I.

MNOHOČLENY A JEJICH KOEFICIENTY

1. Mnohočleny. Převážnou většinu čtenářů této knížky budou bezpochyby tvořit žáci středních škol, kteří se hlouběji zajímají o matematiku, takže snad nebude nemístné očekávat, že mají jisté základní znalosti středoškolské algebry. Půjde tu především o *mnohočleny* (polynomy) s reálnými koeficienty. Předpokládáme tedy, že naši čtenáři znají nejenom samotný pojem mnohočlenu, ale že se seznámili i s jednoduššími vlastnostmi mnohočlenů, vědí např., co to jsou koeficienty mnohočlenu, absolutní člen, stupeň mnohočlenu, nulový mnohočlen atp., dovedou také s mnohočleny zacházet, tzn. upravovat je a provádět s nimi základní početní operace sčítání a násobení, umějí dosazovat do mnohočlenu za proměnnou reálné hodnoty atd. Mohou si ostatně — pokud by si snad v těchto věcech nebyli jisti — své vědomosti o mnohočlenech doplnit a z obecnějšího hlediska prohloubit prostudováním příslušných partií 26. svazku Školy mladých matematiků, tj. knížky K. Hruši *Polynomy v moderní algebře* (Mladá fronta, Praha 1970). Četbu Hrušovy knížky můžeme doporučit všem, není však nezbytně nutná pro porozumění našemu dalšímu výkladu.

Mnohočleny zde budeme obvykle psát v základním tvaru se členy uspořádanými podle mocnin proměnné

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n , \tag{1}$$

přičemž většinou nevypisujeme členy s nulovými koeficienty ani koeficienty, které jsou rovny jedné. Zápis (1) vyjadřuje tedy mnohočlen stupně n, je-li $a_n \neq 0$, resp. obecně mnohočlen stupně nejvýše n.

Předpokládáme také, že naši čtenáři vědí, že dva mnohočleny jsou si rovny (a to identicky, pro všechny reálné hodnoty proměnné x) *právě tehdy*, jestliže mají u stejných mocnin proměnné vesměs také stejné koeficienty. Této věty budeme v dalším často používat.

Pro úplnost připojme ještě snad úplnou samozřejmost, že znalost mnohočlenů a početních operací s nimi nutně předpokládá znalost reálných čísel (a operací s nimi), jež v mnohočlenech vystupují v roli koeficientů: jednak se operace s mnohočleny i četné jejich vlastnosti obvykle převádějí na obdobné operace s jejich koeficienty, jednak tvoří reálná čísla vlastně jen zvláštní případ mnohočlenů — mnohočleny nultého stupně neboli konstanty.

2. Binomické koeficienty. Již na střední škole se při různých příležitostech setkáváme s čísly $\binom{n}{k}$, definovanými pro celá $n \geqq k \geqq 0$ vzorcem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad (0! = 1)\ ; \tag{2}$$

tuto definici pak rozšiřujeme pro všechna celá nezáporná n, k tak, že při $k > n$ klademe $\binom{n}{k} = 0$.

V kombinatorice známe čísla $\binom{n}{k}$ pod názvem *kombinační čísla*: číslo $\binom{n}{k}$ udává „počet kombinací k-té třídy z $n$prvků“, neboli — vyjádřeno modernější terminologií

— počet všech různých k-prvkových podmnožin dané množiny o n prvcích.

V jiné souvislosti se nám čísla $\binom{n}{k}$ objevují v tzv. binomickém vzorci, tj. ve vzorci pro n-tou mocninu dvojčlenu (binomu):

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \\ + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n ; \tag{3}$$

zde se číslům $\binom{n}{k}$ říká *binomické koeficienty*.

O obou těchto významech i o četných dalších vlastnostech čísel $\binom{n}{k}$ pojednává mj. knížka J. Sedláčka, *Faktoriály a kombinační čísla*, která vyšla jako 10. svazek Školy mladých matematiků (Mladá Fronta, Praha 1964); doporučujeme čtenářům, aby si ji příležitostně také pročetli.

V dalším nás budou zajímat především vlastnosti čísel $\binom{n}{k}$ jakožto binomických koeficientů; k souvislostem s kombinatorickými problémy se vrátíme až později, ke konci naší knížky. Budeme tu vycházet z binomického vzorce (3), který si však upravíme dosazením $a = 1, b = x$ na výhodnější tvar

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^k + \\ + \ldots + \binom{n}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k , \tag{4}$$

($n \geqq 0$, celé

číslo $\binom{n}{k}$ je tu koeficientem při x^k v mnohočlenu $(1 + x)^n$.

Některé jednoduché vlastnosti čísel $\binom{n}{k}$ jsou všeobecně známé a snadno se odvodí přímo z jejich definice (2). Tak např. víme, že pro všechna celá nezáporná n, k platí

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{5}$$

Přímý důkaz rovnosti (5) pomocí vyjádření (2) není opravdu nijak obtížný a vyžaduje jen jisté elemementární úpravy odpovídajících výrazů. Jestliže však už známe vztah (4), můžeme ho využít k poněkud méně pracnému odvození rovnosti (5). Skutečně, stačí k tomu vyjít z identity

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n = (1 + x)^n + \\ + x(1 + x)^n .$$

Podle věty o rovnosti koeficientů v mnohočlenech, kterou jsme si připomněli v předchozím odstavci, je koeficient při x^{k+1} v mnohočlenu na levé straně — a to je právě číslo $\binom{n+1}{k+1}$ — nutně roven odpovídajícímu koeficientu v mnohočlenu na pravé straně, resp. součtu všech takových koeficientů v mnohočlenech, jejichž součet tuto pravou stranu identity tvoří. To však je právě součet čísel $\binom{n}{k+1}$ a $\binom{n}{k}$; tím je rovnost (5) obecně dokázána.

Věty o rovnosti koeficientů však můžeme použít také v obráceném směru. Mají-li dva mnohočleny vesměs stejné koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné, jsou si také identicky rovny a můžeme tudíž do nich dosadit za proměnnou libovolnou reálnou hodnotu; rovnost zůstane zachována. Také tohoto postupu dosazování reálných hodnot za proměnnou lze využít k odvození různých vztahů a vlastností binomických koeficientů. Takřka triviálním příkladem je důkaz známé rovnosti

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n\ ; \tag{6}$$

dostaneme ji ze (4) dosazením $x = 1$.

Tyto dva jednoduché příklady naznačují vlastně již základní myšlenku celé další teorie, využití věty o rovnosti koeficientů k odvozování vztahů mezi nimi; tuto myšlenku budeme nyní dále rozvíjet. Nejprve si však pro pocvičení odvodíme obdobným způsobem ještě několik dalších, známých i méně známých, prostých i méně samozřejmých vlastností čísel $\binom{n}{k}$.

Příklad 1. Přímým zobecněním vzorce (5) je rovnost

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}, \tag{7}$$

platná pro celá nezáporná n, m a $k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$. Odvodíme si ji snadno porovnáním koeficientů při x^k v mnohočlenech v identitě

$$(1+x)^{n+m}=(1+x)^n(1+x)^m\,.$$

Předpokládáme, že si čtenář dovede představit, jak vypadají koeficienty v součinu dvou mnohočlenů. Vzorec (5) je pak speciálním případem vzorce (7), a to pro $m = 1$.

Příklad 2. Celkem snadná a ostatně z (2) zcela zřejmá je rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{8}$$

$$n \geqq k \geqq 0 ;$$

můžeme ji získat i tak, že ve vzorci (4) budeme předpokládat $x \neq 0$ a položíme $y = 1/x$; bude pak (identicky)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^n = \frac{1}{y^n}(1 + y)^n =$$

$$= \frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k .$$

Jak vidíme, může být někdy přímá cesta snazší než oklika přes koeficienty mnohočlenů, to však nijak nesnižuje užitečnost obecného postupu.

Aby vztah (8) platil i při $k > n$, kdy je $\binom{n}{k} = 0$, doplňuje se někdy definice čísel $\binom{n}{k}$ pro záporná k tak, že také zde klademe $\binom{n}{k} = 0$ (tedy pro $n \geqq 0 > k$).

Příklad 3. Trochu méně známá je snad rovnost

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 . \tag{9}$$

K jejímu odvození užijeme rovnosti (8), která umožňuje psát (9) ve tvaru

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j}.$$

Potom však již nejde o nic jiného než o zvláštní případ rovnosti (7), položíme-li v ní $m = n$, $k = n$.

Píšeme-li v (4) všude $-x$ místo x, dostaneme vztah

$$(1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k ; \tag{10}$$

v mnohočlenu $(1 - x)^n$ je tedy koeficient při x^k roven $(-1)^k \binom{n}{k}$. Také odtud lze odvodit řadu zajímavých vlastností čísel $\binom{n}{k}$. Dosadíme-li např. do (10) $x = 1$, dostaneme

$$(1 - 1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \tag{11}$$
$$+ \binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Podobně dosazením $x = 2$ vychází

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n. \tag{12}$$

Příklad 4. Poněvadž $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$, platí identicky

$$(1 + x)^n (1 - x)^n = (1 - x^2)^n.$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách proměnné x odtud dostáváme podle toho, zda jde o sudou či lichou mocninu, jednak

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2m-k} = (-1)^m \binom{n}{m}$$

pro $0 \leqq m \leqq n$, jednak

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2m+1-k} = 0$$

pro všechna $m \geqq 0$.

Příklad 5. Ukážeme si nyní ještě jedno zobecnění vztahu (5); vyjdeme přitom ze známé identity

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \\ + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + ab^{n-1} + b^n). \quad (13)$$

Položme zde $a = 1 + x$, $b = x$, takže

$$(1+x)^{n+1} - x^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^{n-1} + \\ + x^2(1+x)^{n-2} + \ldots + x^{n-1}(1+x) + x^n. \quad (13')$$

V této identitě porovnáme koeficienty při $x^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ na obou stranách; obdržíme tak rovnost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \quad (14)$$

$$+ \ldots + \binom{n-k}{0} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j}.$$

Píšeme-li zde $m = n - k + 1$, tj. $n = m + k - 1$, dostane rovnost (14) nový tvar, totiž

$$\binom{m+k}{k} = \binom{m+k-1}{k} + \binom{m+k-2}{k-1} + \quad (14')$$

$$+ \ldots + \binom{m-1}{0} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j}, \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

Vzorce (14′) ještě použijeme v dalších odstavcích.

Vzorci a vztahy, které jsme si tu doposud uvedli, nejsou přirozeně vyčerpány všechny možnosti. Odvození několika dalších vztahů přenecháváme pro pocvičení čtenáři.

Cvičení

Dokažte

1. $$\binom{2n}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}, \qquad 0 \leqq m \leqq n.$$

2. $$\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-k}{m} \binom{n}{k} = 0, \qquad 0 \leqq m < n.$$

3. $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-m} = 2^m \binom{n}{m}, \qquad 0 \leqq m \leqq n.$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{n}{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

5. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = 2^{2n-1}.$$

3. Stirlingova čísla. Přirozené mocniny dvojčlenu $1 + x$, resp. $1 - x$ nejsou ovšem jedinými mnohočleny, jejichž koeficienty mají zvláštní význam. Podobnou úlohu jako binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ hrají v kombinatorice i jiné koeficienty, mj. tzv. Stirlingova čísla, jež si nyní zavedeme.

Součiny tvaru

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

potkáváme v kombinatorice takřka na každém kroku, vlastně i v binomických koeficientech. Nahradíme-li zde m proměnnou x, dostaneme mnohočlen

$$F_n(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \qquad (15)$$

zřejmě n-tého stupně. Přepíšeme si jej v obvyklém tvaru, uspořádaný podle mocnin proměnné x a označíme $s(n, k)$, $k = 0,1, \dots, n$, jeho koeficienty, tedy

$$F_n(x) = s(n, 0) + s(n, 1)x + s(n, 2)x^2 + \dots + \\ + s(n, n)x^n\,. \qquad (16)$$

Čísla $s(n, k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$ se nazývají *Stirlingova čísla prvního druhu.* K jejich významu v kombinatorice se ještě vrátíme později, zde si jen — stejným způsobem jako v případě binomických koeficientů — formálně odvodíme některé vztahy a vlastnosti Stirlingových čísel.

Bezprostředním porovnáním vyjádření (15) a (16) zjistíme, že je vždy, tj. pro všechna přirozená n,

$$s(n, 0) = 0\,, \qquad s(n, n) = 1\,, \qquad (17)$$

a že pro $k > n$ je $s(n, k) = 0$, neboť $F_n(x)$ je stupně právě n.

Zároveň je však z (15) ihned vidět, že platí

$$F_{n+1}(x) = F_n(x)\,.\,(x-n) = xF_n(x) - nF_n(x)\,. \qquad (18)$$

Přepíšeme si tuto identitu pomocí (16)

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^{k+1} - n\sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^k\,.$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách proměnné x dostaneme vztah

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k), \quad 1 \leqq k \leqq n. \tag{19}$$

Spolu s hodnotami (17) umožňuje nám rekurentní relace (19) postupně vypočítat všechna Stirlingova čísla pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Několik hodnot $s(n, k)$ pro malá n, k ($\leqq 8$) uvádíme v následující tabulce, kde jsme připojili též konvencí stanovené hodnoty $s(0, 0) = 1$, $s(0, k) = 0$ pro $k > 0$ — tzn. $F_0(x) \equiv 1$ —:

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	−1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	2	−3	1	0	0	0	0	0
4	0	−6	11	−6	1	0	0	0	0
5	0	24	−50	35	−10	1	0	0	0
6	0	−120	274	−225	85	−15	1	0	0
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1	0
8	0	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1

Vztah (18) není ovšem jedinou možnou úpravou rovnosti (15). Stejně dobře můžeme podle (15) psát např.

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x-1), \tag{20}$$

odkud po přechodu k vyjádření (16) plyne rovnost

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x(x-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{j+1} (-1)^{k+j}.$$

Dalšími, celkem jednoduchými úpravami odtud dostáváme nakonec identitu

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \tag{21}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} x^k \sum_{r=0}^{n+1-k} \binom{r+k-1}{r} (-1)^r \, s(n, r+k-1)\,.$$

Jako obvykle porovnáme teď koeficienty při x^k na obou stranách identity (21) a máme

$$s(n+1,k) = \sum_{r=0}^{n+1-k} (-1)^r \binom{r+k-1}{r} s(n, r+k-1)\,, \tag{22}$$

nebo po dosazení $m = n + 1$, $q = r + k$,

$$s(m, k) = \tag{22'}$$

$$= \sum_{q=k}^{m} (-1)^{q-k} \binom{q-1}{q-k} s(m-1, q-1)\,, \qquad 1 \leqq k \leqq m\,.$$

Příklad 6. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} s(n+1, j) = \tag{23}$$

$$= s(n, k) + s(n, k-1)\,, \qquad 1 \leqq k \leqq n-1.$$

Tuto rovnost lze rovněž odvodit z (20), jestliže tam napíšeme všude $x + 1$ namísto x, tedy

$$F_{n+1}(x+1) = (x+1)\, F_n(x) = xF_n(x) + F_n(x)\,. \tag{20'}$$

Podle (16) pak bude jednak

$$F_{n+1}(x+1) = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)\,(x+1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} x^k \sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} s(n+1, j)\,,$$

jednak

$$xF_n(x) + F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x^k =$$

$$= s(n, 0)\, x^0 + \sum_{k=1}^{n} [s(n, k-1) + s(n, k)] x^k + s(n, n)\, x^{n+1}\,.$$

A nyní stačí již jen opět porovnat koeficienty při x^k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, abychom dostali požadovanou rovnost (23).

Příklad 7. Pro $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\sum_{k=j}^{n} s(n, k) \binom{k}{j} \left[n^{k-j} - (-1)^{n-k}\right] = 0\,. \qquad (24)$$

K odvození této rovnosti vyjdeme opět z (15), kde však místo x píšeme všude $-x-1$, tedy

$$F_n(-x-1) = (-x-1)(-x-2)\ldots(-x-n)\,.$$

Odtud však plyne užitečný vztah

$$F_n[-(x+1)] = (-1)^n F_n(x+n)\,. \tag{25}$$

Přejdeme nyní k vyjádření (16); na levé straně identity (25) dostáváme postupně

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(-1)^k\,(x+1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} (-1)^k\, s(n,k) \binom{k}{j}\,,$$

kdežto na pravé straně vyjde

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(x+n)^k =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, x^j n^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} (-1)^n\, s(n,k) \binom{k}{j} n^{k-j}\,.$$

Porovnáme koeficienty při stejných mocninách x a odečteme

$$\sum_{k=j}^{n} s(n,k) \binom{k}{j} \left[(-1)^n n^{k-j} - (-1)^k\right] = 0\,.$$

Vynásobením této rovnosti číslem $(-1)^n$ dostaneme (24).

Pro pocvičení přenecháváme čtenářům odvození několika jednoduchých vztahů; k jejich formulaci poskytují inspiraci výsledky uvedené výše (včetně tabulky hodnot $s(n, k)$).

Cvičení

Dokažte

6. $s(n+1, 1) = (-1)^n n!\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

7. $s(n+1, n) = -\binom{n+1}{2}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

8. $\sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k)\left[n^k - (-1)^{n-k}\right] = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Derivace. Pojem derivace funkce patří svou podstatou do matematické analýzy a pojat obecně přesahuje poněkud rámec všeobecných středoškolských znalostí. V algebře však můžeme definovat derivaci mnohočlenu zcela formálně jako jistou operaci provedenou s jeho koeficienty, bez přímé souvislosti s významem derivace jakožto limity podílu přírůstků funkce a jejího argumentu; to si nyní ukážeme.

Mějme dán mnohočlen

$$M(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,; \qquad (26)$$

jeho *derivací* nazveme a $M'(x)$ nebo $DM(x)$ označíme mnohočlen

$$M'(x) = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \ldots + a'_nx^n \ ,$$

pro jehož koeficienty platí $a'_{k-1} = k\, a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $a'_k = 0$ pro $k \geqq n$, tedy mnohočlen

$$M'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} = \tag{27}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k \ .$$

Příklad 8. Derivací mnohočlenu

$$2 - 3x^2 + 5x^3 - x^7 + x^8$$

je mnohočlen

$$-6x + 15x^2 - 7x^6 + 8x^7 \ ;$$

derivací mnohočlenu $3 - x + \frac{1}{6}x^4$ je mnohočlen $-1 + \frac{2}{3}x^3$.

Z definice derivace mnohočlenu je zřejmé, že derivací mnohočlenu stupně $n > 0$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Derivací mnohočlenu stupně nula (tj. konstanty) je vždy mnohočlen nulový: je-li $M(x) \equiv c$ je $M'(x) \equiv 0$; také derivace nulového mnohočlenu je mnohočlen nulový.

Derivace mnohočlenu je jednoznačně určena jeho koeficienty. Platí-li pro dva mnohočleny $M(x)$, $N(x)$ rovnost $M(x) = N(x)$ (ve smyslu identity, tj. rovnosti všech koeficientů), platí také $M'(x) = N'(x)$. Toto tvrzení nelze obrátit, neboť existují zřejmě různé mnohočleny mající stejnou derivaci. Jsou-li

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

a

$$N(x) = \bar{a}_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

dva mnohočleny s různými absolutními členy ($a_0 \neq \bar{a}_0$), mají přesto touž derivaci

$$M'(x) = N'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} .$$

Vzhledem k početním operacím sčítání a násobení mnohočlenů platí pro operaci derivování následující jednoduchá *pravidla*:

1. Derivace součtu dvou mnohočlenů je rovna součtu jejich derivací

$$\mathrm{D}[M(x) + N(x)] = \mathrm{D}M(x) + \mathrm{D}N(x) . \tag{28}$$

Skutečně, nechť $M(x) = \Sigma\, a_kx^k$, $N(x) = \Sigma\, b_kx^k$, pak

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[M(x) + N(x)] &= \mathrm{D}[\Sigma a_kx^k + \Sigma b_kx^k] = \\ &= \mathrm{D}[\Sigma(a_k + b_k)x^k] = \Sigma k(a_k + b_k)x^{k-1} = \\ &= \Sigma ka_kx^{k-1} + \Sigma kb_kx^{k-1} = \mathrm{D}M(x) + \mathrm{D}N(x) . \end{aligned}$$

2. Je-li c reálné číslo a $M(x)$ mnohočlen, pak derivací mnohočlenu $cM(x)$ je c-násobek derivace mnohočlenu $M(x)$

$$\mathrm{D}[cM(x)] = c\mathrm{D}M(x) . \tag{29}$$

Je totiž pro $M(x) = \Sigma a_kx^k$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[cM(x)] &= \mathrm{D}[c\Sigma a_kx^k] = \mathrm{D}[\Sigma ca_kx^k] = \\ &= \Sigma kca_kx^{k-1} = c\Sigma ka_kx^{k-1} = c\mathrm{D}M(x) . \end{aligned}$$

Derivací mnohočlenu x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) je zřejmě vždy mnohočlen kx^{k-1}; známe-li pravidla 1 a 2 a umíme-li derivovat tyto jednoduché mnohočleny tvaru x^k, umíme už derivovat libovolný mnohočlen, neboť si každý mnohočlen $M(x)$ můžeme představit jako součet mnohočlenů (vlastně jednočlenů) tvaru x^k násobených reálnými konstantami (koeficienty mnohočlenu $M(x)$).

3. Pro derivaci součinu dvou mnohočlenů platí vzorec

$$D[M(x) \,.\, N(x)] = M(x) \,.\, N'(x) + M'(x) \,.\, N(x) \,. \quad (30)$$

Nechť $M(x) = \sum a_k x^k$, $N(x) = \sum b_j x^j$, potom

$$D[M(x) \,.\, N(x)] = D\left[\sum a_k x^k \,.\, \sum b_j x^j\right] =$$

$$= D\left[\sum_k \sum_j a_k b_j x^{k+j}\right] = \sum_k \sum_j (k+j) a_k b_j x^{k+j-1} =$$

$$= \sum_k \sum_j k a_k x^{k-1} b_j x^j + \sum_k \sum_j a_k x^k j b_j x^{j-1} =$$

$$= \sum_k k a_k x^{k-1} \sum_j b_j x^j + \sum_k a_k x^k \sum_j j b_j x^{j-1} =$$

$$= M'(x)\, N(x) + M(x)\, N'(x) \,.$$

Příklad 9. Nechť $M(x) = 1 + 2x + x^2$, $N(x) = 1 - 2x + x^2$ a počítejme derivaci součinu obou těchto mnohočlenů. Je $M'(x) = 2 + 2x$, $N'(x) = -2 + 2x$, takže podle (30) bude

$$\begin{aligned} D[M(x) \,.\, N(x)] &= M'(x)\, N(x) + M(x) \,.\, N'(x) = \\ &= (2 + 2x)(1 - 2x + x^2) + (1 + 2x + x^2)(-2 + 2x) = \\ &= 2 - 2x - 2x^2 + 2x^3 - 2 - 2x + 2x^2 + 2x^3 = \\ &= -4x + 4x^3 \,. \end{aligned}$$

Na druhé straně však snadno zjistíme, že $M(x) = (1 + x)^2$, $N(x) = (1 - x)^2$, takže $M(x) \,.\, N(x) = [(1 + x)(1 - x)]^2 = (1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, a tedy přímo podle definice derivace je

$$D[M(x) \,.\, N(x)] = -4x + 4x^3 \,;$$

obě cesty vedou přirozeně k témuž konečnému výsledku.

Vzorce (28) a (30) lze indukcí snadno rozšířit na případ libovolného (konečného) počtu sčítanců, resp. činitelů. Z (28) tak máme pro m mnohočlenů $M_1(x)$, $M_2(x)$, ..., $M_m(x)$:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} M'_j(x) = M'_1(x) + M'_2(x) + \\ + \ldots + M'_m(x) \tag{31}$$

a obdobným zobecněním vzorce (30) je

$$\mathrm{D}[M_1(x)\, M_2(x) \ldots M_m(x)] = M'_1(x)\, M_2(x) \ldots M_m(x) + \\ + M_1(x)\, M'_2(x)\, M_3(x) \ldots M_m(x) + \ldots + \\ + M_1(x)\, M_2(x) \ldots M_{m-1}(x)\, M'_m(x)\ , \tag{32}$$

tj.

$$\mathrm{D}\left[\prod_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} M'_j(x)\ .\prod_{k=1,\, k=j}^{m} M_k(x)\ . \tag{32'}$$

Položíme-li v (32) $M_j(x) = M(x)$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m$, dostaneme vztah

$$\mathrm{D}M^m(x) = mM^{m-1}(x)\, M'(x) \tag{33}$$

(vzorec pro derivaci mocniny mnohočlenu).

Příklad 10. Nechť $M(x) = 1 + x$, takže $[M(x)]^m = (1 + x)^m$, a počítejme derivaci $\mathrm{D}M^m(x)$. Podle (33) to bude

$$\mathrm{D}M^m(x) = \mathrm{D}[(1 + x)^m] = m(1 + x)^{m-1}\ .\ 1 = \\ = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^k\ .$$

Zároveň však $(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$, takže

$$D[(1+x)^m] = \sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \binom{m}{k+1} x^k.$$

Z porovnání obou výsledků vyplývá celkem známý (resp. z (2) zřejmý) vztah mezi binomickými koeficienty

$$(k+1) \binom{m}{k+1} = m \binom{m-1}{k}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \tag{34}$$

Příklad 11. Jak jsme si právě ukázali, platí pro $m > 0$

$$D[(1+x)^m] = \sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} x^{k-1} = m(1+x)^{m-1} .$$

Dosadíme-li sem $x = 1$, vyjde nám nový vztah pro binomické koeficienty

$$\sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} = m\, 2^{m-1} ; \tag{35}$$

můžeme ho jinak získat též porovnáním (34) a (6).

Poněvadž derivace každého mnohočlenu $M(x)$ je sama opět mnohočlenem, můžeme ji znovu derivovat, výsledek — tedy derivaci derivace $M'(x)$ — nazveme *druhou derivací* mnohočlenu $M(x)$ a označíme $M''(x)$ nebo $D^2M(x)$:

$$M''(x) = D^2M(x) = D[DM(x)] .$$

Obdobně definujeme dále *derivaci třetí*, *čtvrtou* atd., obecně k-tou ($k = 2, 3, 4, \ldots$) jako derivaci derivace $(k-1)$-vé:

$$D^kM(x) = D[D^{k-1} M(x)] . \tag{36}$$

Jest ovšem $D^1M(x) = DM(x) = M'(x)$; umluvíme se navíc, že pod nultou derivací $D^0M(x)$ budeme rozumět samotný mnohočlen $M(x)$. Tato konvence nám zjednoduší některé další úvahy a vzorce, např. (41). Pro všechna celá nezáporná n, m bude pak platit, jak snadno nahlédneme, vztah

$$D^m[D^nM(x)] = D^{m+n}M(x)\ . \qquad (37)$$

Pro první derivaci $M'(x)$ mnohočlenu (26) máme explicitní vzorec (27); jeho obdobou a zobecněním pro k-tou derivaci je

$$D^kM(x) = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\ldots(j-k+1)a_jx^{j-k} = \\ = \sum_{j=0}^{n-k} (j+1)(j+2)\ldots(j+k)a_{j+k}x^j\ , \qquad (38)$$

jak se snadno dokáže indukcí.

Zatímco pravidla 1 a 2 pro derivaci součtu a konstantního násobku se dají bezprostředně přenést i na případ vyšších derivací

$$D^k[M(x) + N(x)] = D^kM(x) + D^kN(x)\ , \qquad (39)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$D^k[cM(x)] = cD^kM(x)\ , \qquad (40)$$

je zobecněním vztahu (30) sám o sobě zajímavý tzv. *Leibnizův vzorec pro k-tou derivaci součinu*

$$D^k[M(x)\ .\ N(x)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^jM(x)\, D^{k-j}N(x)\ . \qquad (41)$$

Vzorec (41) se dokáže snadno indukcí. Pro $k = 1$ je (41) totéž co (30) a pro $k = 0$ je to triviální identita. Indukční krok pak využívá vztahů (39) a (36) a ovšem také (5), totiž

$$\mathrm{D}^{k+1}[M(x) \,.\, N(x)] = \mathrm{D}(\mathrm{D}^k[M(x) \,.\, N(x)]) =$$

$$= \mathrm{D}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k-j} N(x)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [\mathrm{D}^{j+1} M(x)\, \mathrm{D}^{k-j} N(x) + \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k-j+1} N(x)] =$$

$$= M(x)\, \mathrm{D}^{k+1} N(x) + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right] .$$

$$.\ \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k+1-j} N(x) + \mathrm{D}^{k-1} M(x) \,.\, N(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k+1-j} N(x) \,.$$

Řekli jsme si už — a také (27) to potvrzuje —, že derivováním se sníží stupeň mnohočlenu o jednotku; k-tá derivace mnohočlenu stupně n je tedy mnohočlenem stupně $n - k$, pokud $n \geqq k$, jak je ostatně vidět také z (38). Při $k > n$ je už k-tá derivace identicky rovna nule (je to nulový mnohočlen).

Mají-li dva mnohočleny $M(x)$ a $N(x)$ stejné k-té derivace $\mathrm{D}^k M(x) = \mathrm{D}^k N(x)$, pak jejich rozdíl $M(x) - N(x)$ má, jak plyne z uvedených pravidel (39) a (40), k-tou derivaci rovnou (identicky) nule, a je tudíž sám mnohočlenem stupně nižšího než k, příp. je to přímo mnohočlen nulový, když $M(x) = N(x)$.

Jestliže do mnohočlenu (26) dosadíme $x = 0$, dostaneme

$M(0) = a_0$. Dosadíme-li touž hodnotu do derivace $M'(x)$, vyjde $M'(0) = a_1$. Obecně pak pro k-tou derivaci ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) vychází z (38) rovnost

$$\mathrm{D}^k M(0) = k!\, a_k \ . \tag{42}$$

Obráceně tedy můžeme vyjádřit koeficienty a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) mnohočlenu (26) pomocí hodnot jeho derivací $\mathrm{D}^k M(x)$ pro $x = 0$

$$a_k = \frac{1}{k!}\mathrm{D}^k M(0) \ ,$$

takže platí

$$M(x) = M(0) + xM'(0) + x^2 \frac{1}{2} M''(0) + \ldots + \tag{43}$$

$$+ x^n \frac{1}{n!} \mathrm{D}^n M(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k M(0) \ .$$

Vzorec (43) se nazývá *MacLaurinova formule.*

Příklad 12. Pomocí MacLaurinovy formule se dá také mj. odvodit binomický vzorec, tzn. dokázat, že koeficienty mnohočlenu

$$B_n(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

jsou dány vzorcem (2). Podle (33) máme totiž $\mathrm{D}B_n(x) = nB_{n-1}(x)$, takže obecně pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí

$$\mathrm{D}^k B_n(x) = n(n-1) \ldots (n-k+1) B_{n-k}(x) \ . \tag{44}$$

Odtud po dosazení $x = 0$ vychází podle (42)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \,,$$

a to je právě vzorec (2).

Příklad 13. Ve třetím paragrafu jsme poznali mnohočleny $F_n(x)$, jejichž koeficienty jsou Stirlingova čísla $s(n, k)$. Počítejme derivaci $F'_n(x)$ podle vyjádření (15). Užitím pravidla o derivaci součinu dostáváme

$$F'_n(x) = \mathrm{D}[F_{n-1}(x)(x - n + 1)] =$$

$$= F'_{n-1}(x) \,.\, (x - n + 1) + F_{n-1}(x) \,.$$

Dosaďme sem $x = 0$:

$$F'_n(0) = F_{n-1}(0) - (n-1)F'_{n-1}(0) \,.$$

Avšak z (15) je vidět, že $F_n(0) = 0$ pro $n > 0$, kdežto $F_0(0) = 1$. Zároveň je podle (16) $F'_n(0) = s(n, 1)$, takže celkem vychází

$$s(1, 1) = 1 \,,$$
$$s(n, 1) = -(n-1)\, s(n-1, 1) \,.$$

Z těchto dvou rovností pak přímo plyne

$$s(n, 1) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!$$

(viz též cvičení 6).

Cvičení

9. Najděte mnohočleny $E_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, takové,

že $E_n(x)$ je stupně právě n a $D^k E_n(x) = E_{n-k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$, $D^n E_n(x) \equiv 1$.

Dokažte vztahy

10. $$F'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{k-1}(x)\, F_{n-k}(x - k)\ .$$

11. $$D^k \left[\sum_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} D^k M_j(x)\ ,$$

kde $M_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ jsou libovolné mnohočleny, $k \geqq 0$.

12. $$D^3 M^m(x) = F_3(m)\, M^{m-3}(x)\, [M'(x)]^3 + \\ + 3F_2(m)\, M^{m-2}(x)\, M'(x)\, M''(x) + \\ + F_1(m)\, M^{m-1}(x)\, M'''(x)\ ,$$

($M^m(x)$ je m-tá mocnina mnohočlenu $M(x)$, $m = 3, 4, 5, \ldots$).

5. Substituce. Operaci, kterou jsme již často s mnohočleny prováděli a kterou jsme považovali za dostatečně známou bez zvláštního vysvětlování, je operace dosazení pevné reálné hodnoty za proměnnou. Výsledkem dosazení je pak vždy určité reálné číslo, hodnota mnohočlenu odpovídající dané hodnotě proměnné.

Obdobnou (o něco obecnější) operací je „dosazení" jednoho mnohočlenu do druhého; tuto operaci si teď probereme. Pro odlišení od prostého dosazení čísla ji budeme nazývat *substitucí.*

Mějme dva mnohočleny

$$M(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (26)$$

a $N(x)$. Spolu s $N(x)$ jsou ovšem mnohočleny i všechny jeho mocniny $N^k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($N^0(x)$ je mnohočlen identicky rovný jedné.) Je tedy mnohočlenem také součet

$$a_0 + a_1N(x) + a_2N^2(x) + \ldots + a_nN^n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kN^k(x) \; . \tag{45}$$

A právě tento mnohočlen (45) bereme jako výsledek operace *substituce mnohočlenu* $N(x)$ *do mnohočlenu* $M(x)$; značíme jej obvykle $M[N(x)]$.

Je-li $M(x) = a_0$ (mnohočlen nultého stupně), je také $M[N(x)] = a_0$ bez ohledu na to, jaký mnohočlen $N(x)$ jsme vzali; je-li naopak $N(x) = c =$ konst., je $M[N(x)] = M(c)$, tedy mnohočlen nultého stupně identicky rovný hodnotě mnohočlenu $M(x)$ pro $x = c$. Ztotožňujeme-li mnohočleny nultého stupně — konstanty — s reálnými čísly, vidíme, že operace dosazení (reálné hodnoty za proměnnou) je zvláštním případem operace substituce, totiž substituce mnohočlenu nultého stupně, resp. mnohočlenu nulového (je-li $c = 0$). Obecně je pak stupeň mnohočlenu $M[N(x)]$ roven, pokud v (26) je $a_n \neq 0$, stupni mnohočlenu $N^n(x)$, a je tedy dán součinem stupňů obou mnohočlenů $M(x)$ a $N(x)$.

Příklad 14. Náš známý mnohočlen $(1 + x)^n$ můžeme mj. považovat za výsledek substituce mnohočlenu $N(x) = 1 + x$ do mnohočlenu $M(x) = x^n$. Zároveň odtud vidíme, že při $n > 1$ je

$$N[M(x)] = 1 + x^n \neq (1 + x)^n = M[N(x)] \; ;$$

substituce $N(x)$ do $M(x)$ je tedy obecně něco jiného než substituce $M(x)$ do $N(x)$.

Snadno se přesvědčíme, že z rovnosti $M(x) = P(x) + Q(x)$ plyne také

$$M[N(x)] = P[N(x)] + Q[N(x)] \tag{46}$$

pro libovolný mnohočlen $N(x)$ a podobně ze vztahu $M(x) = P(x) \,.\, Q(x)$ vyplývá

$$M[N(x)] = P[N(x)] \,.\, Q[N(x)] \;; \tag{47}$$

oba vztahy (46) a (47) se dají indukcí rozšířit na libovolný počet sčítanců, resp. činitelů.

V důsledku vzorců (46) a (47) se při provádění substitucí nemusíme omezovat jen na mnohočleny $M(x)$ napsané v základním tvaru (1), resp. (26); stačí prostě psát v $M(x)$ všude $N(x)$ místo x (v odpovídající mocnině) a výsledek bude vždy stejný, totiž $M[N(x)]$, bez ohledu na tvar, v jakém je mnohočlen $M(x)$ právě zapsán.

Příkladem užité operace substituce bylo vlastně už odvození vzorců (20) a (20′) nebo vyjádření $F_n\ (-x-1)$ v příkladě 7. Šlo tu vesměs o velmi jednoduché substituce, v nichž byl mnohočlen $N(x)$ prvního stupně. Takové substituce nazýváme *lineární*; budeme se s nimi často setkávat (viz též cvičení 16).

Podívejme se ještě, jak vypadá derivace mnohočlenu po substituci. Podle (45) a pravidel 1 a 2 pro derivování máme

$$\mathrm{D}(M[N(x)]) = \mathrm{D} \sum_{k=0}^{n} a_k N^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \mathrm{D}[N^k(x)] \;.$$

Avšak podle cvičení 12 je $\mathrm{D}[N^k(x)] = kN^{k-1}(x) \,.\, N'(x)$, takže

$$\mathrm{D}(M[N(x)]) = \sum_{k=1}^{n} k a_k N^{k-1}(x)\, N'(x) =$$

$$= N'(x) \sum_{k=1}^{n} ka_k N^{k-1}(x) \; .$$

Ale poslední součet není podle (27) nic jiného nežli výsledek substituce mnohočlenu $N(x)$ do mnohočlenu $M'(x)$; platí tedy obecný vzorec

$$\mathrm{D}(M[N(x)]) = M'[N(x)] \, . \, N'(x) \; . \tag{48}$$

Příklad 15. Mnohočlen $N(x) = 1 + 2x$ substituujme do mnohočlenu $B_n(x) = (1 + x)^n$, tedy

$$B_n[N(x)] = (1 + 1 + 2x)^n = (2 + 2x)^n = 2^n B_n(x) \; .$$

Platí potom (podle pravidla 2 pro derivování)

$$\mathrm{D}B_n[N(x)] = 2^n B'_n(x) = 2^n n B_{n-1}(x) \; .$$

Podle vzorce (48) však je

$$\mathrm{D}B_n[N(x)] = B'_n[N(x)] \, . \, N'(x) = nB_{n-1}[N(x)] \, . \, 2 =$$
$$= 2n(1 + 1 + 2x)^{n-1} = 2^n n \, B_{n-1}(x) \; .$$

Příklad 16. Počítejme derivaci mnohočlenu $F_n(x)$ z vyjádření (15). Podle vzorce (20) bude

$$F'_n(x) = \mathrm{D}[xF_{n-1}(x - 1)] =$$
$$= F_{n-1}(x - 1) + xF'_{n-1}(x - 1) \, . \, 1 \; .$$

Dosaďme sem $x = 0$, vyjde

$$F'_n(0) = F_{n-1}(-1) = (-1)(-2) \ldots (-n + 1) =$$
$$= (-1)^{n-1} (n - 1)!$$

Poněvadž podle (16) a (42) je $F'_n(0) = s(n, 1)$, dostáváme odtud znovu známý vztah (srv. příklad 13 a cvičení 6)

$$s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n - 1)!$$

Již z vyjádření (45) je zřejmé, že výsledkem dosazení pevné hodnoty $x = c$ do mnohočlenu $M[N(x)]$ je stejná hodnota $M[N(c)]$ tohoto mnohočlenu, jakou dostaneme, když do mnohočlenu $M(x)$ dosadíme hodnotu mnohočlenu $N(x)$ pro $x = c$; je-li $N(c) = d$, je $M[N(c)] = M(d)$. Toho nyní využijeme k odvození dalšího důležitého vzorce.

Označme $P(x)$ výsledek lineární substituce mnohočlenu $N(x) = c + x$ do mnohočlenu $M(x)$ z (26). Ježto $N'(x) \equiv 1$, zjednoduší se vzorec (48) na vztah $P'(x) = M'[N(x)]$, takže bude zcela obecně

$$\mathrm{D}^k P(x) = \mathrm{D}^k M[N(x)] \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Dosaďme sem $x = 0$; poněvadž $N(0) = c$, dostaneme z (49) rovnost

$$\mathrm{D}^k P(0) = \mathrm{D}^k M(c) \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Napišme si teď MacLaurinovu formuli pro mnohočlen $P(x)$ a přepišme ji pomocí (50):

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \mathrm{D}^k P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k M(c) \ .$$

Avšak $P(x) = M[N(x)] = M(x + c)$. Platí tedy

$$M(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k M(c) \ ; \tag{51}$$

je to tzv. *Taylorova formule*. MacLaurinova formule (43) je speciálním případem Taylorovy formule pro $c = 0$.

Lineární substitucí mnohočlenu $N^*(x) = x - c$ do mnohočlenu $P(x)$ dostaneme (viz též cvičení 14 a 16)

$$\begin{aligned} P[N^*(x)] &= M(N[N^*(x)]) = M[N(x - c)] = \\ &= M(x - c + c) = M(x) \ ; \end{aligned}$$

formuli (51) lze tedy psát též ve tvaru

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-c)^k}{k!} \, \mathrm{D}^k M(c) \, . \qquad (51')$$

Hned na začátku našich výkladů o mnohočlenech jsme si v prvním odstavci připomněli důležité tvrzení o jednoznačnosti koeficientů, kterého jsme pak také často užívali jako účinného nástroje při odvozování různých vztahů a vzorců. Podívejme se teď, jak se podobné otázky řeší při provádění substitucí.

Již ze vzorce (45) je zřejmé, že při daných mnohočlenech $M(x)$ a $N(x)$ je mnohočlen $M[N(x)]$ (a tedy také jeho koeficienty) jednoznačně určen. Ptejme se však obráceně, zda, resp. za jakých podmínek kladených na mnohočlen $N(x)$ lze k danému mnohočlenu $P(x)$ najít mnohočlen $M(x)$ tak, aby bylo $P(x) = M[N(x)]$.

Odpověď na tuto otázku závisí podstatně na stupni mnohočlenu $N(x)$. Označme po řadě p, n, r stupeň mnohočlenu $P(x)$, $M(x)$, $N(x)$; má-li být $P(x) = M[N(x)]$, musí být, jak víme $p = nr$. Rozlišíme proto tři případy:

1. $r > 1$. V tomto případě je nutné, aby číslo r bylo dělitelem čísla p. Jenom pak existuje n takové, že $p = nr$. Je-li tomu tak, lze najít — a to právě jedno — číslo, označme je a_n, takové, aby mnohočlen $R_1(x) = P(x) - a_n N^n(x)$ byl stupně r_1 nižšího nežli p (číslo a_n snadno určíme jako podíl koeficientů při nejvyšších, tj. p-tých mocninách proměnné v mnohočlenech $P(x)$ a $N^n(x)$). Hledaný mnohočlen $M(x)$ bude pak existovat právě tehdy, podaří-li se nám vyjádřit mnohočlen $R_1(x)$ obdobně jako $M_1[N(x)]$. Ocitáme se tak znovu ve stejné situaci jako na začátku: číslo r_1 — stupeň mnohočlenu $R_1(x)$ — musí být dělitelné číslem r; jediný rozdíl je v tom, že stupeň mnohočlenu $R_1(x)$ je nižší, než byl stupeň mnohočlenu $P(x)$. Naložíme-li s $R_1(x)$ stejně jako s $P(x)$ atd., určíme postupně koeficienty hledaného mnohočlenu $M(x)$. Přitom musí být při každém

kroku splněna podmínka dělitelnosti stupňů. Není-li splněna, hledaný $M(x)$ neexistuje; je-li vždy splněna, jsou jeho koeficienty určeny jednoznačně.

2. $r = 1$. Tento případ je jednodušší, mnohočlen $N(x)$ je prvního stupně: $N(x) = c + dx$, $d \neq 0$, takže $N^k(x)$ je stupně právě k-tého. Lze tedy vždy nalézt, a to *právě jedno* číslo a_n tak, aby mnohočlen $R_1(x) = P(x) - a_n(c + dx)^n$ byl stupně nižšího než n (je totiž nutně $n = p$). Tím se nám podařilo snížit stupeň daného mnohočlenu aspoň o jednotku. Opakujeme-li stejný postup, dostaneme postupně všechny koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ hledaného mnohočlenu $M(x)$. V případě lineární substituce $N(x) = c + dx$ existuje tak ke každému $P(x)$ právě jeden $M(x)$, pro který je $P(x) = M[N(x)]$.

Jiný způsob, jak v tomto případě najít mnohočlen $M(x)$, je provést lineární substituci mnohočlenu

$$N^*(x) = -\frac{c}{d} + \frac{1}{d}x$$

do mnohočlenu $P(x)$ (viz též cvičení 14 a 16).

3. $r = 0$. Poslední případ je triviální. Je-li $p > 0$, neexistuje zřejmě žádné n, pro které by bylo $p = n \cdot 0$, a tedy neexistuje ani žádný mnohočlen $M(x)$. Je-li naopak $p = 0$, tzn. $P(x) = b =$ konst., nelze mnohočlen $M(x)$ určit, resp. existuje jich nekonečně mnoho. Je totiž $N(x) = c =$ konst. a podmínce vyhoví všechny mnohočleny $M(x)$, které pro $x = c$ nabývají hodnoty b.

Příklad 17. Nechť $P(x) = 1 + 3x^2 - 2x^4 + x^6$, $N(x) = 1 - x^2$; hledejme $M(x)$ tak, aby $P(x) = M[N(x)]$. Je $p = 6$, $r = 2$, tedy $n = p/r = 3$. Hledáme a_3 z podmínky, aby mnohočlen

$$R_1(x) = P(x) - a_3(1 - x^2)^3$$

byl stupně nižšího než 6. Vyjde $a_3 = -1$, takže $R_1(x) = 2 + x^4$. Je tedy $r_1 = 4 = 2r$, a můžeme proto hledat a_2 z podmínky, aby mnohočlen

$$R_2(x) = R_1(x) - a_2(1 - x^2)^2$$

byl stupně nižšího než 4. Vyjde $a_2 = 1$, takže $R_2 = 1 - 2x^2$. Dále je však už zřejmé, že $R_2(x) = 3 - 2N(x)$, takže celkem máme

$$P(x) = 3 - 2N(x) + N^2(x) - N^3(x) \ ,$$

tj.

$$M(x) = 3 - 2x + x^2 - x^3 \ ;$$

hledaný mnohočlen $M(x)$ splňující $P(x) = M[N(x)]$ tedy existuje.

Cvičení

Dokažte:

13. Operace substituce je asociativní, tzn. že při $P(x) = N_1[N_2(x)]$, $Q(x) = N_2[N_3(x)]$ vždy platí $P[N_3(x)] = N_1[Q(x)]$.
14. Pro každý mnohočlen $M(x)$ platí, že je-li $P(x) = M(c - x)$, ($c =$ konst.), potom také $M(x) = P(c - x)$.
15. Nechť $M_1[N(x)] = M_2[N(x)]$, kde $N(x)$ je mnohočlen stupně aspoň prvního; potom $M_1(x) = M_2(x)$.
16. Lineární substituce tvoří grupu.

6. Normální soustavy mnohočlenů. Posloupnost mnohočlenů $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$, ... nazveme *normální soustavou mnohočlenů*, jestliže má tyto tři vlastnosti:

(i) $P_0(x) \equiv 1$;
(ii) $P_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, je mnohočlen stupně *právě* k;
(iii) pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ je $P_k(0) = 0$.

Příklad 18. Posloupnost mnohočlenů $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ tvoří normální soustavu. Rovněž tak posloupnost mnohočlenů $F_0(x) \equiv 1$, $F_k(x)$ — viz (15) — $k = 1, 2, 3, \ldots$ tvoří normální soustavu.

Mějme dánu normální soustavu mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, a budiž $M(x)$ libovolný mnohočlen stupně n

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \;, \quad a_n \neq 0 \,. \qquad (26')$$

Potom lze $M(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kP_k(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \ldots + c_nP_n(x) \;, \qquad (52)$$

a to *právě jedním způsobem*, tzn., že koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ve vyjádření (52) jsou *jednoznačně* určeny mnohočlenem $M(x)$, resp. jeho koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Toto tvrzení dokážeme nejsnáze indukcí podle stupně n mnohočlenu $M(x)$. Nejprve dokážeme existenci. Je-li $M(x)$ mnohočlen nulový, stačí vzít všechna c_k rovna nule. Je-li $M(x)$ mnohočlen nultého stupně, je $M(x) = a_0 =$ konst.; vzhledem k (i) je tedy $M(x) = a_0 \,.\, P_0(x)$, tedy $c_0 = a_0$ a $c_k = 0$ pro $k > 0$. Předpokládejme tedy, že tvrzení o existenci koeficientů c_k platí pro mnohočleny stupně nejvýše n. Dokážeme, že platí také pro mnohočleny stupně $n + 1$. Budiž tedy $M(x)$ mnohočlen stupně $n + 1$

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}, \, a_{n+1} \neq 0 \,.$$

Také $P_{n+1}(x)$ je podle (ii) mnohočlen stupně $n + 1$

$$P_{n+1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} , \quad b_{n+1} \neq 0 .$$

Položme

$$N(x) = M(x) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n+1}(x) .$$

Snadno se vidí, že $N(x)$ je mnohočlen stupně nejvýše n, takže podle předpokladu existuje skupina n čísel c_0, c_1, $\ldots$, c_n taková, že

$$N(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots + c_n P_n(x) .$$

Nyní však již stačí jen položit $c_{n+1} = a_{n+1}/b_{n+1}$ a bude

$$M(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \\ + c_{n+1} P_{n+1}(x) ,$$

takže vyjádření mnohočlenu $M(x)$ ve tvaru (52) rovněž existuje.

K důkazu jednoznačnosti vyjádření (52) stačí ukázat, že pro žádnou skupinu čísel $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, která by nebyla všechna rovna nule, nemůže být $\sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ nulový mnohočlen. Kdyby však existovalo takové vyjádření nulového mnohočlenu s nenulovými c_k, existoval by mezi koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nenulový koeficient s nejvyšším indexem, označme jej c_m ($c_m \neq 0$, $c_k = 0$ pro $k = m + 1, \ldots, n$). Byl by tedy nulový mnohočlen roven součtu $\sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)$. Avšak z mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ je jedině $P_m(x)$ mnohočlenem stupně m; jedině v něm se tedy vyskytuje x^m, a to s nenulovým koeficientem. Ježto podle předpokladu je i $c_m \neq 0$, vystupuje x^m s nenulovým koeficientem také v celkovém součtu $\sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)$, ale to není možné, poněvadž tento součet je nulovým mnohočlenem a ten má nutně koeficienty při všech mocninách proměnné x rovny nule.

Příklad 19. Je-li danou normální soustavou mnohočlenů $P_k(x)$ právě soustava mnohočlenů x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, budou čísla c_k z (52) rovna koeficientům a_k z (26). Je tedy zápis (26) mnohočlenu $M(x)$ speciálním případem vyjádření (52), odpovídajícím speciální normální soustavě mnohočlenů $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Číslům c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ z (52) budeme říkat *koeficienty mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k normální soustavě $P_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)*; obvyklé koeficienty a_k z (26) jsou tedy koeficienty mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k soustavě mnohočlenů x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Snadno se přesvědčíme, že při početních operacích sčítání mnohočlenů a násobení konstantou se koeficienty vzhledem k libovolné normální soustavě chovají vždy stejně. Jestliže je $M(x) = \Sigma c_k P_k(x)$ a $N(x) = \Sigma d_k P_k(x)$, potom

$$M(x) + N(x) = \Sigma(c_k + d_k)\, P_k(x)\,, \tag{53}$$

$$aN(x) = \Sigma a d_k P_k(x)\,, \qquad a = \text{konst.} \tag{54}$$

Pro operaci násobení už toto neplatí, není totiž $P_{j+k}(x) = P_j(x) \,.\, P_k(x)$, jako tomu bylo u mocnin x^k.

Příklad 20. Jestliže za normální soustavu, vzhledem k níž mnohočleny vyjadřujeme, vezmeme posloupnost mnohočlenů $x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, pak pro součin dvou mnohočlenů $M(x) = \Sigma c_k(x^k/k!)$ a $N(x) = \Sigma d_k(x^k/k!)$ platí vzorec

$$M(x)\,N(x) = \sum_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c_j d_{k-j} \right) \frac{x^k}{k!} \,. \qquad (55)$$

Ten si můžeme ověřit nejlépe přechodem k vyjádření mnohočlenů ve tvaru (26); vzájemný vztah koeficientů vzhledem k soustavám mnohočlenů $x^k/k!$ a x^k je totiž poměrně jednoduchý.

Pozorný čtenář si patrně již povšiml, že jsme zatím nikde nevyužili vlastnosti (iii) normálních soustav. Uvedená tvrzení tedy platí i pro takové posloupnosti mnohočlenů, které mají jen vlastnosti (i) a (ii). V předcházejícím paragrafu jsme se setkali se speciálním případem takových posloupností. Byly to posloupnosti mocnin $N^k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ mnohočlenů $N(x)$ prvního stupně.

Vlastnost (iii) přijde ke cti při studiu zobecnění pojmu derivace mnohočlenu. Budiž $M(x)$ daný mnohočlen s vyjádřením (52) vzhledem k dané normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Derivací mnohočlenu* $M(x)$ *vzhledem k této normální soustavě* nazveme mnohočlen s vyjádřením

$$c_1 + 2c_2P_1(x) + 3c_3P_2(x) + \ldots + nc_nP_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} kc_kP_{k-1}(x) \;; \qquad (56)$$

označíme jej $\mathrm{D}_P\, M(x)$.

Pravidlo pro určování koeficientů derivace $\mathrm{D}_P M(x)$ mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k soustavě mnohočlenů $P_k(x)$ je tedy obdobné pravidlu vyjádřenému vzorcem (27) pro obyčejnou derivaci, která se takto jeví jako jeden speciální případ derivace, totiž derivace vzhledem k normální soustavě mnohočlenů x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Výsledný mnohočlen $D_P M(x)$ ovšem závisí velmi podstatně na zvolené normální soustavě, vzhledem k níž derivujeme.

Příklad 21. Vezměme opět normální soustavu mnohočlenů $x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, a budiž $M(x)$ mnohočlen (26), takže jeho vyjádření tvaru (52) při dané soustavě $P_k(x) = x^k/k!$ je

$$M(x) = a_0 + 1!\, a_1 P_1(x) + 2!\, a_2 P_2(x) + \ldots + n!\, a_n P_n(x).$$

Tomu odpovídá podle (56) derivace

$$D_P M(x) = a_1 + 2 \,.\, 2!\; P_1(x) + 3 \,.\, 3!\; P_2(x) + \ldots + \\ + n \,.\, n!\; P_{n-1}(x) \;,$$

takže

$$D_P M(x) = a_1 + 2^2 a_2 x + 3^2 a_3 x^2 + \ldots + n^2 a_n x^{n-1} = \\ = \sum_{k=1}^{n} k^2 a_n x^{k-1} \;.$$

Není těžké si ověřit, že pro derivace vzhledem k libovolné normální soustavě mnohočlenů platí rovněž pravidla 1 a 2 pro sčítání a konstantní násobky, tj. obdoby vzorců (28) a (29),

$$D_P[M(x) + N(x)] = D_P M(x) + D_P N(x) \;, \qquad (28')$$

$$D_P[cM(x)] = c D_P M(x) \;. \qquad (29')$$

Při odvozování stačí jen psát všude D_P místo D a $P_k(x)$ místo x^k. Vidíme, že k tomu, abychom uměli zderivovat libovolný mnohočlen $M(x)$ vzhledem k dané normální soustavě — srv. poznámku za vzorcem (29) na str. 23 —, stačí umět derivovat mnohočleny x^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Příklad 22. Vezměme si normální soustavu mnohočlenů $F_k(x)$ z (15), $k = 1, 2, 3, \ldots, F_0(x) \equiv 1$, a podívejme se, jak vypadají derivace mnohočlenů vzhledem k této soustavě. S tím souvisí též otázka stanovení koeficientů mnohočlenu vzhledem k této normální soustavě; stačí ovšem obojí řešit jen pro mnohočleny tvaru x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Položme nejprve obecně

$$x^n = S(n, 0) + S(n, 1) F_1(x) + S(n, 2) F_2(x) + \ldots +$$
$$+ S(n, n) F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) F_k(x) ; \qquad (57)$$

čísla $S(n, k)$ jsou tedy koeficienty mnohočlenu x^n vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $F_k(x)$. Dosazením $x = 0$ do (57) zjistíme snadno, že $S(n, 0) = 0$ pro všechna přirozená n. Zde konečně dochází uplatnění vlastnost (iii) naší normální soustavy. Prvý sčítanec na pravé straně (57) můžeme tedy případně vynechat. Koeficienty $S(n, k)$ definované vzorcem (57) se nazývají *Stirlingova čísla druhého druhu*. Podle (56) je pak

$$\mathrm{D}_F(x^n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, kF_{k-1}(x) . \qquad (58)$$

Vztah (58) si dále upravíme pomocí vzorců (18) a (20); podle nich je totiž

$$\begin{aligned} kF_{k-1}(x) &= (k-1) F_{k-1}(x) + F_{k-1}(x) = \\ &= xF_{k-1}(x) - F_k(x) + F_{k-1}(x) = \\ &= (x+1) F_{k-1}(x) - F_k(x) = \\ &= F_k(x+1) - F_k(x) . \end{aligned}$$

Dosadíme-li tento výsledek do (58), dostáváme

$$D_F(x^n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,F_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,F_k(x) ,$$

a tedy podle (57)

$$D_F(x^n) = (x+1)^n - x^n , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{59}$$

Pro $n = 0$ je ovšem $D_F(x^0) = 0$. V důsledku pravidel pro sčítání a násobky platí tedy i pro libovolný mnohočlen $M(x)$

$$D_F\,M(x) = M(x+1) - M(x) . \tag{60}$$

Operaci derivace vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $F_k(x)$ značíme obvykle Δ místo D_F a nazýváme ji *diferencí*.

Stejně jako v případě derivace v obvyklém smyslu (viz paragraf 4), lze i pro derivace vzhledem k libovolné normální soustavě zavést pojem druhé, třetí, ... atd., obecně k-té ($k = 1, 2, 3, \ldots$) derivace; pro $k = 0$ klademe vždy $D^0_P M(x) = M(x)$, bez ohledu na konkrétní volbu soustavy mnohočlenů $P_k(x)$. Snadno pak uvidíme, že vztahy (37), (39) a (40) se rovněž přenesou na obecný případ, že tedy platí

$$D_P^m[D_P^n\,M(x)] = D_P^{m+n}\,M(x) , \tag{37'}$$

$$D_P^k[M(x) + N(x)] = D_P^k\,M(x) + D_P^k\,N(x) , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{39'}$$

$$D_P^k[cM(x)] = cD_P^k\,M(x) ; \tag{40'}$$

při jejich odvozování stačí znovu jen všude psát D_P místo D a $P_k(x)$ místo x^k. Vzorce pro derivaci součinu takto zobecnit nelze z důvodů, které jsme si uvedli už při určování koeficientů vzhledem k různým normálním soustavám. Explicitní vzorec (38) pro k-tou derivaci, resp. jeho analogie

$$D_P{}^k\, M(x) = \sum_{j=k}^{n} F_k(j)\, c_j P_{j-k}(x) = \tag{38'}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-k} (j+1)(j+2)\ldots(j+k) c_{j+k}\, P_j(x)\ ,$$

kde c_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) jsou koeficienty $M(x)$ z (52), ovšem platí pro každou normální soustavu mnohočlenů $P_k(x)$.

Díky vlastnosti (iii) normálních soustav platí také vzorec (42), resp.

$$D_P{}^k\, M(0) = k!\, c_k\ , \tag{42'}$$

takže místo (52) můžeme opět zcela obecně psát

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, P_k(x)\, D_P{}^k\, M(0)\ . \tag{61}$$

To je *obecná MacLaurinova formule.*

Příklad 23. Zvolme normální soustavu mnohočlenů $F_k(x)$ z (15), $F_0(x) \equiv 1$, a vzhledem k ní vyjádřeme mnohočlen $M(x) = F_n(x + c)$, $c =$ konst., ve tvaru (52), resp. (61). Podle (60) bude

$$\begin{aligned} \Delta M(x) &= M(x+1) - M(x) = \\ &= F_n(x+c+1) - F_n(x+c) = \\ &= (x+c+1-x-c+n-1)\, F_{n-1}(x+c) = \\ &= nF_{n-1}(x+c)\ , \quad n > 0\ , \end{aligned}$$

a tedy obecně pro $0 \leqq k \leqq n$

$$\begin{aligned} \Delta^k M(x) &= \Delta^k F_n(x+c) = \\ &= n(n-1)\ldots(n-k+1)\, F_{n-k}(x+c) = \\ &= F_k(n)\, F_{n-k}(x+c)\ . \end{aligned}$$

Pro $x = 0$ je tedy

$$\Delta^k M(0) = \Delta^k F_n(c) = F_k(n)\, F_{n-k}(c) \ ,$$

takže MacLaurinova formule pro mnohočlen $M(x)$ je

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, F_k(n)\, F_{n-k}(c)\, F_k(x) \ ;$$

poněvadž pak $F_k(n)/k! = \binom{n}{k}$ a $M(x) = F_n(x + c)$, platí

$$F_n(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(x)\, F_{n-k}(c) \ ; \qquad (62)$$

je to tzv. *formule Vandermondova.*

Mnohočleny $F_n(x)$ se někdy nazývají *faktoriální mocniny* a místo $F_n(x)$ se píše $x^{[n]}$; v tomto zápise pak (62) zní

$$(x + c)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{[k]} c^{[n-k]} \ ; \qquad (62')$$

(tzv. *binomický vzorec pro faktoriální mocniny*).

Při pevně zvolené normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, jsou koeficienty každého daného mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k této soustavě, tj. čísla c_k v (52), zcela jednoznačně určeny, takže i pro ně platí základní věta o rovnosti koeficientů (viz odstavec 1). Toho lze využít k odvozování různých vztahů mezi těmito koeficienty podobně, jako jsme to udělali v předcházejících paragrafech s obyčejnými koeficienty (tj. s čísly a_k z (26)). Ukážeme si některé takové vztahy pro Stirlingova čísla druhého druhu.

Příklad 24. Podle (57) je pro přirozené n

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k)\, F_k(x) \ .$$

Zároveň však je

$$x^{n+1} = x\, x^n = x \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, F_k(x) \ .$$

Avšak $x = x - k + k$ a $(x - k)\, F_k(x) = F_{k+1}(x)$, takže

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, F_{k+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} kS(n, k)\, F_k(x) \ .$$

Porovnáním koeficientů při $F_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ v obou vyjádřeních x^{n+1} dostáváme jednak

$$S(n+1, 1) = S(n, 1) \quad \text{a} \quad S(n+1, n+1) = S(n, n) \ , \tag{63}$$

jednak při $1 < k < n + 1$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \ . \tag{64}$$

Ze (63) a z rovnosti $F_1(x) = x$, tzn. $S(1, 1) = 1$, plyne dále

$$S(n, n) = S(1, 1) = 1 \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{65}$$

Příklad 25. Vyjdeme ze zřejmé rovnosti

$$x^{n+1} = x\, x^n = x(1 + x - 1)^n = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k$$

a pro mocniny x použijeme vyjádření (57). Máme tedy

$$\sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r)\, F_r(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} S(k, j)\, F_j(x-1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} F_{j+1}(x) \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} S(k, j) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n+1} F_r(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k, r-1) \;;$$

vzhledem k (57) můžeme celkem přirozeně doplnit definici Stirlingových čísel tak, že $S(k, j) = 0$ pro $k < j$. Porovnáním koeficientů při $F_k(x)$, $r = 1, 2, \ldots, n+1$ dostaneme rovnost

$$S(n+1, r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k, r-1)\,. \tag{66}$$

Stejně jako v případě binomických koeficientů nebo Stirlingových čísel prvního druhu neuvedli jsme si ani tady všechny známé zajímavé vztahy mezi čísly $S(n, k)$. Některé vlastnosti těchto čísel pozná čtenář, který si vyřeší připojená cvičení, ale i tak zůstane ještě velmi mnoho vzorců, které si lze s trochou fantazie odvozovat uvedenými metodami téměř bez omezení. To však již musíme přenechat samostatné práci čtenářů.

Cvičení

17. Dokažte platnost vzorců

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1), \qquad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

18. Z rekurentních vzorců (64), známých hodnot (65) a $S(n, 0) = 0$ vypočtěte $S(n, k)$ pro $n, k \leqq 8$ a sestavte tabulku obdobnou tabulce hodnot $s(n, k)$ ze str. 17.

19. Dokažte vztah mezi Stirlingovými čísly prvního a druhého druhu

$$\sum_k S(n, k)\, s(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{jestliže} \quad n = m. \end{cases}$$

20. Odvoďte explicitní vzorec pro $S(n, k)$:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

21. Položte

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$$

a dokažte pak, že

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k .$$

(B_n jsou tzv. Bellova čísla; vypočtěte několik z nich numericky.)

22. Označte $F_n^\star(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mnohočleny

$$F_n^\star(x) = F_n(x + n - 1) = x(x + 1) \ldots (x + n - 1)$$

a dokažte pro ně rovnost obdobnou vzorci (62)

$$F_n^\star(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k^\star(x)\, F_{n-k}^\star(c)$$

(tzv. *Nörlundova formule*).