Vektory v geometrii

4. kapitola. Vektorová konstrukce afinního a euklidovského prostoru

In: Bruno Budinský (author); Stanislav Šmakal (author); Jan Volejník (illustrator): Vektory v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1971. pp. 131–152.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403736

4. kapitola

VEKTOROVÁ KONSTRUKCE AFINNÍHO A EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU

Při zavádění základních pojmů, které byly podkladem našich úvah v předcházejících kapitolách, jsme často vycházeli z názoru. Nepostupovali jsme tedy důsledně deduktivně, to znamená, neodvozovali jsme všechny věty důsledně pomocí axiomů nebo vět dříve již dokázaných. Takový postup by totiž nebyl vhodný při prvním seznámení s naší geometrickou problematikou. Teprve v této závěrečné kapitole chceme ukázat celý problém komplexněji z fundovanějšího hlediska a tak uvést čtenáře do studia hlubší geometrické problematiky. Výklad zaměříme na náročnějšího čtenáře, dovolíme si proto rychlejší postup.

4.1. Několik historických poznámek

Z historického hlediska je pokládána za první známý pokus o důsledné axiomatické vybudování geometrie slavná Euklidova kniha *Základy* (στωκεα). Ve své době byla tato kniha vrcholem geometrie, vrcholem všeho, co bylo do té doby v geometrii podniknuto. Vliv této práce na tehdejší matematiku i na další její vývoj byl obrovský.

Z dnešního hlediska má ovšem Euklidova kniha řadu nedostatků, jejichž společným jmenovatelem je to, že postup není důsledně deduktivní. Na některých místech se mlčky předpokládá platnost vět, které nejsou zahrnuty do výchozí soustavy axiomů. Zmínili jsme se již dříve, že první důsledné axiomatické vybudování geometrie provedl velký německý matematik David Hilbert (1862—1943) v knize *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)*. Hilbertova kniha je svým způsobem velmi blízká knize Euklidově, zvláště pokud jde o volbu systému axiomů. Důsledné axiomatické vybudování geometrie lze však provést i jiným způsobem.*)

Z pedagogického hlediska je nesporně zajímavý způsob Weylův**), tzv. *vektorová konstrukce prostoru.* Obtížnost jiných axiomatických konstrukcí je zde překlenuta tím, že se již předpokládá znalost reálných čísel a pojmu vektorový prostor. Náš postup bude velmi blízký Weylovu pojetí.

4.2. Axiomy vektorového prostoru

Postavme se dočasně na stanovisko, že nevíme, co je to euklidovský prostor E_3 (resp. E_2 nebo E_1), že nevíme, co jsou to vektory. Tyto pojmy zavedeme postupně znovu, samozřejmě jiným způsobem. Základní roli zde bude hrát tato definice:

Definice 4.1. Předpokládejme, že W je neprázdná množina, jejíž prvky budeme označovat $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ... a nazývat vektory. Předpokládejme dále, že každé

---

*) Viz např. velmi podnětnou knihu Friedrich Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin—Göttingen-Heidelberg 1959 *(Výstavba geometrie na základě pojmu zrcadlení)*.

**) Weyl: *Raum, Zeit, Materie, (Prostor, čas, hmota)*, Berlin 1923.

uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je přiřazen jediný vektor, který označujeme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a nazýváme *součtem* vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a každému reálnému číslu α a každému vektoru $\mathbf{u}$ je přiřazen jediný vektor, který označujeme $\alpha\mathbf{u}$ a nazýváme *součinem* reálného čísla α s vektorem $\mathbf{u}$. Jestliže pro každé tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a pro každá dvě reálná čísla α, β jsou splněny předpoklady $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$ uvedené na str. 37 a předpoklady $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ uvedené na str. 42, potom množinu W nazýváme *vektorovým prostorem* (přesněji: *afinním vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel*).

Matematickou indukcí bychom se snadno mohli přesvědčit, že platnost předpokladu $\mathscr{A}_2$ lze rozšířit pro součet libovolného konečného počtu vektorů. Analogická poznámka platí též pro předpoklady $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$. Rovněž není obtížné dokázat, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathsf{W}$ a každé reálné číslo α platí: $-1 . \mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Vektorový prostor, který jsme zavedli předcházející definicí, není pojmem důležitým pouze pro geometrii. S tímto pojmem se totiž běžně setkáváme v algebře, v diferenciálním počtu, v numerické matematice atd. Uvědomte si, že např. množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu J tvoří vektorový prostor. Skutečně — součtem funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$, kde $x \in J$, je opět funkce $y = f(x) + g(x)$, $x \in J$; součinem čísla α a funkce $y = f(x)$, $x \in J$ je funkce $y = \alpha f(x)$, $x \in J$. Sami se snadno přesvědčíte, že předpoklady $\mathscr{A}_i$, $\mathscr{B}_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) jsou zde splněny. Roli nulového vektoru hraje funkce $y = 0$, tj. funkce rovná nule pro každé $x \in J$. Vektorovým prostorem v uvedeném smyslu je též množina všech funkcí spojitých na intervalu, množina všech mnohočlenů, množina všech lineárních funkcí;

příklady jsou podrobně diskutovány v knihách [12] a [9].

4.3. Lineární závislost a nezávislost vektorů

Zvolme si ve vektorovém prostoru W k vektorů

$$u_1, u_2, \ldots, u_k \tag{4.1}$$

a zvolme dále k reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Rovnicí $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u} + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k$ je definován vektor $\mathbf{u}$, který nazýváme *lineární kombinací vektorů* (4.1).

Příklad 4.1. Ve vektorovém prostoru všech komplexních čísel je vektor $\mathbf{w} = 7 + 9i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u} = 2 + 3i$, $\mathbf{v} = 1 + i$, neboť platí $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

Definice 4.2. Jestliže alespoň jeden z vektorů (4.1) je lineární kombinací ostatních vektorů, potom o vektorech (4.1) říkáme, že jsou *lineárně závislé.*

Platí-li tedy třeba $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, pak vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou lineárně závislé. Jestliže mezi vektory (4.1) je jeden vektor nulový, např. $\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, potom jsou vektory (4.1) lineárně závislé. Lze totiž psát $\mathbf{u}_k = 0 . \mathbf{u}_1 + 0 . \mathbf{u}_2 + \ldots + 0 . \mathbf{u}_{k-1}$.

Věta 4.1. *Vektory* (4.1) *jsou lineárně závislé právě tehdy, když řešením rovnice*

$$\gamma_1\mathbf{u}_1 + \gamma_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \gamma_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \tag{4.2}$$

je také skupina čísel $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, která nejsou vesměs nulová.

D ů k a z. 1. Předpokládejme, že vektory (4.1) jsou lineárně závislé. Jeden z těchto vektorů, mysleme si, že jde o vektor $\mathbf{u}_k$, lze psát ve tvaru

$$\mathbf{u}_k = \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \gamma_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} .$$

Snadno přepíšeme tuto rovnici na tvar (4.2), kde položíme $\gamma_k = -1 \neq 0$.

2. Jestliže platí (4.2) a jeden z koeficientů γ_i je různý od nuly, mysleme si, že $\gamma_k \neq 0$, můžeme psát

$$\mathbf{u}_k = -\frac{\gamma_1}{\gamma_k} \mathbf{u}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_k} \mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k} \mathbf{u}_k .$$

Odtud plyne, že vektory (4.1) jsou lineárně závislé, c. b. d.

Definice 4.3. O vektorech (4.1) řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*, jestliže žádný z těchto vektorů není lineární kombinací ostatních vektorů (tj. jestliže vektory (4.1) nejsou lineárně závislé).

Příklad 4.2. Vektory $\mathbf{u} = \sin x$, $\mathbf{v} = \cos x$ z vektorového prostoru všech funkcí definovaných na intervalu $(-\infty, +\infty)$ jsou lineárně nezávislé. Neexistuje totiž ani číslo α, ani číslo β takové, aby pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ platilo $\sin x = \alpha \cos x$, resp. $\cos x = \beta \sin x$.

Věta 4.2. *Vektory* (4.1) *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, jestliže rovnice* (4.2) *má jen nulové řešení* $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Snadný důkaz (sporem) pomocí věty 4.1 přenecháme čtenáři.

Příklad 4.3. Vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = \mathrm{i}$ z vektorového prostoru všech komplexních čísel jsou lineárně nezávislé. Rovnice (4.2), která má zde tvar $\gamma_1 . 1 + \gamma_2 . \mathrm{i} = 0 + 0\mathrm{i}$, má jediné řešení $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

4.4. Dimenze vektorového prostoru

Definice 4.4. Jestliže v daném vektorovém prostoru W existuje n-lineárně nezávislých vektorů a přitom každých $n + 1$ vektorů je lineárně závislých, říkáme, že vektorový prostor W má *dimenzi (konečnou)* rovnou číslu n. Jestliže existuje ve vektorovém prostoru W k lineárně nezávislých vektorů, ať zvolíme za k jakékoliv přirozené číslo, říkáme, že vektorový prostor W má *(nekonečnou) dimenzi* $+\infty$.

Vektorový prostor dimenze n značíme většinou W_n, W'_n, V_n atp. Ke stanovení dimenze konkrétního vektorového prostoru je užitečná věta, kterou bez důkazu nyní uvedeme.*)

Věta 4.3. *Předpokládejme, že vektory*

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{4.3}$$

jsou lineárně nezávislé. Sestrojme l dalších vektorů

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l \tag{4.4}$$

tak, že každý z těchto vektorů je nějakou lineární kombinací vektorů (4.3). *Potom z vektorů* (4.4) *lze vybrat nejvýše k lineárně nezávislých vektorů.*

---

*) Důkaz je např. v knize I. M. Gelfanda, *Lekcii po linějnoj algebre.*

Příklad 4.4. Věta, kterou jsme uvedli, nám umožní zjistit dimenzi n vektorového prostoru K_2 všech komplexních čísel. V příkladě 4.3 jsme ukázali, že vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = i$ jsou lineárně nezávislé. Existují tedy v prostoru K_2 dva lineárně nezávislé vektory, a proto $n \geqq 2$. Zvolme si v K_2 tři libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a napišme je jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (odůvodněte si sami, proč je to možné). Podle předcházející věty lze vybrat z vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nejvýše dva lineárně nezávislé vektory. To však znamená, že libovolně zvolené tři (a tedy každé tři) vektory z K_2 jsou lineárně závislé. Prostor K_2 má proto dimenzi $n = 2$.

Příklad 4.5. Označme V_3 množinu všech vektorů definovaných (v druhé kapitole) v prostoru E_3. Zřejmě V_3 je vektorovým prostorem. Ukážeme si, že jeho dimenze $n = 3$. Přesvědčme se nejprve, že ve V_3 existují tři lineárně nezávislé vektory, totiž např. vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$. Skutečně rovnice $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{o}$ čili rovnice

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

má jediné řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a tedy podle věty 4.2 jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineárně nezávislé. Každý vektor $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3)$ z V_3 lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}$. To tedy znamená, že každý vektor z V_3 je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Odtud a z věty 4.3 vyplývá, že každé čtyři vektory z V_3 jsou lineárně závislé.

4.5. Báze vektorového prostoru

Definice 4.5. Každou skupinu n lineárně nezávislých vektorů

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{4.5}$$

z n-rozměrného vektorového prostoru W_n nazýváme *bází* tohoto prostoru.

Tak třeba vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = i$ tvoří bázi ve vektorovém prostoru K_2 (příklad 4.4) a vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ tvoří bázi ve vektorovém prostoru V_3 (příklad 4.5). O bázi vektorového prostoru platí tato důležitá věta:

Věta 4.3. *Předpokládejme, že* (4.5) *je bází vektorového prostoru* W_n. *Potom každý vektor* $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ *lze vyjádřit právě jedním způsobem*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n \qquad (4.6)$$

jako lineární kombinaci vektorů báze (4.5) (tj. čísla $u_1, \ldots, u_n$ jsou určena jednoznačně).

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u}$ je vektor z W_n. Ukážeme, že je možné vyjádřit jej ve tvaru (4.6). Z vlastností báze plyne, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ jsou lineárně závislé. Existuje tedy alespoň jedno nenulové řešení rovnice

$$\alpha\mathbf{u} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}\,. \qquad (4.7)$$

Při tomto nenulovém řešení je nutně $\alpha \neq 0$, neboť v opačném případě by musely být vektory (4.5) lineárně závislé; to však není možné. Rovnici (4.7) můžeme tedy upravit na tvar

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\,\mathbf{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\,\mathbf{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\,\mathbf{e}_n\,,$$

z něhož je patrné, že libovolně zvolený (a tedy každý) vektor $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ je lineární kombinací vektorů dané báze.

2. Předpokládejme, že

$$\mathbf{u} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n \qquad (4.8)$$

je jiné vyjádření vektoru $\mathbf{u}$, odlišné od vyjádření (4.6). Odečteme-li od sebe rovnice (4.8) a (4.6), dostáváme rovnici

$$\mathbf{o} = (v_1 - u_1)\,\mathbf{e}_1 + (v_2 - u_2)\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (v_n - u_n)\,\mathbf{e}_n,$$

z níž okamžitě vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vyplývá, že

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n\,.$$

Tím je věta dokázána.

Čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ z rovnice (4.6) nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi (4.5). Je-li báze (4.5) zvolena pevně, nemůže dojít k nedorozumění, užijeme-li označení $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Jestliže dále $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a α je libovolné reálné číslo, zřejmě platí:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, \ldots, u_n + w_n)\,,$$

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)\,.$$

4.6. Axiomy afinního prostoru

V druhé kapitole jsme vyšli z předpokladu, že ze střední školy víme, co je euklidovský prostor E_3. Na tomto základě jsme zavedli pojem vektoru, vektorových operací a pokračovali jsme pak dále ve studiu geometrie prostoru E_3. Jak jsme se již zmínili, je možné mít k tomuto postupu z matematického hlediska výhrady. Středoškolský postup výkladu geometrie není totiž důsledně deduktivní, často se opírá o názor, a tím je pak nutně poznamenán i výklad, který vychází z tohoto středoškolského pojetí. Ukážeme si způsob, jakým lze námitku obejít.

V této kapitole jsme zavedli pojem n-rozměrného vektorového prostoru. Přitom jsme se nikde neodvolávali na znalost euklidovského prostoru. To nám umožňuje, abychom „zpětně" pomocí n-rozměrného vektorového prostoru zkonstruovali euklidovský prostor, a to dokonce tzv. *n-rozměrný euklidovský prostor*. Celou konstrukci provedeme postupně. Nejprve budeme definovat tzv. *afinní prostor*, tj. prostor, ve kterém nebude zavedeno měření velikostí úseček a úhlů. Připojením dalších předpokladů sestrojíme pak euklidovský prostor. Věnujeme se tedy afinnímu prostoru.

Definice 4.6. Nechť je W_n n-rozměrný vektorový prostor a A_n množina. Prvky množiny A_n budeme nazývat *body* a označovat velkými písmeny A, B, C, ... Nechť jsou splněny následující požadavky:

$\mathcal{D}_1$) Každé uspořádané dvojici bodů A, B z A_n je přiřazen v prostoru V_n právě jeden vektor. Pro tento vektor užijeme označení $B - A$.

$\mathcal{D}_2$) Každému bodu $A \in \mathsf{A}_n$ a každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ odpovídá právě jeden bod $B \in \mathsf{E}_n$ takový, že platí

$$B - A = \mathbf{u}\,.$$

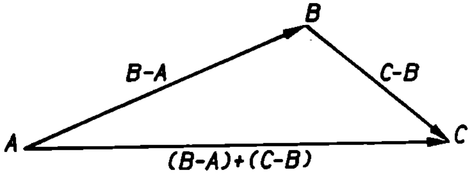
Bod B budeme také nazývat *součtem bodu A s vektorem* $\mathbf{u}$ a budeme psát $B = A + \mathbf{u}$.

$\mathcal{D}_3$) Pro každé tři body A, B, C z A_n platí (obr. 60)

$$(C - B) + (B - A) = C - A\,.$$

Množinu A_n, která vyhovuje požadavkům $\mathcal{D}_1$—$\mathcal{D}_3$, nazýváme *n-rozměrným afinním prostorem*. W_n je tzv. *vektorové zaměření prostoru* A_n.

Zavedli jsme tedy jednoduchým a jasným způsobem pojem n-rozměrného afinního prostoru. Položíme-li $n = 3$, dostáváme prostor A_3, v němž můžeme provést všechny úvahy druhé kapitoly. Položíme-li $n = 2$, resp. $n = 1$, máme tzv. *afinní rovinu* A_2, resp. *afinní přímku* A_1. Studium geometrie v prostorech A_3, A_2, A_1 lze provést najednou tím prostým způsobem, že studujeme geometrii přímo v n-rozměrném prostoru A_n. To je jedna z výhod zavedení n-rozměrného prostoru. Přitom konstrukce prostoru A_n je co do obtížnosti stejná jako konstrukce prostoru A_3 (resp. A_2 nebo A_1), který se pak jeví jako speciální případ prostoru A_n. Uveďme ještě jeden důvod pro zavedení n-rozměrného prostoru. Seznamujeme se totiž s pojmem velmi užitečným a dnes stále více používaným nejen v matematice, ale i v jejích aplikacích (např. lineární programování, mechanika hmotných bodů, teorie relativity).



Obr. 60. Grafický součet vektorů.

4.7. Některé věty z afinní geometrie

Nyní bychom mohli začít systematicky budovat afinní geometrii. Postupně bychom odvodili všechny známé poučky ze „středoškolské afinní“ geometrie (tj. ze středoškolské geometrie polohy). To však není účelem naší knížky. Na několika málo definicích a větách si však naznačený postup ukažme. Jistě zde oceníte jednoduchost a eleganci vektorového pojetí geometrie.

Definice 4.7. Buď A libovolný bod prostoru A_n a $\mathbf{u}$ libovolný nenulový vektor z vektorového prostoru W_n. Potom množinu všech bodů X určených rovnicí

$$X = A + t\mathbf{u}\,, \quad t \in (-\infty, +\infty)\,, \tag{4.9}$$

nazýváme *přímkou.* Rovnice (4.9) je tzv. *vektorová rovnice* této přímky. O přímce (4.9) dále říkáme, že *prochází* bodem A a je *rovnoběžná* s vektorem $\mathbf{u}$. O každém nenulovém vektoru, který je kolineární s vektorem $\mathbf{u}$, říkáme, že je *rovnoběžný* s přímkou (4.9).

Všimněte si, že při definici přímky není vůbec podstatná dimenze prostoru, v němž přímku definujeme.

Věta 4.4. *Jsou dány přímky* $a : X = A + \alpha\mathbf{u}$; $b : Y = B + \beta\mathbf{v}$. *Obě přímky jsou totožné právě tehdy, jestliže vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou kolineární a* $B \in a$.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že přímky a, b jsou totožné. Jestliže $A \neq B$, pak existují nenulová čísla α_0, β_0 taková, že platí $B = A + \alpha_0\mathbf{u}$; $A = B + \beta_0\mathbf{v}$. Sečtením obou rovnic dostaneme rovnici $\mathbf{o} = \alpha_0\mathbf{u} + \beta_0\mathbf{v}$, z níž podle věty 4.1 plyne, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolineární. Jestliže $A = B$, zvolíme na přímce b bod $B + \mathbf{v}$. Bod $B + \mathbf{v}$ leží též na totožné přímce a, tedy $B + \mathbf{v} = A + \alpha\mathbf{u}$. Odtud máme $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy kolineární. Jelikož dále $B \in a$, je tím první část věty dokázána.

2. Předpokládejme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolineární a $B \in a$. Z rovnic $B = A + \alpha_0\mathbf{u}$, $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u}$, $Y = B + \beta\mathbf{v}$ snadno odvodíme, že $Y = A + (\alpha_0 + \beta\gamma)\,\mathbf{u}$. Dokázali

jsme tedy, že každý bod Y přímky b leží na přímce a. Obráceně však také každý bod X přímky a leží na přímce b; přesvědčte se o tom sami. Přímky a, b jsou tedy totožné. Věta je dokázána.

Věta 4.5. *Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka.*

Důkaz. 1. Ukážeme nejprve, že body A, B prochází alespoň jedna přímka, totiž přímka určená rovnicí $X = A + t(B - A)$. To je zřejmé, neboť pro $t = 0$ je $X = A$; pro $t = 1$ je $X = B$.

2. Předpokládejme, že přímky o rovnicích

$$X = A + \alpha\mathbf{u}\,, \quad Y = A + \beta\mathbf{v}\,, \tag{4.10}$$

procházejí body A, B. Zřejmě existují čísla α_0 a β_0 tak, že platí

$$B = A + \alpha_0\mathbf{u}\,, \quad B = A + \beta_0\mathbf{v}\,.$$

Jelikož body A, B jsou různé, je $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Sečtením posledních rovnic zjistíme, že $\alpha_0\mathbf{u} + \beta_0\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy podle věty 4.1 kolineární, a podle věty 4.4. jsou obě přímky (4.10) totožné. Tím je věta dokázána.

Definice 4.8. Přímky, které jsou rovnoběžné s týmž vektorem, nazýváme *rovnoběžnými přímkami.*

Věta 4.6. *Dvě rovnoběžné přímky nemají buď žádný bod společný, nebo mají všechny body společné (tj. jsou totožné).*

Věta 4.7. *Daným bodem prochází právě jedna přímka, která je rovnoběžná s danou přímkou.*

Věty 4.6—4.9 zkuste dokázat sami.

Definice 4.9. Dvě přímky, které mají právě jeden bod společný, nazýváme *různoběžnými přímkami.*

Věta 4.8. *V afinní rovině* A_2 *jsou každé dvě přímky buď rovnoběžné, nebo různoběžné.*

Věta 4.9. *V afinním prostoru* A_3 *existují přímky (tzv. mimoběžky), které nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.*

Mohli bychom pokračovat dále a zavést pojmy: *orientace přímky, uspořádání bodů na přímce, úsečka, shodnost úseček na přímce, rovina* atd. Zabralo by to však příliš mnoho místa a tato knížka vám má dát pouze první impuls k hlubšímu studiu nadhozených otázek.

4.8. Afinní souřadnice

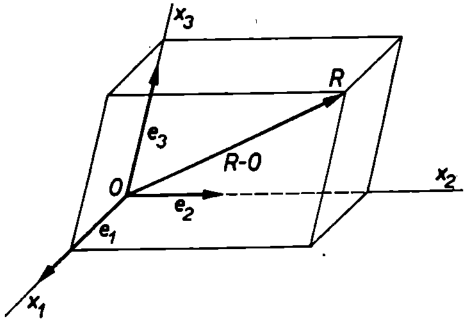
V n-rozměrném afinním prostoru A_n si zvolíme libovolný bod O a nazveme jej *počátkem afinní soustavy souřadnic.* Dále si zvolme ve vektorovém prostoru W_n bázi, jejíž vektory označme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Bod O spolu s vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tvoří tzv. *afinní soustavu souřadnic v prostoru* A_n. Označíme ji $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Přímky, které procházejí bodem O rovnoběžně s vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, nazýváme souřadnicovými osami a značíme je $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Systém souřadnic v A_3 je znázorněn na obr. 61.

V prostoru A_n si zvolme libovolný bod R. Vektor $R - O$ můžeme vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$R - O = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \ldots + r_n\mathbf{e}_n\,.$$

Tuto rovnici můžeme podle definice 4.6 (axiom $\mathscr{D}_2$) zapsat ve tvaru

$$R = O + r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \ldots + r_n\mathbf{e}_n . \qquad (4.11)$$



Obr. 61. Afinní soustava souřadnic.

Dohodneme se, že uspořádanou n-tici čísel $r_1, r_2, \ldots, r_n$ budeme nazývat *afinní souřadnice* bod R vzhledem k afinní bázi $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Je zřejmé, že každému bodu je v dané afinní soustavě souřadnic přiřazena právě jedna uspořádaná n-tice souřadnic. Platí též obráceně, že každou uspořádanou n-ticí čísel je určen právě jeden bod prostoru A_n.

Zvolíme-li afinní soustavu souřadnic pevně, nemůže jistě nastat nedorozumění, užijeme-li pro bod R označení $[r_1, r_2, \ldots, r_n]$ a budeme-li psát $R = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$. Užijeme-li tohoto označení, lze snadno ukázat, že pro libovolné dva body $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ a libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ (srv. s odstavcem 4.5) lze psát

$$A + \mathbf{u} = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, \dots, a_n + u_n],$$
$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n).$$

Vektorovou rovnici přímky $X = A + t\mathbf{u}$ lze pomocí souřadnic psát ve tvaru

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n] + t(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Rozepsáním této rovnice podle jednotlivých souřadnic získáme n tzv. parametrických rovnic přímky, a to ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1, \\ x_2 &= a_2 + tu_2, \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + tu_n. \end{aligned}$$

4.9. Axiomy euklidovského prostoru

Definice 4.10. Nechť A_n je n-rozměrný afinní prostor a W_n je jeho vektorové zaměření. Předpokládejme, že každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z W_n je přiřazeno právě jedno číslo, které budeme nazývat *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a které budeme označovat $\mathbf{u}.\mathbf{v}$. Předpokládejme dále, že pro každé tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ z V_n a pro každé reálné číslo k jsou splněny předpoklady $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$ ze str. 85. Potom prostor A_n označujeme E_n a nazýváme *n-rozměrným euklidovským prostorem.* V_n je jeho vektorové zaměření.

Skalární součin definovaný v prostoru V_n nám umožní zavést v E_n pojmy vzdálenost dvou bodů, úhel dvou přímek, kartézská soustava souřadnic atd. Postupně tak zjistíme, že v případě $n = 3$ je euklidovský prostor E_n prostorem, v němž můžeme realizovat všechny úvahy třetí kapitoly.

4.10. Vzdálenost dvou bodů

Ve shodě s úvahami kapitoly třetí se dohodneme, že velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ budeme označovat $|\mathbf{u}|$ a budeme jí rozumět číslo definované takto:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{u}}\,. \tag{4.12}$$

Vzdálenost dvou bodů A, B z euklidovského prostoru E_n pak definujme jako velikost vektoru $B - A$. Budeme tedy psát

$$AB = |B - A|\,. \tag{4.13}$$

Věta 4.10. *Pro vzdálenosti libovolných tří bodů A, B, C z E_n platí*

1. $AB = BA$,
2. $AB \geqq 0$;

přitom $AB = 0$ právě tehdy, jestliže $A = B$.

3. $AB + BC \geqq CA$ *(tzv. trojúhelníková nerovnost).*

D ů k a z. 1. Zřejmě $AB = |B - A| = \sqrt{(B - A)(B - A)} = \sqrt{(A - B)(A - B)} = |A - B| = BA$.

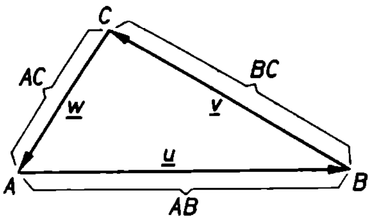
2. $AB = |B - A| = (B - A)(B - A)$. Odtud a z axiomu C_4 vyplývá, že $AB \geqq 0$ a že dále platí $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$.

3. Než přistoupíme k důkazu tzv. trojúhelníkové nerovnosti, kterou pro případ trojrozměrného prostoru

znáte jistě dobře ze školy (obr. 62), odvodíme tzv. *nerovnost Cauchyho* (čti Kóšiho)

$$|\mathbf{uv}| \leqq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,, \tag{4.14}$$

která platí pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z W_n. Zvolme



Obr. 62. K důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

si libovolné reálné číslo α a sestrojme vektor $\mathbf{u}-\alpha\mathbf{v}$. Zřejmě $(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v})(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}) \geqq 0$. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{uu} - 2\alpha\mathbf{uv} + \alpha^2\mathbf{vv} \geqq 0\,. \tag{4.15}$$

Jestliže vektor $\mathbf{v}$ je nulovým vektorem, je nerovnost (4.14) splněna. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ čili $|\mathbf{v}| \neq 0$ a položme

$$\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{\mathbf{vv}}\,.$$

Odtud a ze (4.15) plyne, že

$$\mathbf{uu} - 2\,\frac{(\mathbf{uu})^2}{\mathbf{vv}} + \frac{(\mathbf{uv})^2}{(\mathbf{vv})^2}\,(\mathbf{vv}) \geqq 0\,.$$

Tato nerovnost není ničím jiným než Cauchyho nerovností (4.14), která je tím dokázána.

Vraťme se nyní k důkazu trojúhelníkové nerovnosti. Užijeme-li označení z obrázku 62 a Cauchyho nerovnosti, můžeme psát

$$\begin{aligned} AC^2 &= \mathbf{ww} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2\mathbf{uv} \leqq \\ &\leqq \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \\ &= AB^2 + BC^2 + 2AB.BC = (AB + BC)^2 . \end{aligned}$$

Tím je ověřena trojúhelníková nerovnost, a tedy i věta 4.10.

4.11. Odchylka dvou vektorů a odchylka dvou přímek

Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva nenulové vektory, můžeme Cauchyho nerovnost psát ve tvaru

$$-1 \leqq \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \leqq 1 .$$

V tomto případě má tedy rovnice

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}, \tag{4.16}$$

v níž neznámou je φ, vždy v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ právě jedno řešení. Dohodneme se, že číslo φ, které je tímto řešením, budeme nazývat odchylkou dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Jestliže $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, řekneme, že (nenulové) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vzájemně kolmé. Z rovnice (4.16) okamžitě plyne, že dva nenulové vektory jsou vzájemně kolmé právě tehdy, jestliže jejich skalární součin je roven nule.

Máme-li určit odchylku φ dvou přímek, budeme postupovat následovně:

Zvolíme si nenulový vektor $\mathbf{u}$ rovnoběžný s prvou přímkou a nenulový vektor $\mathbf{v}$ rovnoběžný s druhou přímkou. Dohodneme se, že hledanou odchylkou budeme rozumět číslo φ z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ stanovené rovnicí

$$\cos \varphi = \left| \frac{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}{\mathbf{uv}} \right|. \tag{4.17}$$

Ukáže se, že rovnice (4.17) má v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ vždy právě jedno řešení a že toto řešení je nezávislé na volbě vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, které jsou s uvažovanými rovnoběžné. Dvě přímky, které mají odchylku rovnou číslu $\frac{\pi}{2}$, nazýváme kolmými.

Čtenáře možná překvapuje abstraktní přístup k pojmům odchylka dvou vektorů a odchylka dvou přímek. Je důležité si uvědomit, že pokud se pohybujeme v prostoru E_3, vystačíme vcelku s názorným pojetím 3. kapitoly. Pokud ovšem zkoumáme prostor E_n, kde $n > 3$, nemáme jinou možnost, než uvedené pojmy zavést touto abstraktní cestou. Toto abstraktní pojetí není nijak v rozporu s tím, co již dávno víme o prostoru E_3, (resp. E_2).

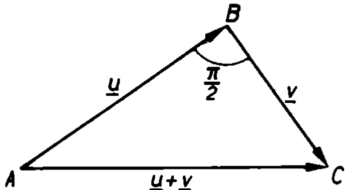
Další studium odchylek, resp. úhlů, by nás mohlo vést třeba až k trigonometrii rovinných a sférických trojúhelníků. Není to v souhlase s naší koncepcí. Zájemce však odkazujeme na knihu [1] našeho vynikajícího matematika světového jména Eduarda Čecha.

Pro ilustraci uveďme aspoň jednoduchý způsob, kterým lze z našich předpokladů odvodit známou Pytha-

gorovu větu. Vyjdeme-li z označení obrázku 63, můžeme psát
$AC^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2\mathbf{uv}$. Jelikož přímky AB a BC jsou navzájem kolmé, je $\mathbf{uv} = 0$ a tedy

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 .$$

Tím je platnost Pythagorovy věty prokázána, a to nejenom v prostorech E_2 a E_3, ale dokonce v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n.



Obr. 63. K důkazu Pythagorovy věty.

4.12. Kartézská soustava souřadnic v E_n

Předpokládejme opět, že je dán euklidovský prostor E_n a jeho vektorové zaměření W_n. Nechť afinní soustava souřadnic $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ prostoru E_n má tu vlastnost, že každý její vektor je jednotkový a že každé dva její různé vektory jsou navzájem kolmé. Jinými slovy řečeno nechť platí

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j. \end{cases} \qquad (4.18)$$

Potom $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic*. Lze ukázat, že v prostoru E_n vždy existuje kartézská soustava souřadnic. Důkaz provádět nebudeme.

Zvolme tedy pevně v prostoru E_n kartézskou soustavu souřadnic. Počítejme skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, jejichž souřadnice uvažujeme vzhledem k této soustavě souřadnic. Zřejmě $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n).(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n)$. Odtud a z (4.18) okamžitě plyne, že

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \,. \tag{4.19}$$

Tím jsme odvodili vzorec, který pro $n = 3$ dobře známe z třetí kapitoly.

V prostoru E_n si zvolme dva body $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, jejichž souřadnice jsou opět vztaženy k uvažované pevně zvolené kartézské soustavě souřadnic. Hledejme vzdálenost dvou bodů A a B. Z rovnice

$$AB = |B - A| = \sqrt{(B - A).(B - A)}$$

a z rovnice (4.19) okamžitě dostáváme

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2} \,.$$

Znovu jsme si tedy odvodili vzorec, který, jak víme, v E_3 platí.

Uzavíráme tuto kapitolu. Nadhled, který čtenář v poslední kapitole získal, mu dovoluje hlubší pohled do problematiky druhé a třetí kapitoly.