii. Permutace v obvyklém smyslu jsou zvláštním případem variací (variace n-té třídy z n prvků), takže pro ně nemusíme odvozovat zvláštní vzorce. Tato souvislost vede dokonce některé matematiky k tomu, že oba pojmy ani nerozlišují a užívají jednotného názvu *permutace*; z tradičních důvodů jsme se zde přidrželi termínu variace. Název *uspořádaný výběr* má svůj původ v matematické statistice.

Cvičení

18. Vypište si explicitně všechny variace ze součinu (18) i 11 variací páté třídy z příkladu 9.
19. Proveďte si cvičení 9—12 s tou změnou, že místo kombinací hledáte variace.

6. Rozklady čísel. Budiž n přirozené číslo. Rozkladem čísla n budeme rozumět každé jeho vyjádření ve tvaru součtu přirozených sčítanců

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \,, \tag{19}$$

přičemž nerozlišujeme rozklady lišící se jen pořadím sčítanců. (Pro jednoznačnost je tedy vhodné předpokládat $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 1$.)

Příklad 10. Existuje pět rozkladů čísla 8 na čtyři sčítance:

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1 \,, \quad 8 = 4 + 2 + 1 + 1 \,,$$
$$8 = 3 + 3 + 1 + 1 \,, \quad 8 = 3 + 2 + 2 + 1 \,,$$
$$8 = 2 + 2 + 2 + 2 \,,$$

a dva rozklady na šest sčítanců:

$$8 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \,,$$
$$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \,.$$

Ke stručnějšímu vyjádření rozkladů se obvykle používá symbolického zápisu, kde sčítání je nahrazeno násobením. Tak např. rozklady z příkladu 10 se stručně zapíší jako $5 \,.\, 1^3$, $4 \,.\, 2 \,.\, 1^2$, $3^2 \,.\, 1^2$, $3 \,.\, 2^2 \,.\, 1$, 2^4, resp. $3 \,.\, 1^5$, $2^2 \,.\, 1^4$. Někdy je vhodné připustit též nulové exponenty (znamenají ovšem, že se příslušný sčítanec v rozkladu nevyskytuje) zvláště tam, kde nevíme předem, jaké hodnoty sčítanců se nám v rozkladu objeví; např. $5 \,.\, 4^0 \,.\, 3^2 \,.\, 2^0 \,.\, 1^2$ značí rozklad $5 \,.\, 3^2 \,.\, 1^2$, tedy

$$13 = 5 + 3 + 3 + 1 + 1 \,.$$

Označíme si P_n^m počet všech různých rozkladů čísla n na právě m sčítanců a P_n počet všech rozkladů n bez ohledu na počet sčítanců. Platí zřejmě

$$P_n^1 = 1 \ , \quad P_n^n = 1 \tag{20}$$

a

$$P_n = P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^n \ . \tag{21}$$

Snadno se dokáže platnost zajímavého vztahu

$$P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_k^n = P_{n+k}^k \ , \qquad 1 \leqq k \leqq n \ . \tag{22}$$

Skutečně, levá strana (22) vyjadřuje počet rozkladů čísla n na *nejvýše* k sčítanců. Vezměme si takový rozklad

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \ , \qquad m \leqq k \ ,$$

kde $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 1$ a v případě $m < k$ si jej doplňme formálně nulami na součet *právě* k sčítanců

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_k \ ,$$

$a_{m+1} = \ldots = a_k = 0$. Zvýšíme-li teď každý sčítanec o 1, dostaneme zřejmě rozklad

$$n + k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \ldots + (a_k + 1)$$

čísla $n + k$ na právě k sčítanců, přičemž opět platí nerovnosti $(a_1 + 1) \geqq (a_2 + 1) \geqq \ldots \geqq (a_k + 1) \geqq 1$. Naopak z každého rozkladu čísla $n + k$ na *právě* k kladných sčítanců dostaneme odečtením 1 od každého z nich rozklad čísla n na *nejvýše* k kladných sčítanců. Přitom je vidět, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné. Dva různé rozklady čísla n se nutně liší v některém ze sčítanců, ale přičtení jednotky ke všem sčítancům tuto nerovnost zachová, a podobně obráceně; tím je rovnost (22) dokázána.

K určení čísel P_n a P_n^m užijeme vytvořujících řad. Vezměme si opět naše abstraktní prvky — čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a utvořme součin

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2 + \ldots + a_1^kx^k + \ldots)(1 + a_2x^2 + a_2^2x^4 + \ldots + a_2^kx^{2k} +) \, . \, (1 + a_3x^3 + a_3^2x^6 + \ldots) \ldots \ldots (1 + a_nx^n + a_n^2x^{2n} + \ldots) \, . \tag{23}$$

Po roznásobení dostaneme jako koeficient při x^k, $0 \leqq k \leqq n$, součet výrazů tvaru

$$a_1^{\alpha_1} \, a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} \; , \tag{24}$$

kde α_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou celá nezáporná čísla, pro která platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = k \; . \tag{25}$$

Přitom jsou výrazy (24) v koeficientu při x^k vesměs navzájem různé. Avšak každému vyjádření čísla k ve tvaru (25) lze, a to vzájemně jednoznačně, přiřadit rozklad čísla k, totiž rozklad $n^{\alpha_n} \, (n-1)^{\alpha_{n-1}} \ldots 2^{\alpha_2} \, 1^{\alpha_1}$, resp.

$$\begin{aligned} k = {} & \underbrace{n + n + \ldots + n +}_{\alpha_n} \\ & + \underbrace{(n-1) + \ldots + (n-1) +}_{\alpha_{n-1}} \\ & + \ldots \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2 +}_{\alpha_2} \\ & + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\alpha_1} \, . \end{aligned}$$

Nyní již zbývá jen položit jako obvykle $a_1 = a_2 \ldots = a_n = 1$ a koeficient při x^k nám udá právě počet P_k všech rozkladů čísla k.

V součinu (23) odpovídá činitel tvaru

$$1 + a_m x^m + a_m^2 x^{2m} + \ldots + a_m^j x^{mj} + \ldots \quad (26)$$

výskytům sčítanců velikosti m ve výsledném rozkladu. Poněvadž se v rozkladu čísla $k \leqq n$ nemůže objevit sčítanec větší než n, mohli jsme se při určování P_k $(1 \leqq k \leqq n)$ omezit na n činitelů. Kdybychom chtěli vyjádřit najednou všechna P_k jako koeficienty jediné řady, museli bychom místo (23) vzít vlastně součin nekonečně mnoha řad tvaru (26) pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ Součiny nekonečně mnoha řad jsme si sice ve druhé kapitole nedefinovali, ale — jak jsme ostatně právě viděli — v našem případě stačí vzít pro každé pevné k jen konečný počet činitelů, abychom mohli vypočítat koeficient při x^k. Z ostatních řad (pro $m > k$) už stejně musíme vzít jen první člen, totiž 1, jako faktor a (obdobně jako v našem prvním „axiómu" o dosazování do řad) je přirozené pokládat součin i nekonečně mnoha jedniček za rovný 1.

Při $k > n$ nebude koeficient u x^k v (23) roven P_k, ale bude, jak snadno nahlédneme, udávat *počet rozkladů čísla k na sčítance nejvýše rovné n*, což je jistě také zajímavý výsledek. Součiny tvaru (23) můžeme ostatně i jinak modifikovat obvyklými způsoby, chceme-li dostávat jen rozklady vyhovující dalším omezujícím podmínkám. Tak např. pro stanovení počtu rozkladů čísla n na součty výhradně lichých sčítanců stačí najít koeficient při x^n v součinu řad (26) pro $m = 1, 3, 5, \ldots, 2k + 1; 2k + 1 \leqq n < 2k + 3$. Každá řada tvaru (26) je ovšem reciproká k mnohočlenu $(1 - a_m x^m)$, takže místo toho můžeme psát kratčeji

$$(1 - a_1 x)^{-1} (1 - a_3 x^3)^{-1} \ldots (1 - a_{2k+1} x^{2k+1})^{-1} , \quad (27)$$

resp. již bez a_m

$$(1 - x)^{-1} (1 - x^3)^{-1} \ldots (1 - x^{2k+1})^{-1} . \quad (27')$$

Příklad 11. Vezměme si rozklady s vesměs různými sčítanci. Vynecháme-li v řadách (26) členy odpovídající opakování téhož sčítance, dostaneme místo (23) součin dvojčlenů

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x^2) \dots (1 + a_nx^n) ,$$

resp. po dosazení $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ součin

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^n) . \tag{28}$$

Koeficient při x^k, $1 \leqq k \leqq n$, v (28) udává *počet rozkladů čísla k na vesměs různé sčítance.*

Teorie rozkladů přirozených čísel na sčítance tvoří velmi zajímavý a poměrně rozsáhlý oddíl kombinatoriky, z něhož jsme si tu mohli ukázat jen velmi málo. Lze však doufat, že hloubavý čtenář bude ve studiu rozkladů pokračovat samostatně i dále. Připomeňme jenom, že vytvořující funkce nejsou jediným vhodným nástrojem k vyšetřování rozkladů. Mnohé jejich vlastnosti lze velmi snadno odvodit grafickými metodami.

Jestliže rozlišujeme vyjádření (19) lišící se *pořadím* sčítanců, nemluvíme o rozkladech čísla n, ale o jeho *kompozicích.* Dá se dokázat, že existuje právě $\binom{n-1}{m-1}$ kompozic čísla n s m sčítanci. Příslušná vytvořující řada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-1}{m-1} x^n = x^m(1 - x)^{-m} = (x + x^2 + \dots + x^k + \dots)^m . \tag{29}$$

Cvičení

20. Kolik existuje rozkladů čísla 11 na tři sčítance?

21. Kolik existuje rozkladů čísla 12 na pouze sudé sčítance?
22. Vypište si všechny rozklady a všechny kompozice čísla 5. Jak závisí počet kompozic na počtu rozkladů?
23. Kolik existuje rozkladů čísla 19 na lichý počet sčítanců?
24. Dokažte, že počet rozkladů čísla n na vesměs různé sčítance se rovná počtu rozkladů čísla n na liché sčítance.
25. Sestavte si tabulku čísel P_n^k pro $1 \leqq k \leqq n \leqq 8$.
26. Dokažte, že P_n^k je také počet rozkladů čísla n s největším sčítancem rovným k.
27. Dokažte, že koeficient při x^n v součinu
$(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^m), \quad m \geqq n,$
se rovná $(-1)^k$, je-li n tvaru $(3k^2 \pm k)/2$, a nule v ostatních případech.
28. Odůvodněte obvyklým postupem, proč je vytvořující řadou pro počty kompozic právě (29).
29. Ukažte, že počet kompozic čísla n s m sčítanci rovnými nejvýše k se rovná koeficientu při x^n v mnohočlenu $(x + x^2 + \dots + x^k)^m$.

7. Rozmisťovací úlohy. S rozklady a kompozicemi čísel souvisejí dost úzce též kombinatorické úlohy známé jako úlohy o rozmisťování předmětů v přihrádkách. Mějme n různých předmětů a r přihrádek, každý předmět umístíme v (právě) jedné přihrádce; kolika různými způsoby lze toto rozmístění provést?

Nepřipojíme-li žádné další podmínky, je odpověď na tuto otázku poměrně jednoduchá: pro každý předmět máme r možností umístění, celkem tedy r^n.

Proces umisťování předmětů do přihrádek si ostatně můžeme představit také jako postupné vybírání přihrádek.

Bereme jeden po druhém jednotlivé předměty a každému vybereme jednu přihrádku; jde tedy o n-násobný uspořádaný výběr z r možností s libovolným opakováním. Takový výběr jsme si už popsali v pátém paragrafu, kde jsme také došli ke stejnému výsledku r^n.

Místo o vybírání přihrádek pro předměty můžeme ovšem opět uvažovat o vybírání jednotlivých faktorů z různých činitelů v součinech mnohočlenů, resp. řad. Vezměme si součin n stejných výrazů tvaru $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$, tedy vlastně n-tou mocninu

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)(a_1 + a_2 + \\ + \ldots + a_r) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_r) \,, \qquad (30)$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jsou opět známá abstraktní „čísla“. Jestliže součin (30) rozepíšeme, dostaneme součet celkem r^n členů, z nichž každý je součinem n faktorů — čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$ —, vybraných vždy po jednom z každého z n činitelů součinu (30). Souvislost s problémem rozmisťování je zřejmá. Umístění k-tého ($k = 1, 2, \ldots, n$) předmětu do j-té ($j = 1, 2, \ldots, r$) přihrádky odpovídá volba faktoru a_j z k-tého činitele součinu (30). Toto přiřazení jednotlivých členů roznásobeného součinu (30) různým způsobům rozmístění n předmětů v r přihrádkách je vzájemně jednoznačné, a proto je také celkový počet členů roznásobeného součinu roven počtu všech možných rozmístění, totiž r^n; číslo r^n dostaneme z (30) obvyklým způsobem, tj. dosazením $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$.

Ze součinu (30) však můžeme získat i zajímavější výsledky. V rozepsaném součinu se budou opakovat některé stejné členy (násobení je komutativní a asociativní operace); sloučíme-li je, můžeme (30) psát ve tvaru

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \\ = \Sigma\, C(a_1, a_2, \ldots, a_r)\, \alpha_1{}^{a_1}\, \alpha_2{}^{a_2} \ldots \alpha_r{}^{a_r} \qquad (31)$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jsou celá nezáporná čísla se součtem

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n \ ; \tag{32}$$

sčítá se přes všechny možné takové r-tice. Koeficienty $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ jsou rovněž celé, nezáporné a vyjadřují vždy počet těch členů roznásobeného součinu (30), které mají právě tvar $\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_r^{a_r}$ s danými exponenty $a_1, a_2, \ldots, a_r$. V interpretaci rozmisťovací úlohy je tedy $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ *počet způsobů rozmístění takových, že v j-té přihrádce je právě a_j předmětů, $j = 1, 2, \ldots, r$.*

Hodnoty koeficientů $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ lze určit celkem snadnou elementárně kombinatorickou úvahou (jde v podstatě o permutace s opakováním), kterou však přenecháváme čtenáři. (Ukážeme si ostatně ještě jiný způsob odvození.) Jest

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)!}{a_1!\, a_2! \ldots a_r!} \ . \tag{33}$$

Čísla $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ jsou zřejmou obdobou binomických koeficientů, jež jsou ostatně jejich speciálním případem pro $r = 2$;

$$C(a_1, a_2) = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!\, a_2!} = \binom{a_1 + a_2}{a_1} = \binom{a_1 + a_2}{a_2} \ .$$

Nazývají se též *multinomické* či *polynomické koeficienty* a značí symboly

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \binom{n}{a_1\, a_2 \ldots a_r} \ .$$

Rovnost (31) je vlastně vzorcem pro n-tou mocninu r-členu, tedy zobecnění binomického vzorce (I.3).

Dosadíme-li do (31) $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 1$, dostaneme rovnost

$$\sum C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = r^n \tag{34}$$

(sčítání probíhá opět přes všechny r-tice nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$, vyhovující (32)). Vztah (34) je obdobou a zobecněním rovnosti (I.6).

Svůj význam má též počet sčítanců v součtu v (34). Snadnou úvahou zjistíme, že to je právě *počet kompozic čísla n s nejvýše r sčítanci* (tj. s r sčítanci, z nichž ovšem některé mohou být nulové). Podobně jako při odvozování rovnosti (22) pak shledáme, že tento počet je roven $\binom{n+r-1}{n}$. Ke stejnému výsledku můžeme ostatně dojít, jestliže si uvědomíme, že kompozicím, v nichž na rozdíl od obvyklé definice připustíme i nulové sčítance, odpovídá namísto (29) vytvořující řada

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)^m = (1 - x)^{-m} \; ; \tag{35}$$

potom již stačí jen uplatnit rovnost (II.18).

Vraťme se však k naší rozmisťovací úloze a podívejme se na různé způsoby rozmístění z hlediska jedné určité přihrádky, např. r-té. Všechna možná rozmístění si uspořádáme podle počtu předmětů, které v ní umístíme. Může tu být $0, 1, 2, \ldots, n$ předmětů. Je-li v r-té přihrádce právě k předmětů, je zbývajících $n - k$ předmětů rozmístěno (libovolně) v ostatních $r - 1$ přihrádkách. Přitom k předmětů z n lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby.

Přejdeme-li znovu od přihrádek k součinu (30), který si po roznásobení uspořádáme podle mocnin čísla a_r, vidíme na základě předchozí úvahy, že má platit

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \tag{36}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_r^k (a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1})^{n-k} \; .$$

To je ovšem jen bezprostřední důsledek binomického vzorce. Rovnost (36) nás však zároveň přivádí na myšlenku neuvažovat výraz (30) izolovaně, ale — jak jsme to běžně dělali při použití metody vytvořujících řad — brát jej jako koeficient při $x^n/n!$ v *exponenciální* (srv. cvičení 16b) vytvořující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n \, x^n/n! \tag{37}$$

V řadě (37) snadno poznáme známou řadu $E(x)$ z (II.43), tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n \, x^n/n! = \tag{37'}$$

$$= E[x(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] \;;$$

podle známých vlastností řady $E(x)$ lze (37) napsat též jako součin

$$E(a_1x + a_2x + \ldots + a_rx) = E(a_1x)\, E(a_2x) \ldots E(a_rx) \,. \tag{37''}$$

Ukážeme si teď, že řada (37) má skutečně výhodné vlastnosti pro studium rozmisťovací úlohy. Můžeme totiž z ní, resp. z jejích modifikací snadno získat vzorce pro počty nejen všech možných způsobů rozmístění, ale i pro počty rozmístění vyhovujících určitým dodatečným podmínkám.

Příklad 12. Mějme tři přihrádky a pět předmětů. Kolika způsoby lze provést jejich rozmístění tak, aby žádná z přihrádek nezůstala prázdná? Vedeni analogií s postupy uplatněnými v předcházejících paragrafech dospějeme k závěru, že podmínka neprázdnosti přihrádek se projeví vynecháním absolutního členu ve faktorech $E(a_j x)$ součinu (37''), takže hledaná rozmístění nalezneme pomocí koeficientu při $x^5/5!$ v součinu

$$[E(a_1x) - 1] \,.\, [E(a_2x) - 1] \,.\, [E(a_3x) - 1] ;$$

přímým výpočtem snadno zjistíme, že tímto koeficientem je výraz

$$\frac{5!}{3!} (a_1a_2a_3^3 + a_1a_2^3a_3 + a_1^3a_2a_3) +$$

$$+ \frac{5!}{2!\,2!} (a_1a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2a_3^2 + a_1^2a_2^2a_3) \,.$$

Dosazením $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ pak nalezneme hledaný počet způsobů rozmístění: $3 \,.\, 5!/6 + 3 \,.\, 5!/4 = 60 + + 90 = 150$.

Další obdobné úlohy s různými omezeními (několik jich je uvedeno v připojených cvičeních) dokáže už čtenář jistě rozřešit sám. Ukažme si tu ještě na závěr, jak lze analýzou koeficientu při $x^n/n!$ v (37) odvodit vzorec (33). V (37) je tímto koeficientem součin (30), který lze vyjádřit ve tvaru součtu (31). Naproti tomu z vyjádření (37'') vidíme, že po provedení násobení dostaneme jako koeficient při x^n součet součinů koeficientů při x^{α_j} v řadách $E(a_jx)$, $j = = 1, 2, \ldots, r$; sčítá se opět přes všechny r-tice celých nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ splňujících (32). Při určitých pevných hodnotách čísel α_j to bude

$$(a_1^{\alpha_1}/\alpha_1!)\,(a_2^{\alpha_2}/\alpha_2!) \ldots (a_r^{\alpha_r}/\alpha_r!) =$$
$$= a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r}(\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha^j!)^{-1} \,.$$

Poněvadž hledáme koeficient při $x^n/n!$, musíme výsledek násobit ještě $n!$; odtud však již bezprostředně plyne rovnost (33).

Přítomnost faktoriálů $n!$ v (exponenciální) vytvořující řadě pro rozmisťovací úlohu odpovídá předpokladu, že rozmisťované předměty dovedeme navzájem rozlišit (jsou vesměs různé), takže vzájemnou záměnou dvou předmětů ve dvou různých přihrádkách dostaneme už jiné rozmístění. Jestliže tento předpoklad opustíme, tj. jestliže naopak předpokládáme, že všechny předměty jsou stejné, takže je navzájem nerozlišíme, bude příslušnou vytvořující řadou místo (37), resp. (37″) součin (při rozmisťování bez dalších omezení)

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2 + \ldots + a_1^kx^k + \ldots)(1 + a_2x + a_2^2x^2 + \ldots + a_2^kx^k + \ldots) \ldots (1 + a_rx + a_r^2x^2 + \ldots + a_r^kx^k + \ldots) = (1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1} \ldots (1 - a_rx)^{-1} . \quad (38)$$

Odtud vidíme, že *počet různých způsobů*, jimiž lze *umístit n stejných předmětů v r přihrádkách* (o těch ovšem stále předpokládáme, že jsou navzájem rozlišitelné, např. očíslováním), je $\binom{n+r-1}{n}$; je to koeficient při x^n v řadě $(1 - x)^{-r}$, kterou z (38) dostaneme obvyklým dosazením $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$. Přenecháváme čtenáři, aby si samostatně promyslel úpravy vytvořující řady (38) odpovídající různým dodatečným omezením kladeným na rozmístění. Několik úloh na toto téma najde ve cvičeních. Zde se omezíme jen na jeden případ, který má zvláštní význam.

Jestliže totiž požadujeme, aby po rozmístění n stejných předmětů do r rozlišitelných přihrádek nezůstala žádná přihrádka prázdná, změní se (38) tak, že z jednotlivých činitelů odpadnou absolutní členy; výsledkem tedy bude řada

$$a_1a_2 \ldots a_rx^r(1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1} \ldots (1 - a_rx)^{-1} . \quad (39)$$

Obvyklým dosazením $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$ odtud dostaneme vytvořující řadu pro počty rozmístění. Je to řada, kterou už známe z (29). To není nijak překvapující, protože *každému rozmístění* n stejných předmětů do r rozlišitelných (např. očíslovaných) přihrádek *odpovídá* zřejmým způsobem *právě jedna kompozice* čísla n s r sčítanci, interpretujeme-li předměty jako jednotky a přihrádky jako sčítance. Analogickým způsobem lze ostatně vysvětlit i shodu vytvořující řady (38) s řadou (35) pro kompozice, v nichž se připouštějí i nuloví sčítanci (tj. prázdné přihrádky).

V této souvislosti napadá zcela přirozeně otázka, zda se i *rozklady* čísel dají podobným způsobem spojit s úlohou o rozmisťování. Znamená to (viz paragraf 6) nerozlišovat pořadí sčítanců — přihrádek: jde tedy o úlohu rozmístit n stejných — nerozlišitelných předmětů do r rovněž nerozlišitelných přihrádek. Výsledek, tj. počty P_n, resp. P_n^r už známe ze šestého paragrafu.

Cvičení

30. Kolika způsoby lze umístit šest různých předmětů do tří přihrádek, má-li být v každé vždy sudý počet předmětů?
31. Napište vytvořující řadu pro způsoby rozmístění n předmětů v r přihrádkách s podmínkou, že žádná přihrádka nebude prázdná a že v k-té přihrádce ($k = 1, 2, \ldots, r$) bude vždy nejvýše k předmětů. Jaké podmínky pro čísla n a r odtud vyplývají?
32. Ukažte, že počet způsobů, jimž lze n různých předmětů rozmístit v r přihrádkách, z nichž žádná nebude prázdná, je dán číslem $r!\, S(n, r)$.
33. Řešte cvičení 30 pro nerozlišitelné předměty.
34. Dokažte, že existuje právě $S(n, r)$ způsobů, jak roz-

místit n různých, rozlišitelných předmětů do r nerozlišitelných přihrádek tak, aby žádná z nich nebyla prázdná. Kolika způsoby lze rozmístění provést, opustíme-li požadavek neprázdnosti přihrádek?

8. Závěr. Omezený rozsah naší knížky nedovolil, abychom se zde seznámili s celou naznačenou problematikou do všech podrobností; v mnoha případech zůstalo jen u náznaku. Na tuto skutečnost jsme ostatně čtenáře upozornili již v předmluvě. Nemělo by to ani být považováno za příliš závažný nedostatek. Nešlo přece o to dát čtenáři všeobsáhlé kompendium, kde by našel odpovědi na všechny otázky; naším cílem bylo daleko spíše právě na tyto otázky, problémy a úlohy upozornit a naznačit metody jejich studia a cesty k jejich řešení. Doufáme, že čtenář, který po přečtení této knížky pocítí touhu seznámit se důkladněji s krásnou, byť i poněkud opomíjenou oblastí matematiky, jíž je kombinatorika, bude v jejím studiu pokračovat. Nebude proto snad na škodu, jestliže mu ještě poradíme, kde může hledat další, důkladnější poučení.

Při sestavování seznamu literatury byly vzaty v úvahu především *přístupnost* a hlavně *dostupnost* doporučovaných knížek; proto jsou u knih západních autorů uvedeny — pokud existují — jen ruské překlady. Česká a slovenská matematická literatura postrádá dosud vhodné dílo o kombinatorice, s výjimkou knížek o teorii grafů vydaných pod „kombinatorickou" firmou.