3. kapitola

EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

Prostorem našeho zájmu bude opět euklidovský prostor E_3. Ke studiu některých vztahů mezi geometrickými objekty budeme nyní potřebovat pojem vzdálenosti dvou bodů a velikosti úhlu. V tom spočívá hlavní rozdíl mezi geometrií afinní, kterou jsme studovali až dosud, a geometrií euklidovskou, kterou budeme studovat nyní. V celé kapitole budeme předpokládat, že soustava souřadnic je kartézská; metodou studia bude opět vektorový počet.

3.1. Skalární součin dvou vektorů

Z úvodní kapitoly víme, že vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ je dána vzorcem

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,. \quad (3.1)$$

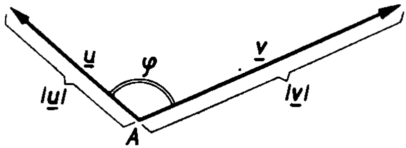
Definice 3.1. Buď $\overrightarrow{AB}$ libovolné umístění vektoru $\mathbf{u}$; *velikostí vektoru* $\mathbf{u}$, kterou označíme $|\mathbf{u}|$, nazýváme velikost úsečky AB.

Věta 3.1. *Pro velikost vektoru* $\mathbf{u}$ *platí vzorec*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,. \quad (3.2)$$

Důkaz. Je-li $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$; stačí nyní porovnat (3.1) a (3.2).

Definice 3.2. Nechť $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ jsou umístěním dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Polopřímky PA, PB určují neorientovaný úhel o velikosti φ, kde $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Číslo φ nazýváme *odchylkou vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.



Obr. 34. K definici skalárního součinu vektorů.

Definice 3.3. Buď φ odchylka dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 34); *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ rozumíme číslo $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi$, které označujeme $\mathbf{uv}$. Píšeme proto

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi\,. \tag{3.3}$$

Je-li aspoň jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nulový, pak definujeme $\mathbf{uv} = 0$.

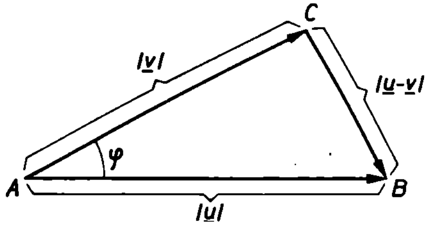
Věta 3.2. *Jsou-li* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *dva libovolné vektory, pak*

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,. \tag{3.4}$$

D ů k a z. a) Pokud $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vektory lineárně nezávislé a označíme φ jejich odchylku, pak při vhodném umístění vektorů vznikne trojúhelník (obr. 35) a podle kosinové věty máme $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varphi$; z (3.2) a (3.3) plyne po úpravě (3.4).

b) Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ kolineární vektory souhlasně orientované, pak $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, $\alpha > 0$ a odchylka těchto vektorů je rovna nule; pak ovšem $\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos 0 =$

$= \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = (\alpha v_1)\, v_1 + (\alpha v_2)\, v_2 + (\alpha v_3)\, v_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. V případě, že $\alpha < 0$, postupujeme stejně; případ $\alpha = 0$ je patrný bez výpočtu.



Obr. 35. K důkazu věty 3.2.

3.2. Základní vlastnosti skalárního součinu

Na tomto místě odvodíme čtyři důležité vlastnosti skalárního součinu, které označíme $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; v další kapitole budou v roli axiomů při budování euklidovského prostoru.

Věta 3.3. Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *tři libovolné vektory a* α *nějaké reálné číslo, pak platí:*

$\mathscr{C}_1$) $\quad \mathbf{uv} = \mathbf{vu}$ *(vztah komutativní),*

$\mathscr{C}_2$) $\quad \mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$ *(vztah distributivní),*

$\mathscr{C}_3$) $\quad (\alpha\mathbf{u})\, \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{uv})$ *(vztah asociativní),*

$\mathscr{C}_4$) $\quad \mathbf{uu} \geqq 0$, *přičemž rovnost platí právě tehdy, jestliže* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Důkaz. Přechodem k souřadnicím se velmi lehce ověří všechny uvedené vlastnosti; případ vztahu komutativního budiž toho dokladem:

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{vu};$$

zbylé vlastnosti skalárního součinu si ověříte snadno sami.

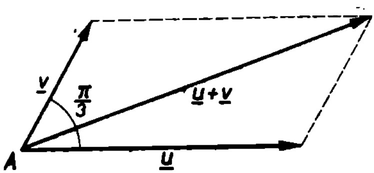
Věta 3.4. Velikost vektoru $\mathbf{u}$ je dána vzorcem

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{uu}}. \tag{3.5}$$

Důkaz. Jelikož $\mathbf{uu} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, máme po dosazení do (3.5) ihned (3.2).

Uvedený vzorec (3.5) nám umožňuje řešení některých úloh bez použití souřadnic, jak ukazuje následující úloha.

Příklad 3.1. V bodě A působí dvě síly o velikostech 3 a 5; odchylka sil $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Určete velikost výslednice obou sil.



Obr. 36. K příkladu 3.1.

Řešení. Mluvme hned geometrickou řečí (obr. 36). Síly jsou reprezentovány vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, které jsou umístěny v bodě A, přičemž platí $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$.

Výslednicí je zřejmě síla o velikosti $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v})}$. Odtud dle $\mathscr{C}_2$ $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{uu} + 2\mathbf{uv} + \mathbf{vv}}$ a po dosazení $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| =$

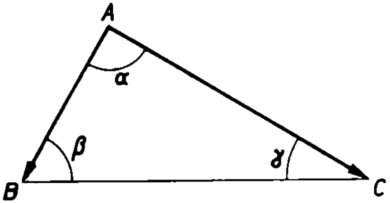
$$= \sqrt{3^2 + 2.3.5 \cos \frac{\pi}{3} + 5^2} = 7.$$

Věta 3.5. Označme φ odchylku dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Potom platí

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}. \tag{3.6}$$

Věta je okamžitým důsledkem vzorce (3.3).

Příklad 3.2. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka ABC; $A = [4, 2, 0]$, $B = [5, 0, 2]$, $C = [3, 1, 4]$.



Obr. 37. K příkladu 3.2.

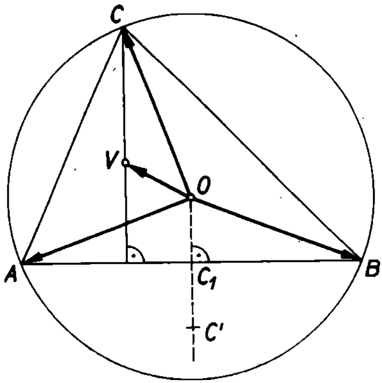
Řešení: Jelikož $B - A = (1, -2, 2)$, $C - A = (-1, -1, 4)$, pak $|B - A| = 3$, $|C - A| = 3\sqrt{2}$ a podle (3.6) máme (obr. 37) $\cos \alpha = \dfrac{(B - A)(C - A)}{|B - A|\,|C - A|} = \dfrac{9}{3.3\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2}}$, tedy $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; podobně určíme, že $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

Na závěr uveďme ještě jednu větu, jejíž správnost plyne přímo ze vztahu (3.3).

Věta 3.5. *Dva nenulové vektory jsou k sobě kolmé právě tehdy, jestliže jejich skalární součin je roven nule.*

3.3. Některé úlohy o trojúhelníku

Trojúhelník je základním stavebním prvkem geometrie. Většinu jeho vlastností znáte velmi dobře ze střední školy. Syntetické důkazy některých vlastností trojúhelníka nejsou zrovna příjemné. Použití vektorů nám tuto práci usnadní.



Obr. 38. Průsečík výšek v trojúhelníku.

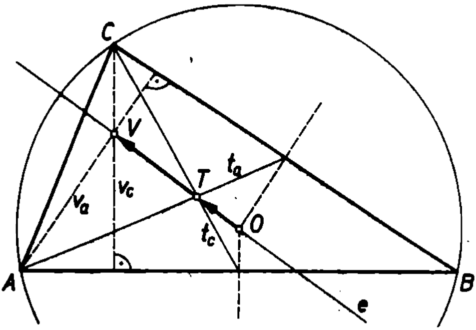
Věta 3.6. *Výšky trojúhelníka se protínají v jediném bodě (tzv. ortocentru).*

Důkaz. Označme O středy kružnice trojúhelníku ABC opsané (obr. 38), C_1 střed strany AB, C' pak nechť je bod souměrně sdružený s bodem O podle přímky AB. Pro jistý bod V nechť platí

$$V = O + (A - O) + (B - O) + (C - O) . \quad (3.7)$$

Víme, že $(A - O) + (B - O) = C' - O$, což dosazeno do (3.7) nám dá $V = O + (C' - O) + (C - O)$, neboli $V - C = C' - O$. Vektory $V - C$ a $C' - O$ jsou tedy rovnoběžné, bod V nutně leží na kolmici vedené bodem C ke straně AB. Při každé cyklické permutaci vrcholů A, B, C má rovnice (3.7) stejný tvar, bod V zůstane pevný a je proto společným bodem všech tří výšek.

Věta 3.7. *Označme O střed kružnice trojúhelníku ABC opsané, T ať je těžiště a V průsečík výšek; body O, T, V leží vždy na jedné přímce (tzv. Eulerově), přičemž bod T odděluje body O, V* tak, že platí $OT : TV = 1 : 2$ (obr. 39).



Obr. 39. Eulerova přímka.

Důkaz. Máme dokázat, že v každém trojúhelníku je $V - O = 3(T - O)$; nuže, podle (3.7) máme:

$$V - O = (A - O) + (B - O) + (C - O) =$$
$$= 3\left\{\frac{1}{3}(A + B + C) - O\right\} = 3(T - O).$$

Věta 3.8. *Nechť $k = (O, r)$ je kružnice trojúhelníku ABC opsaná, průsečík výšek označme V. Středy stran, paty výšek a středy úseček AV, BV, CV leží vždy na jediné (tzv. Feuerbachově) kružnici $k_1 \equiv \left(F, \frac{r}{2}\right)$, přičemž střed F leží na Eulerově přímce a půlí úsečku OV.*

Důkaz. Pro střed F úsečky OV máme $F = \frac{1}{2}[O + V]$; dosadíme-li sem za V podle (3.7), pak $F = \frac{1}{2}[O + O + (A - O) + (B - O) + (C - O)]$, neboli

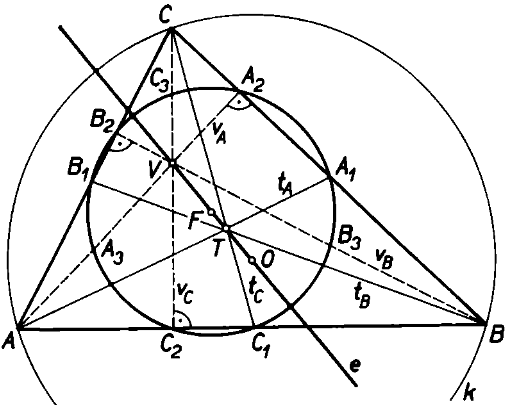
$$F = O + \frac{1}{2}(A - O) + \frac{1}{2}(B - O) + \frac{1}{2}(C - O). \tag{3.8}$$

Středy stran BC, CA, AB označme po řadě A_1, B_1, C_1, paty výšek A_2, B_2, C_2 a středy úseček AV, BV, CV v daném pořadí ať jsou A_3, B_3, C_3 (obr. 40). Dokážeme nyní, že $FC_1 = FC_3 = \frac{1}{2}r$; můžeme zřejmě psát

$$C_1 - F = (C_1 - O) + (O - F). \tag{3.9}$$

Avšak $C_1 - O = \frac{1}{2}(A - O) + \frac{1}{2}(B - O)$. Odtud a ze

(3.8) plyne, že (3.9) můžeme uvést na tvar $C_1 - F = \frac{1}{2}(O - C)$; tedy $FC_1 = |C_1 - F| = \frac{1}{2}|O - C| = \frac{1}{2}r$.



Obr. 40. Feuerbachova kružnice.

Podobně určíme velikost úsečky FC_3 : Je totiž $C_3 = \frac{1}{2}[C + V]$ a podle (3.7) máme

$$C_3 = \frac{1}{2}[C + O + (A - O) + (B - O) + (C - O)] . \tag{3.10}$$

Body F a C_3 máme nyní dány ve tvaru (3.8) a (3.10); použijme těchto zápisů pro výpočet vektoru $C_3 - F$. Snadná úprava nám dává, že $C_3 - F = \frac{1}{2}(C - O)$, a tedy $FC_3 = |C_3 - F| = \frac{1}{2}|C - O| = \frac{1}{2} r$. Body C_1 a C_3 leží proto na Feuerbachově kružnici a z Thaletovy věty plyne, že na téže kružnici leží také bod C_2. Cyklická záměna vrcholů A, B, C vede pak k závěru, že na $k_1 \equiv \left(F, \frac{r}{2}\right)$ leží také trojice bodů A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3.

3.4. Úlohy o kružnicích

Předpokládejme, že v dané euklidovské rovině E_2, kde body i vektory můžeme popsat dvěma souřadnicemi (srv. 2. kapitolu), leží kružnice o středu O a poloměru r. Bod X je bodem kružnice právě tehdy, jestliže pro úsečku OX platí $OX^2 = r^2$ neboli $|X - O|^2 = r^2$. Podle (3.5) můžeme poslední rovnici psát ve formě

$$(X - O).(X - O) = r^2 \tag{3.11}$$

a máme vektorovou rovnici kružnice. Užijeme-li (3.4), uvedeme (3.11) na tvar, který dobře znáte, tj.

$$(x_1 - o_1)^2 + (x_2 - o_2)^2 = r^2 .$$

Stejnolehlostí jsme se zabývali v odstavci 2.8. Je-li v rovině dána stejnolehlost $H(S, \lambda)$, můžeme vektorovou rovnici této stejnolehlosti psát třeba takto:

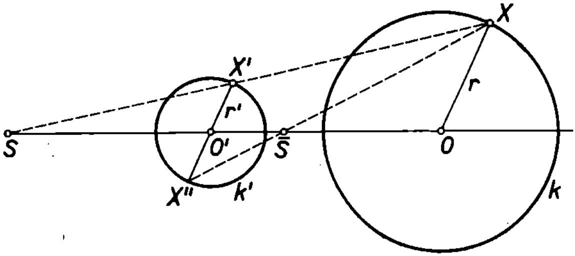
$$X' = S + \lambda(X - S) . \tag{3.12}$$

Položme si otázku, co odpovídá ve stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ dané kružnici $k = (O, r)$. Pro vektor $X - O$ zajisté platí $X - O = \frac{1}{\lambda}(S - S) + (X - S) + (S - O)$;

po dosazení do rovnice (3.11) pak dostaneme

$$\frac{1}{\lambda^2}\{[S+\lambda(X-S)]-[S+\lambda(O-S)]\}.\{[S-\lambda(X-S)]-$$
$$-[S+\lambda(O-S)]\}=r^2,$$

což podle (3.12) znamená, že $(X'-O')(X'-O) = = \lambda^2 r^2$.



Obr. 41. Stejnolehlost dvou kružnic.

Dokázali jsme (obr. 41):

Věta 3.9. *Nechť ve stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ odpovídá bodu O bod O'; potom kružnici $k \equiv (O, r)$ odpovídá vždy kružnice $k' \equiv (O', |\lambda|\, r)$.*

Pro úplnost dodejme, že je-li $\lambda > 0$ nazýváme S vnějším středem stejnolehlosti kružnic k, k'; je-li $\lambda < 0$, bodu S říkáme vnější střed stejnolehlosti kružnic k, k' (obr. 41).

Věta 3.9 navozuje přirozeně další otázku: Jsou-li dány dvě kružnice $k = (O, r)$, $k' = (O', r')$, kde $O \neq O'$, existuje vždy jistá stejnolehlost $H(S, \lambda)$, která převádí kružnici k v kružnici k'? Odpověď je kladná. Jde-li o stejnolehlost s vnějším středem S, pak z věty 3.9 a dodatku plyne, že $\lambda = \frac{r'}{r}$ a $O' = S + \lambda(O - S)$. Pro bod S tedy platí

$$S = \frac{\lambda O - O'}{\lambda - 1}, \quad \lambda = \frac{r'}{r}. \tag{3.13}$$

Je-li $\lambda \neq 1$, neboli $r' \neq r$, je rovnicí (3.13) určen jediný bod. Podobně pro vnitřní střed $\overline{S}$ stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ získáme vzorec

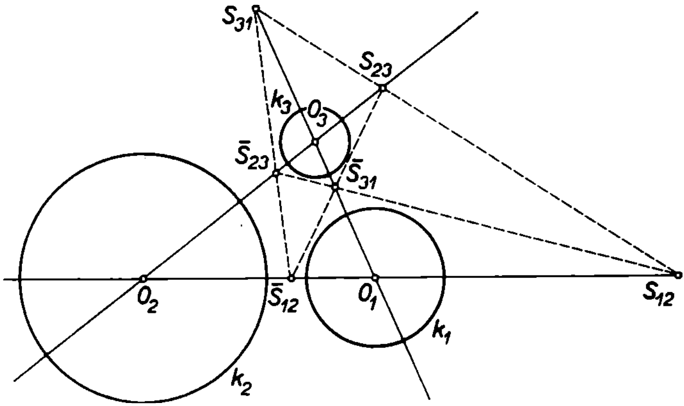
$$\overline{S} = \frac{\lambda O - O'}{\lambda - 1}, \quad \lambda = -\frac{r'}{r}. \tag{3.14}$$

Protože obě nalezené stejnolehlosti převedou kružnici k v kružnici k', dokázali jsme:

Věta 3.10. *Je-li $O \neq O'$ a $r \neq r'$, pak existují vždy dvě stejnolehlosti $H\left(S, \frac{r'}{r}\right)$* a *$H\left(\overline{S}, -\frac{r'}{r}\right)$, které převádějí kružnici $k \equiv (O, r)$ v kružnici $k' \equiv (O', r')$; středy S a $\overline{S}$ těchto stejnolehlostí jsou dány vzorci* (3.13) *a* (3.14).

POZNÁMKA 3.1. Je-li $r = r'$, neexistuje stejnolehlost $H\left(S, \frac{r'}{r}\right)$, existuje však stejnolehlost $H\left(\overline{S}, -\frac{r'}{r}\right)$. To plyne ihned ze vzorce (3.13) a (3.14). Za pozornost stojí i zvláštní případ kružnic soustředných či splývajících.

Mějme nyní dány tři kružnice $k_1 \equiv (O_1, r_1)$, $k_2 \equiv \equiv (O_2, r_2)$ a $k_3 \equiv (O_3, r_3)$; předpokládejme, že žádné dvě nejsou soustředné a nemají týž poloměr. Označme S_{ij} vnější střed stejnolehlosti, $\overline{S}_{ij}$ vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k_i, k_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$) a uvažujme stejnolehlosti $H_{12}\left(S_{12}, \frac{r_2}{r_1}\right)$, $H_{23}\left(S_{23}, \frac{r_3}{r_2}\right)$; stejnolehlost H_{12} převádí k_1 v k_2, stejnolehlost H_{23} pak k_2 v k_3. Jelikož $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \neq 1$, vznikne složením obou stejnolehlostí opět stejnolehlost $H_{31}\left(S_{31}, \frac{r_3}{r_1}\right)$, která převádí kružnici k_1 v kružnici k_3 (srv. odst. 2.8). Podle věty 2.11 leží body S_{12}, S_{23}, S_{31} na jedné přímce (obr. 42). Odtud plyne pěkná věta:



Obr. 42. Konfigurace středů stejnolehlosti tří kružnic.

Věta 3.11. *Jsou dány tři kružnice různých poloměrů tak, že žádné dvě z nich nejsou soustředné. Potom tři vnější středy stejnolehlosti, které převádějí jednu kružnici v druhou, leží v jedné přímce.*

Uvažujme dále stejnolehlosti $\bar{H}_{12}\left(\bar{S}_{12}, -\frac{r_2}{r_1}\right)$ a

$\overline{H}_{23}\left(\overline{S}_{23}, -\frac{r_3}{r_2}\right)$; uvedené stejnolehlosti s vnitřními středy $\overline{S}_{12}$ a $\overline{S}_{23}$ převedou k_1 v k_2 a k_2 v k_3. Složením $\overline{H}_{12}$, $\overline{H}_{23}$ vznikne opět stejnolehlost s koeficientem $\left(-\frac{r_2}{r_1}\right)\left(-\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{r_3}{r_1}$; pozor tedy, jde o stejnolehlost $H_{31}\left(S_{31}, \frac{r_3}{r_1}\right)$. Podle věty 2.11 máme další tvrzení:

Věta 3.12. *Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 s různými středy i poloměry; potom spojnice vnitřních středů stejnolehlostí mezi k_1, k_2 a k_2, k_3 prochází vnějším středem stejnolehlosti mezi k_1, k_3.*

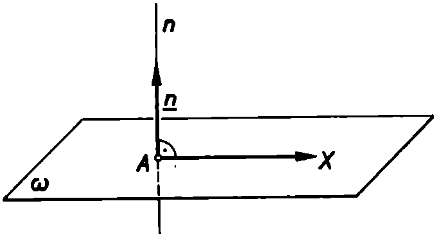
Sami jistě uznáte, že důkazy obou posledních vět nejsou nijak obtížné. Podkladem byla ovšem věta 2.11. odstavce 2.8, který se vám mohl zdát příliš teoretický a nezáživný. Jak vidět, nelze teorii podceňovat. Odvodit výsledky obou vět jinou cestou je nepochybně daleko obtížnější. Dokazuje to kupř. syntetický postup v pěkné knížce J. Holubáře [3], kde oba výsledky jsou východiskem při řešení jedné Apolloniovy úlohy (sestrojit kružnici, která se dotýká daných tří kružnic). Nemělo tím být však řečeno, že syntetický postup odmítáme, chtěli jsme pouze znovu upozornit na efektivnost vektorového počtu. Pokuste se řešit zmíněnou Apolloniovu úlohu vektorově.

3.5. Vektorový zápis obecného tvaru rovnice roviny

Ze stereometrie víme, že kolmice k nějaké rovině je kolmá ke každé přímce této roviny; kolmici k rovině říkáme také normála. Je-li rovina dána svým bodem A a směrovým vektorem normály $\mathbf{n}$, pak obecný bod X leží v dané rovině právě tehdy, jestliže platí (obr. 43)

$$\mathbf{n}(X - A) = 0 . \tag{3.15}$$

Vskutku: Je-li $X = A$, pak (3.15) platí. Jestliže v dané rovině $X \neq A$, jsou vektory $\mathbf{n}$ a $X - A$ vzájemně kolmé a podle věty 3.5 platí (3.15). Obrácení je zřejmé.



Obr. 43. Rovina určená bodem A a vektorem normály n.

Rovnici (3.15) říkáme *vektorový zápis obecného tvaru rovnice roviny*. Provedeme-li naznačený skalární součin vektorů, dostaneme $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0$ a po úpravě

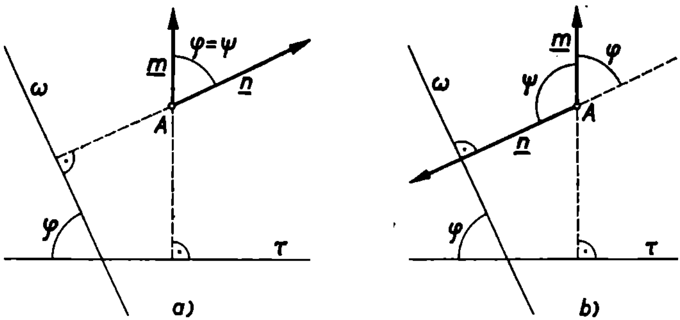
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 , \tag{3.16}$$

kde jsme položili $n_0 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$. Rovnice (3.16) je známá *rovnice roviny* z odst. 2.13. Dobře si všimněte, že v této rovnici jsou koeficienty při x_i ($i = 1, 2, 3$) rovny i-té souřadnici vektoru $\mathbf{n}$; toto zjištění nám ulehčí řešení mnoha úloh, jak se hned přesvědčíte. Obráceně lze ukázat, že každou rovnici (3.16) můžeme psát ve tvaru (3.15).

Příklad 3.3. Určete odchylku rovin daných rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 &= 0\,, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení. Ze stereometrie víme, že odchylka φ dvou rovin je definována tak, že $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Označíme-li směrové vektory normál daných rovin $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ a ψ jejich odchylku, pak buď $\varphi = \psi$, nebo $\varphi = \pi - \psi$ (obr. 44).



Obr. 44. Odchylka rovin ω, τ.

V obou případech $\cos \varphi = |\cos \psi|$. Jelikož $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{m} = (-2, -2, 1)$, máme

$$\cos \varphi = \left| \frac{\mathbf{nm}}{\sqrt{\mathbf{nn}}\,\sqrt{\mathbf{mm}}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{9}\,\sqrt{9}} \right| = 0{,}2\,.$$

Příklad 3.4. Napište obecný tvar rovnice roviny, která obsahuje průsečnici rovin $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, a s první uvedenou rovinou svírá úhel o velikosti $\frac{\pi}{3}$.

Řešení. Hledaná rovina náleží do svazku daných rovin. Má proto tvar $\lambda(x_1 + x_3) + x_1 - x_2 = 0$, neboli $(\lambda + 1)\,x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0$.*) Směrový vektor normály hledané roviny tedy je $\mathbf{m} = (\lambda + 1, -1, \lambda)$; $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ je pak normální vektor roviny $x_1 + x_3 = 0$. Dále víme, že má být

$$\cos\frac{\pi}{3} = \left|\frac{\mathbf{n}\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{m}|}\right|,$$

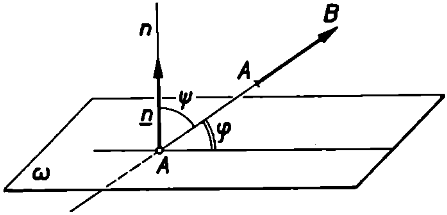
což po dosazení za $\mathbf{n}$ a $\mathbf{m}$ vede k výsledku $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Hledané roviny pak mají rovnice $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$.

Příklad 3.5. Určete odchylku přímky AB od roviny $x_1 - x_3 = 0$, jestliže $A = [5, 5, 5]$, $B = [3, 3, 5]$.

Řešení. Označme ψ velikost úhlu, který svírá přímka AB s normálou dané roviny (obr. 45); buď je $\psi = \frac{\pi}{2} - \psi$, nebo $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. Potom však $\sin\varphi = |\cos\psi| = \left|\frac{\mathbf{n}(B - A)}{|\mathbf{n}|\,|B - A|}\right|$.

*) Vzhledem k odst. 2.14 bychom měli psát $\alpha(x_1 + x_3) + \beta(x_1 - x_2) = 0$, my jsme však zde položili $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$. Přesvědčete se, že $\beta \neq 0$.

V našem případě $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$, $B - A = (2, 2, 0)$; tedy $\sin \varphi = \left| \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} \right| = \frac{1}{2}$ a odtud $\varphi = \frac{\pi}{6}$.



Obr. 45. Odchylka přímky od roviny.

Příklad 3.6. Určete kolmý průmět P bodu $M = [7, 4, 4]$ do roviny dané rovnicí $2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$.

Řešení: Každá normála dané roviny má směrový vektor $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$; kolmice vedená bodem M má proto rovnici $X = [7, 4, 4] + \lambda(2, 1, 1)$. Po dosazení souřadnic bodu X do rovnice roviny zjistíme snadno, že $\lambda = -3$, což po zpětném dosazení do rovnice kolmice nám dá výsledek $P = [1, 1, 1]$.

Příklad 3.7. Dokažte, že množina všech bodů X, které mají stejnou vzdálenost od dvou pevných bodů $A \neq B$, je rovina, která půlí úsečku AB a je k ní kolmá.

Řešení. Bod X je stejně vzdálen od daných bodů A, B právě tehdy, jestliže $AX^2 = BX^2$; uvedenou rovnici můžeme psát ve tvaru $|X - A| = |X - B|$, což po úpravě dává

$$(b_1 - a_1)\, x_1 + (b_2 - a_2)\, x_2 + (b_3 - a_3)\, x_3 + b_0 = 0 \,. \tag{3.17}$$

(Položili jsme: $b_0 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)$.)
Rovnice (3.17) je obecná rovnice roviny kolmé k přímce AB; snadno se přesvědčíte, že bod $S = \frac{1}{2}(A + B)$ je bodem roviny (3.17).

POZNÁMKA 3.2. V celém odstavci jsme pracovali s obecným tvarem rovnice roviny a při řešení úloh vystupoval vždy vektor normály. Úlohy stejné povahy můžeme ovšem řešit i tehdy, není-li k dispozici obecný tvar rovnice roviny. Jak si opatříme vektor normály bez znalosti obecné rovnice roviny, ukážeme v odstavci 3.9 a 3.10.

3.6. Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu od roviny je pouze zvláštním případem vzdálenosti dvou množin v prostoru E_3. Nechť F, G jsou dvě množiny v E_3, nechť X je libovolný bod množiny F, Y pak libovolný bod množiny G. Označme $d(X, Y)$ vzdálenost bodů X, Y. Všechna možná čísla $d(X, Y)$ vytvoří číselnou množinu, kterou označíme U. Nejmenší číslo množiny U, pokud existuje, označíme $d(\mathsf{F}, \mathsf{G})$ (stručně budeme psát d) a nazýváme *vzdáleností množin* F, G*).

Ukážeme si nyní, že vzdálenost d bodu M od roviny ω je velikost úsečky MP, kde P je pravoúhlý průmět

*) Jestliže nejmenší číslo množiny U neexistuje, lze zavést pojem vzdálenosti dvou množin pomocí tzv. *infima* množiny U. Jde o pojem poněkud obtížnější, setkáte se s ním ve vyšší matematice.

bodu M do roviny ω. Budiž tedy $X = P + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ libovolný bod roviny ω. Jak známo, pro vzdálenost MX platí

$$
\begin{aligned}
MX^2 &= (X - M)(X - M) = \\
&= [(P - M) + (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})][(P - M) + \\
&+ (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})] = (P - M)(P - M) + \\
&+ (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\,.
\end{aligned}
$$

Vzdálenost MX je zřejmě nejmenší, jestliže skalární součin $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})$ je roven nule, což nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = 0$, čili $X = P$.

Je-li rovina ω určena svým bodem A a vektorem normály $\mathbf{n}$, pak z pravoúhlého trojúhelníka APM (obr. 46) máme

$$d = AM \,.\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}|\,|M - A|\cos\varphi}{|\mathbf{n}|}\,. \qquad (3.18)$$

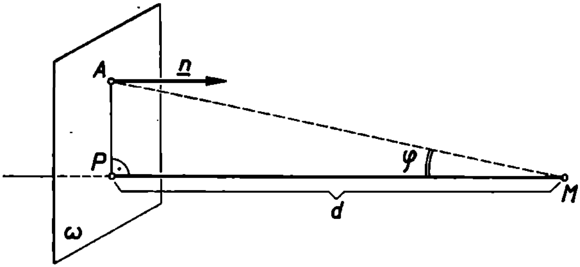
Pro φ platí $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$; vektory $\mathbf{n}$ a $M - A$ mají odchylku φ nebo $\pi - \varphi$, skalární součin těchto vektorů je — až snad na znaménko — roven čitateli zlomku v (3.18). Můžeme proto psát dle (3.3)

$$d = \frac{|\mathbf{n}(M - A)|}{|\mathbf{n}|}\,; \qquad (3.19)$$

rovina ω má rovnici $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ a snadno zjistíme, že bod $A = \left[0, 0, -\frac{n_0}{n_3}\right]$ v rovině ω leží. Označíme-li jako vždy $M = [m_1, m_2, m_3]$, můžeme

(3.19) po provedeném skalárním násobení uvést na tvar

$$d = \frac{|n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 + n_0|}{\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}}. \qquad (3.20)$$



Obr. 46. Vzdálenost d bodu M od roviny ω.

Příklad 3.8. Určete vzdálenost bodu $M = [2, 4, -3]$ od roviny ω: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$.

Řešení. Mechanickým dosazením do (3.20) zjistíme, že

$$d = \frac{|4 - 4 - 6 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3\,.$$

Vzorec (3.20) nám umožňuje určit také vzdálenost dvou rovnoběžných rovin a vzdálenost přímky od roviny rovnoběžné.

Příklad 3.9. Určete vzdálenost rovin, které jsou dány rovnicemi

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 = 0\,,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 3 = 0\,.$$

Řešení. Vzdálenost dvou rovin určíme zřejmě jako vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé. Zvolme tedy nějaký bod M, který leží v první rovině, třeba $M = [-1, -1, -1]$; podle (3.20) pak máme $d = 2$.

Rovnice rovnoběžných rovin můžeme psát také ve tvaru

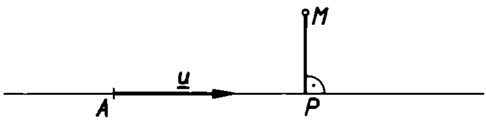
$$a_1x + a_2y + a_3z + a = 0\,,$$
$$a_1x + a_2y + a_3z + A = 0\,.$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že vzdálenost takových rovin je dána vzorcem

$$d = \frac{|a - A|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}}\,. \tag{3.21}$$

3.7. Vzdálenost bodu od přímky

Podobně jako v odstavci 3.6 lze ukázat, že vzdálenost bodu M od přímky p je velikost úsečky MP, kde P je kolmý průmět bodu M na přímku p (obr. 47).



Obr. 47. Vzdálenost bodu od přímky.

Analyticky nás bude zřejmě zajímat velikost vektoru $M - P$, k tomu však nutně potřebujeme znát bod P. Je-li přímka dána bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$, pak zřejmě $P = A + \lambda\mathbf{u}$, kde λ je jisté pevné číslo, pro nás zatím neznámé. Víme však, že vektory $\mathbf{u}$ a $M - P$ jsou vzájemně kolmé, proto $\mathbf{u}(M - P) = 0$; dosadíme-li sem za P z výše uvedené rovnice, dostaneme $\mathbf{u}(M - A - \lambda\mathbf{u}) = 0$ a po úpravě

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}(M - A)}{\mathbf{u}\mathbf{u}}. \tag{3.22}$$

Ve vzorci (3.22) nelze ovšem krátit; číslo λ známe, snadno tedy určíme bod P. Jiný způsob výpočtu hledané vzdálenosti je uveden ve cvičení v příkladu 3.18.

Příklad 3.10. Určete vzdálenost bodu $M = [2, -2, 2]$ od přímky AB, jestliže $A = [6, 6, 2]$, $B = [9, 8, 3]$.

Řešení. Ve vzorci (3.22) potřebujeme směrový vektor $\mathbf{u} = B - A = (3, 2, 1)$ a vektor $M - A = (-4, -8, 0)$; dosadíme do (3.22) a máme $\lambda = -2$. Potom bod $P = A + \lambda\mathbf{u} = [0, 2, 0]$ a platí $d = |M - P| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$.

Jiný způsob řešení spočívá v tom, že bodem M sestrojíme rovinu ω kolmou k přímce AB a bod P získáme jako průsečík přímky AB s rovinou ω. Rovnici roviny ω určíme snadno, neboť směrový vektor $\mathbf{u}$ je normálový vektor této roviny. Máme tedy $3x_1 + 2x_2 + x_3 + n_0 = 0$ a dále víme, že bod M v rovině ω leží, proto $3 . 2 + 2(-2) + 2 + n_0 = 0$; odtud $n_0 = -4$. Rovnice roviny ω tedy je $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$. Sem dosadíme z rovnice přímky $AB : X = [6, 6, 2] + \lambda(3, 2, 1)$. Zjistíme samozřejmě opět, že $\lambda = -2$. Další postup je shodný s předešlým.

Jak ukazuje příklad 3.10, hraje důležitou roli bod P; víme již také, že při určování vzdálenosti bodu M od roviny ω nemá příslušný bod P tak velký význam. Vektorový součin, který zavedeme v odstavci 3.9, nám pomůže určit vzdálenost bodu od přímky bez závislosti na bodu P.

Zbývá ještě dodat, že vzdálenost bodu od přímky v rovině E_2 určíme zcela obdobně jako vzdálenost bodu od roviny v E_3. Je-li rovnice přímky v obecném tvaru (víme, že v E_3 taková rovnice neexistuje) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$ a bod $M = [m_1, m_2]$, pak

$$d = \frac{|a_1m_1 + a_2m_2 + a_0|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}.$$

Podobně pro vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2, pokud jsou dány rovnicemi $a_1x_1 + a_2x_2 + a = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 + A = 0$, platí

$$d = \frac{|a - A|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}.$$

3.8. Čtvercová matice typu 2,2 a její determinant

Až dosud jsme se vyhýbali zavádění nových algebraických pojmů a neskrývali jsme důvody. Na tomto místě bude však vhodné rozšířit trochu algebraický obzor.

Máme čtyři čísla a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; jsou-li seřazena do schématu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

potom říkáme, že je definována *čtvercová matice typu* 2,2. Je podstatné, jak jsme uvedená čísla zapsali. Např. matice

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

je obecně jinou maticí než matice (3.22).

Matici (3.22) přiřadíme číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, které nazýváme *determinantem matice* (3.22) a užíváme pro něj označení

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Píšeme pak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \qquad (3.23)$$

Šipky v zápise jsou mnemotechnickou pomůckou. Pozor tedy, matice je číselné schéma, determinant je jediné číslo přiřazené čtvercové matici.

Příklad 3.11. Určete hodnotu determinantu, který je přiřazen matici

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2.1 - 5.3 = -17 .$$

Čtvercová matice typu 2,2 má dva řádky a dva sloupce. Vyměníme-li v matici (3.22) řádky nebo sloupce, liší se determinanty těchto nových matic pouze znaménkem od determinantu matice (3.22). To ukazuje přímý výpočet a srovnání s (3.23).

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \,.$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \,.$$

Přímým výpočtem se také snadno dokáže: *Determinant matice* (3.22) *je roven nule právě tehdy, když jeden řádek je násobkem druhého řádku nebo jeden sloupec násobkem druhého sloupce.*

3.9. Vektorový součin dvou vektorů

Definice 3.4. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{3.24}$$

budeme označovat $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a nazývat *vektorovým součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Definicí 3.4 je dvěma vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ přiřazen vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$; vektor (3.24) má velký význam, neboť je v obecném případě kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, což ukážeme později. Někdo by si mohl myslet, že vektorových součinů můžeme zavést libovolné množství a nebyl by daleko od pravdy. Ukazuje se ovšem, že vektorový součin definovaný jiným způsobem (třeba $\mathbf{u} \,\square\, \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \cos u_2, \sin v_3)$ nemá rozumný geometrický význam a při změně soustavy souřadnic mění svůj obsah. Jak vidíme, tyto problémy u vektorového součinu (3.24) odpadnou.

Věta 3.13. *Vektorový součin* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *je roven nulovému vektoru* $\mathbf{o}$ *právě tehdy, jestliže vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé (kolineární).*

Důkaz. a) Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé, pak např. $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, neboli $v_1 = \lambda u_1$, $v_2 = \lambda u_2$, $v_3 = \lambda u_3$. Dosadíme-li odtud od (3.24), zjistíme, že v každém determinantu je druhý řádek násobkem prvého. Podle odstavce 3.8 tedy $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 0)$.

b) Obráceně: Je-li $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$, znamená to podle (3.24), že je

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 &= 0\,, \\ -u_1v_3 + u_3v_1 &= 0\,, \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, soustava (3.25) je splněna a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Nechť žádný z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ není nulový. Pak vektor $\mathbf{u}$ má aspoň jednu složku nenulovou, nechť tedy třeba $u_2 \neq 0$. Z prvé a třetí rovnice (3.25) máme

$$v_3 = \frac{v_2}{u_2}u_3\,, \quad v_1 = \frac{v_2}{u_2}u_1 \quad \text{a jistě platí} \quad v_2 = \frac{v_2}{u_2}u_2\,.$$

Je tedy $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, kde $\lambda = \dfrac{v_2}{u_2}$; vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Věta 3.14. *Nechť* φ *je odchylka dvou lineárně nezávislých vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w}$ *jejich vektorový součin. Potom vektor* $\mathbf{w}$ *je nenulový a kolmý k oběma vektorům* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a platí*

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\varphi\,. \tag{3.26}$$

Důkaz. Podle věty 3.13 je $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektor nenulový. Počítejme skalární součin $\mathbf{wu}$:

$$\mathbf{wu} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} u_3 =$$
$$= u_1u_2v_3 - u_1v_2u_3 - u_1u_2v_3 + v_1u_2u_3 + u_1v_2u_3 - - v_1u_2u_3 = 0\,;$$

podobně se ukáže, že $\mathbf{wv} = 0$.

Zbývá tedy odvodit vzorec (3.26). Výpočet je formálně snadný, ale delší:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - v_3u_1)^2 + + (u_1v_2 - v_1u_2)^2.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = [(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2]\,[(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2] + + (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2\,,$$

který znamená vlastně

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{uv})^2\,.$$

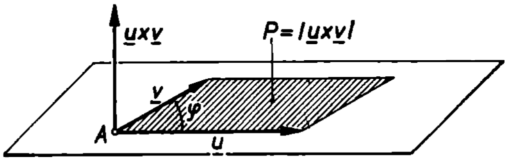
Skalární součin v kulaté závorce nahradíme podle (3.3) a po úpravě získáme vzorec (3.26), jak ukazuje výpočet:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi)^2 = \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\cos^2\varphi = \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,(1 - \cos^2\varphi) = \\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\sin^2\varphi = (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\varphi)^2\,. \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

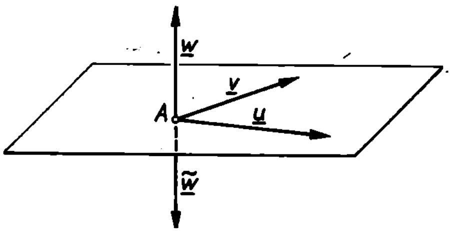
Velikost vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ lze geometricky interpretovat také jako obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 48).

POZNÁMKA 3.3. Jsou-li vektory **u**, **v** lineárně nezávislé, víme již, že vektor **u** × **v** je nenulový a kolmý k vektorům **u**, **v**; dosud však nevíme, zda jde o vektor **w** nebo $\tilde{\mathbf{w}}$, jak ukazuje obrázek 49. Tento problém souvisí s orientací soustavy souřadnic a s orientací báze vektorového prostoru. Jde o otázky geometricky dosti náročné a z hlediska našeho zájmu ne právě zásadní. Povahu problému pouze nastíníme bez nároku na přesnost a bez důkazu uvedeme jedno tvrzení.



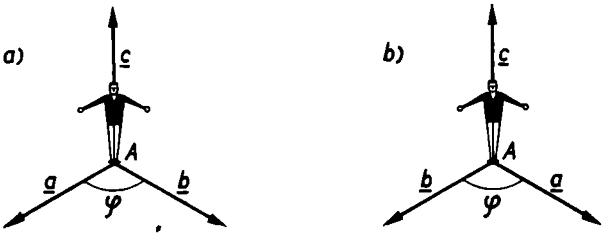
Obr. 48. Vektorový součin **u** × **v**.

Jsou-li dány tři lineárně nezávislé vektory **a**, **b**, **c**, které umístíme do bodu P, leží vektory **a**, **b** v jedné rovině. Označme φ odchylku vektorů **a**, **b** a představme si na místě vektoru **c** pozorovatele tak, že má před sebou úhel vektorů **a**, **b** o velikosti φ (obr. 50).



Obr. 49. Otázka orientace vektorů **u** × **v**.

Má-li pozorovatel vektor $\mathbf{a}$ po pravé ruce, nazveme uspořádanou soustavu vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) *pravotočivou*, má-li vektor $\mathbf{a}$ po levé ruce, nazveme tuto soustavu *levotočivou*. Platí pak věta: *Jestliže kartézská soustava souřadnic* (O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) *je pravotočivá a vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně nezávislé, pak uspořádaná soustava vektorů* ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) *je pravotočivá.*



Obr. 50a. Pravotočivá soustava vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$).
Obr. 50b. Levotočivá soustava vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$).

Z předchozích úvah plyne geometrická konstrukce vektorového součinu $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Jestliže $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vektory kolineární, pak $\mathbf{w} = \mathbf{o}$. Jestliže $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nejsou kolineární, je $\mathbf{w}$ vektor kolmý k oběma vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a uspořádaná trojice vektorů ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) tvoří pravotočivou soustavu. Těmito geometrickými vlastnostmi je vektor $\mathbf{w}$ jednoznačně stanoven; definice 3.4 je proto nezávislá na volbě soustavy souřadnic v E_3.

Na závěr odstavce uvedeme větu, která charakterizuje hlavní vlastnosti vektorového součinu.

Věta 3.15. *Jsou-li dány tři libovolné vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$ *a reálné číslo* α, *potom platí:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$,
2. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v})$,
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{z} + \mathbf{v} \times \mathbf{z}$,
4. $\mathbf{z} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{z} \times \mathbf{u} + \mathbf{z} \times \mathbf{v}$.

Důkaz: 1. Podle odstavce 3.8 výměna řádků znamená u determinantu změnu znaménka, máme tedy

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \ldots, \ldots\right) = -\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \ldots, \ldots\right) = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Obdobně lze odvodit i zbývající tři vlastnosti.

POZNÁMKA 3.4. Všimněte si, že neplatí obecně vztahy

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}; \ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{z});$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o} \text{ nebo } \mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

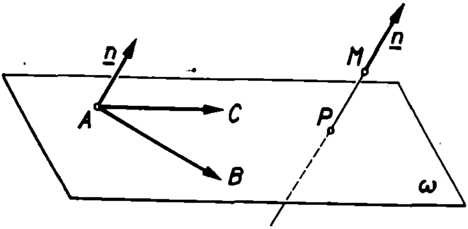
Uvedená implikace neplatila ostatně ani pro skalární součin!

3.10. Úlohy řešené pomocí vektorového součinu

V poznámce 3.2 a také v závěru odstavce 3.7 jsme si řekli, že při řešení některých úloh užijeme s výhodou vektorového součinu. Jde hlavně o takové úlohy, v nichž obecný tvar rovnice roviny není hned po ruce a neznáme tedy ani její normální vektor.

Příklad 3.12. Určete kolmý průmět P bodu $M = [1, -3, 9]$ na rovinu ABC, jestliže $A = [1, 1, 1]$, $B = [3, 1, 1]$, $C = [1, 3, 2]$.

Řešení. Zřejmě $B - A = (2, 0, 0)$, $C - A = (0, 2, 1)$. Vektor $\mathbf{n}$, kolmý k rovině ABC, určíme pomocí vektorového součinu (obr. 51):



Obr. 51. K příkladu 3.12.

$$\mathbf{n} = (B - A) \times (C - A) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, -2, 4)\,.$$

Hledaný bod P leží jednak na přímce $X = M + \alpha\mathbf{n}$, jednak v rovině, která má vektorovou rovnici $X = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$; musí tedy být

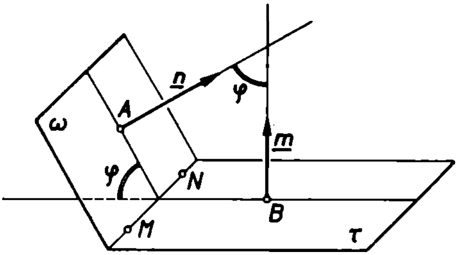
$$M + \alpha\mathbf{n} = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)\,.$$

Do této rovnice dosadíme a po přechodu k souřadnicím obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -2\beta \quad &= 0, \\ -2\alpha \quad -2\gamma &= 4, \\ 4\alpha \quad - \gamma &= -8\,. \end{aligned}$$

Odtud máme $\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; dosazením za α, β do rovnice roviny zjistíme, že $P = A$.

Příklad 3.13. Určete odchylku rovin AMN a BMN, jestliže $A = [1, 1, 1]$, $B = [3, 3, 3]$, $M = [3, 1, 1]$, $N = [0, 2, 1]$.



Obr. 52. K příkladu 3.13.

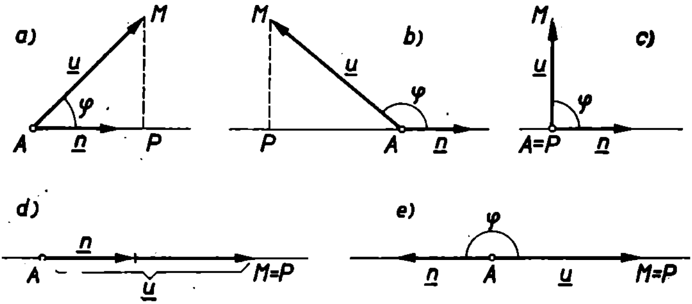
Řešení. Určující vektory daných rovin napíšeme snadno: $M - A = (2, 0, 0)$, $N - A = (-1, 1, 0)$, $M - B = (0, -2, -2)$, $N - B = (-3, -1, -2)$. Normálové vektory daných rovin BMN, AMN označme po řadě $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ (obr. 52). Víme již, že $\mathbf{m} = (N - B) \times (M - B) = (-2, -6, -6)$, $\mathbf{n} = (M - A) \times (N - A) = (0, 0, 2)$, a vždy je $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Je-li ψ odchylka normálových vektorů $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, pak buď $\varphi = \psi$, nebo $\varphi = \pi - \psi$. V každém případě však platí

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{mn}|}{|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|} = \frac{3\sqrt{19}}{19}.$$

Dříve než přistoupíme k řešení dalších dvou úloh, definujeme: Vektor, jehož velikost je 1, se nazývá *jednotkový*. Je-li dán libovolný vektor $\mathbf{z}$, pak vektor

$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ je zřejmě jednotkový a kolineární s vektorem $\mathbf{z}$.

Dále si představme, že máme dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$, které umístíme v nějakém bodě A (obr. 53). Předpokládejme, že $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a vypočítejme absolutní hodnotu skalárního součinu $\mathbf{nu}$:



Obr. 53. Kolmý průmět AP vektoru $\mathbf{u}$ na přímku.

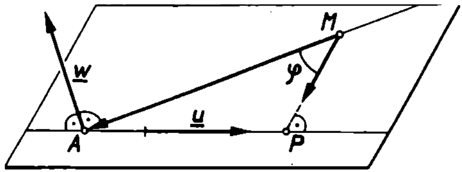
$$|\mathbf{nu}| = \big||\mathbf{n}|\,|\mathbf{u}|\cos\varphi\big| = |\mathbf{u}|\,|\cos\varphi|\,. \qquad (3.27)$$

Dobře si všimněme, co nám říká rovnost (3.27). Absolutní hodnota skalárního součinu jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ s libovolným vektorem $\mathbf{u}$ nám udává velikost kolmého průmětu vektoru $\mathbf{u}$ do přímky, která má směrový vektor $\mathbf{n}$ (v obr. 53 je průmět označen AP).

Příklad 3.14. Určete vzdálenost d bodu M od přímky p dané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$ (obr. 54).

Řešení. Mysleme si, že známe jednotkový vektor $\mathbf{n}$ na přímce MP, kde P je pata kolmice vedené bodem M

k přímce p. Vzdálenost d bodu M od přímky p je dána velikostí kolmého průmětu vektoru $A - M$ na přímku MP. Podle (3.27) tedy máme: $d = |\mathbf{n}(A - M)|$. Zbývá určit jednotkový vektor $\mathbf{n}$. Vektor $\mathbf{w} = (A - M) \times \mathbf{u}$ je kolmý k rovině AMP, vektor $\mathbf{n}$ je proto kolmý jak k vektoru $\mathbf{u}$, tak k $\mathbf{w}$, a platí tudíž



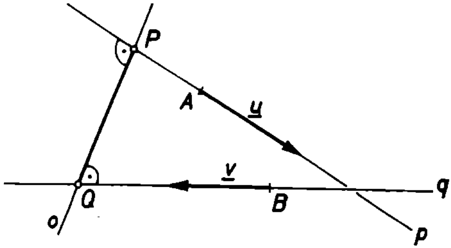
Obr. 54. K příkladu 3.14.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{u} \times [(A - M) \times \mathbf{u}]}{|\mathbf{u} \times [(A - M) \times \mathbf{u}]|}.$$

Známe již vektor $\mathbf{n}$. Hladce proto podle výše uvedeného vztahu určíme také hledanou vzdálenost d. Obecný tvar pro $\mathbf{n}$ nemusí v čtenáři budit příliš mnoho důvěry, konkrétní výpočet však není nijak obtížný. Zkuste vyřešit touto cestou příklad 3.10. (Srv. také cv. 3.18, kde najdete d v jednodušším tvaru.)

Příklad 3.15. Jsou dány dvě mimoběžky $p \equiv (A, \mathbf{u})$, $q \equiv (B, \mathbf{v})$. Určete vzdálenost d mimoběžek p, q, jestliže $A = [2, -2, 0]$, $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $B = [2, 3, 1]$, $\mathbf{v} = [0, 1, -2)$.

Řešení. Příčku, která je kolmá k přímkám p, q (taková příčka vždy existuje), nazýváme osou nebo též společnou kolmicí mimoběžek p, q. Označme průsečíky osy s přímkami p, q po řadě P, Q. Ukážeme, že velikost úsečky PQ je hledanou vzdáleností mimoběžek p, q (obr. 55). Nechť $X = P + \alpha\mathbf{u}$ je běžný bod přímky p, $Y = Q + \beta\mathbf{v}$ běžný bod přímky q. Pro vzdálenost XY platí (srv. začátek odstavce 3.6):



Obr. 55. Osa dvou mimoběžek.

$$XY^2 = (X - Y)(X - Y) =$$
$$= (P - Q)(P - Q) + (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})\,.$$

Tento výraz je zřejmě nejmenší právě tehdy, jestliže $\alpha = \beta = 0$, čili $X = P$, $Y = Q$.

A nyní přikročíme k řešení dané úlohy: Osa mimoběžek je nutně rovnoběžná s jednotkovým vektorem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\,.$$

Hledaná vzdálenost $d = PQ$ je zřejmě rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $B - A$ na osu mimoběžek. Podle (3.27) je tedy $d = |\mathbf{n}(B - A)|$ a dosazení za $\mathbf{n}$ vede na tvar

$$d = \frac{|(B - A)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\,. \tag{3.28}$$

V našem konkrétním případě $B - A = (0, 5, -1)$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, 2, 1)$, $(B - A)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 9$, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$. Podle (3.28) pak $d = 3$.

Jiný způsob řešení dané úlohy. Zřejmě existují čísla α, β tak, že $P = A + \alpha\mathbf{u}$, $Q = B + \beta\mathbf{v}$. Vektor $P - Q$ musí být kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, to znamená, že musí platit

$$\begin{aligned}(A - B + \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})\mathbf{u} &= 0\,,\\ (A - B + \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})\mathbf{v} &= 0\,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

V případě, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé (vektory mimoběžek mají vždy tuto vlastnost), má soustava (3.29) jediné řešení. Existuje tedy jediná dvojice čísel α, β, s jejíž pomocí určíme body P, Q. Stanovit velikost vektoru $P - Q$ umíme již dávno. Tento způsob je sice delší, má však tu výhodu, že umožňuje okamžitý zápis rovnice osy.

3.11. Smíšený součin vektorů

Ve vztahu (3.28) se objevil současně jak skalární, tak vektorový součin. Výraz

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{3.30}$$

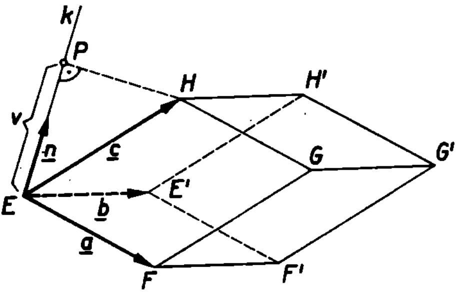
nazýváme *smíšeným součinem vektorů* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a označujeme $(\mathbf{abc})$. Je zřejmé, že smíšený součin vektorů je číslo. Smíšený součin je závislý na pořadí vektorů. Je jen otázkou trpělivosti ověřit si, že

$$(\mathbf{abc}) = -(\mathbf{acb}) = (\mathbf{cab}) = -(\mathbf{cba}) = (\mathbf{bca}) = -(\mathbf{bac})\,;$$

výměna dvou vektorů má tedy vždy za následek změnu znaménka smíšeného součinu.

Ukážeme si pěknou geometrickou interpretaci smíšeného součinu.

Věta 3.16. *Je dán rovnoběžnostěn* $EFGHE'F'G'H'$ (obr. 56). *Označíme-li* $\mathbf{a} = F - E$, $\mathbf{b} = E' - E$, $\mathbf{c} = H - E$, *pak objem* V *rovnoběžnostěnu je dán vzorcem*



Obr. 56. Geometrický význam smíšeného součinu.

$$V = |(\mathbf{abc})| . \tag{3.31}$$

D ů k a z. Poznamenejme nejprve toto: Jsou-li dány tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, existuje vždy rovnoběžnostěn shora uvedených vlastností. Smíšený součin tří lineárně nezávislých vektorů je podle věty 3.16 vždy, až snad na znaménko, objem jistého rovnoběžnostěnu, který umíme sestrojit.

A nyní k důkazu věty (obr. 56). Je-li v vzdálenost rovin EFF', HGG', pro objem V máme podle (3.26)

$$V = v|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| . \tag{3.32}$$

Označme k přímku kolmou k rovině EFF'. Jak víme, jednotkový směrový vektor $\mathbf{n}$ přímky k je dán vztahem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Výška v je pak dána velikostí kolmého průmětu vektoru $\mathbf{c}$ na přímku k; podle (2.27) tedy

$$v = |\mathbf{cn}| = \frac{|\mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Dosadíme-li za v do (3.32), máme po krácení ihned (3.31).

Příklad 3.16. Stanovte objem rovnoběžnostěnu, určeného vektory $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 0, 0)$.

Řešení: Určíme nejprve vektorový součin $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, -3, 3).$$

Tedy $V = |\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(1, 2, 1)(0, -3, 3)| = 3$.

Zkuste dokázat, že smíšený součin vektorů je roven nule právě tehdy, když tyto vektory jsou komplanární.

3.12. Některé vlastnosti vektorového a smíšeného součinu

V různých aplikacích vektorového počtu užíváme často komplikovanějších vzorců. Se třemi z nich se nyní seznámíme.

Věta 3.17. *Nechť jsou* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *čtyři libovolné vektory. Potom platí*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}, \qquad (3.34)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}\,, \tag{3.35}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d}\,. \tag{3.36}$$

Důkaz. 1. Podle definice je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\quad a_3b_1 - a_1b_3,\quad a_1b_2 - a_2b_1)\,,$$
$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = (c_2d_3 - c_3d_2,\quad c_3d_1 - c_1d_3,\quad c_1d_2 - c_2d_1)\,.$$

Odtud tedy plyne, že

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + \\ + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)\,. \\ .\,(c_1d_2 - c_2d_1)\,.$$

Pravou stranu rovnosti (3.34) můžeme upravit takto:

$$(\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}) = \\ = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,.\,(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + \\ + (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)\,.\,(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3d_3)\,.$$

Po provedeném násobení pravých stran obou posledních rovností se přesvědčíme o správnosti vzorce (3.34).

2. Zvolme si libovolný vektor $\mathbf{u}$. Použijeme-li vzorců (3.30) a (3.34), můžeme psát

$$\mathbf{u}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = (\mathbf{ua}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = ((\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,\mathbf{ua}) = \\ = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{bu})(\mathbf{ca}) - (\mathbf{ba})(\mathbf{cu}) = \\ = \mathbf{u}[(\mathbf{ac})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}]\,.$$

Z poslední rovnosti platné pro každou volbu vektoru $\mathbf{u}$ plyne (3.35).

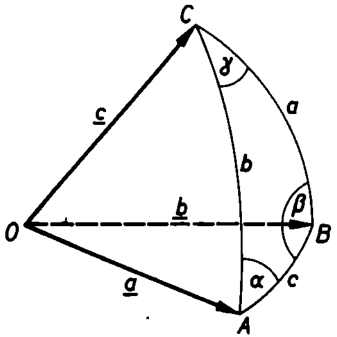
3. Jestliže v rovnosti (3.35) nahradíme vektor $\mathbf{a}$ vektorem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektorem $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$, dostáváme po jednoduché úpravě rovnost (3.36). Tím je věta dokázána.

Jestliže položíme ve vzorci (3.34) $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{u}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \mathbf{v}$, odvodíme snadno vzorec (3.26), který známe již z odstavce 3.9 o vektorovém součinu.

3.13. Základní věty sférické trigonometrie

V tomto odstavci si ukážeme jednu významnou aplikaci vektorového počtu. Pomocí vzorců (3.34) a (3.36) odvodíme základní věty sférické trigonometrie, větu sinovou a dvě věty kosinové.

Zvolme si v prostoru E_3 čtyři body O, A, B, C tak, aby neležely v jedné rovině a aby vektory $\mathbf{a} = A - O$, $\mathbf{b} = B - O$, $\mathbf{c} = C - O$ byly jednotkové. Polopřímky OA, OB, OC tvoří tzv. *trojhran* a na jednotkové kouli opsané ze středu O určují tzv. *sférický trojúhelník* ABC (obr. 57).



Obr. 57. Sférický trojúhelník.

Zaveďme následující označení pro velikosti úhlu dvou vektorů:

$$a = \measuredangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad b = \measuredangle(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad c = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{3.37}$$

$$\alpha = \sphericalangle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}), \quad \beta = \sphericalangle(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}),$$
$$\gamma = \sphericalangle(\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{b}). \tag{3.38}$$

Uvážíme-li, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou jednotkové, plynou z uvedených označení tyto rovnosti:

$$\cos a = \mathbf{bc}, \quad \cos b = \mathbf{ca}, \quad \cos c = \mathbf{ab}, \tag{3.39}$$

$$\sin a = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, \quad \sin b = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|,$$
$$\sin c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \tag{3.40}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{c})},$$
$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\mathbf{b} \times \mathbf{a}|}, \tag{3.41}$$
$$\cos \gamma = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{c} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|\,|\mathbf{c} \times \mathbf{b}|}.$$

Otevřeli jsme si tak cestu k odvození věty sinové. Vyjdeme z rovnosti (3.36), která má v případě $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ následující tvar

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{abc})\,\mathbf{a}.$$

Odtud a ze vzorců (3.38) a (3.40) plyne, že

$$|(\mathbf{abc})| = \sin c \sin b \sin \alpha.$$

Cyklickou záměnou získáme další rovnosti

$$|(\mathbf{bca})| = \sin a \sin c \sin \beta,$$
$$|(\mathbf{cab})| = \sin b \sin a \sin \gamma.$$

Podle (3.32) jsou levé strany posledních tří rovností stejně velké. Můžeme proto psát

$$\sin c \sin b \sin \alpha = \sin a \sin c \sin \beta = \\ = \sin b \sin a \sin \gamma .$$

Odtud okamžitě vyplývá rovnost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}, \tag{3.42}$$

která má ve sférické trigonometrii název *sinová věta.*

Stejně snadno odvodíme tzv. 1. kosinovou větu. Rovnost (3.34) má v případě $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ tvar

$$\mathbf{bc} = (\mathbf{ab})(\mathbf{ac}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) .$$

Odtud a ze vzorců (3.39) a (3.41) okamžitě máme rovnost

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha ,$$

která má ve sférické trigonometrii název 1. *kosinová věta.*

Další úvaha je poněkud komplikovanější. K danému trojhranu sestrojme tzv. *polární trojhran.* Jeho polopřímky vycházejí opět z bodu O a jsou rovnoběžné s jednotkovými vektory

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|}, \\ \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}. \tag{3.44}$$

Podobně jako v (3.37) a (3.38) zaveďme i pro polární trojhran veličiny a', b', c', α', β', γ'. Vypočtěme první z těchto veličin. Užijeme-li postupně rovností (3.44), (3.41), můžeme psát

$$\cos a' = \mathbf{b}'\mathbf{c}' = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} =$$
$$= \frac{-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|} = -\cos \alpha\,.$$

Jsou tedy úhly a', α výplňkové a tedy: $a' + \alpha = \pi$. Stejně snadno se přesvědčíme o správnosti vzorců

$$\begin{aligned} a' + \alpha = \pi\,, \quad b' + \beta = \pi\,, \quad c' + \gamma = \pi\,, \\ \alpha' + a = \pi\,, \quad \beta' + b = \pi\,, \quad \gamma' + c = \pi\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Užijeme-li kosinovou větu (3.43) na polární trojhran a použijeme-li dále k úpravě vzorce (3.45), dostáváme rovnost

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a\,,$$

která má ve sférické trigonometrii název 2. *kosinová věta.*

Končíme naši malou exkurzi. Věty, které jsme odvodili, tvoří základ sférické trigonometrie. Z nich lze snadno odvodit pro případ pravoúhlého sférického trojúhelníka (např. $\gamma = \frac{1}{2}\pi$) tzv. *Napierova pravidla.* Toto odvození a další podobné úvahy nalezne čtenář, pokud bude mít zájem, v každé solidní učebnici sférické trigonometrie (viz velmi pěknou knížku J. Kůsta *Sférická trigonometrie*).

Cvičení

3.1. Jak je definován skalární, vektorový a smíšený součin vektorů? Jaké je vyjádření těchto součinů v kartézské soustavě souřadnic? Jaká je jejich geometrická interpretace?

3.2. Určete odchylku φ, vektorů $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, víte-li že $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ jsou dva jednotkové vzájemně kolmé vektory.

3.3. Co lze říci o čtyřúhelníku $ABCD$, v němž $A = [1, 0, 0]$, $B = [2, 3, -4]$, $C = [2, 6, 0]$, $D = [3, 3, 4]$?

3.4. Určete průsečík P kolmice vedené bodem $M = [4, 6, -1]$ na rovinu $2x + 3y - z + 1 = 0$.

3.5. Určete průsečík P kolmice vedené bodem $M = [1, -7, 9]$ na rovinu, která je dána vektorovou rovnicí
$X = [3, 2, 2] + \alpha\,(2, 1, 1) + \beta\,(0, 2, 2)$.

3.6. Určete kolmý průmět P bodu $A = [0, 2, 0]$ na přímku BC, $B = [3, 3, 1]$, $C = [4, 5, 2]$.

3.7. Vypočtěte vzdálenost bodu $A = [3, 4, 2]$ od přímky, která prochází body $B = [2, 5, 2]$ a $C = [3, 2, 1]$.

3.8. Vypočtěte vzdálenost bodu $A = [1, 3, -1]$ od roviny dané rovnicí $x + 2y - 2z = 0$.

3.9. Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin určených rovnicemi

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z \phantom{{}-17} &= 0\,, \\ 6x + 4y + 4z - 17 &= 0\,. \end{aligned}$$

3.10. Vypočtěte vzdálenost přímek, které jsou dány rovnicemi

$X = [0, 0, 0] + \alpha\,(-2, 1, 2)$;
$Y = [0, 1, 1] + \beta\,(-1, 2, 1)$.

3.11. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $A = [5, -3, 2]$ a je kolmá k průsečnici rovin

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z - 5 &= 0\,, \\ 5x - 4y + z - 7 &= 0\,. \end{aligned}$$

3.12. Vypočtěte odchylku rovin $y + z - 3 = 0$,
$-2x + y + 2z = 0$.

3.13. Souřadnicovou osou x proložte rovinu, která svírá s rovinou $\sqrt{5}x - 2y - z + 2 = 0$ úhel o velikosti $\pi/3$.

3.14. Napište rovnici roviny, která prochází body $A = [0, 0, -5]$, $B = [2, 0, 0]$ a je kolmá k rovině
$$2x + y + 5z - 2 = 0.$$

3.15. Určete odchylku přímky AB se souřadnicovými osami, jestliže $A = [2, 6, -2]$, $B = [-1, 2, 3]$.

3.16. Vypočtěte odchylku přímek daných rovnicemi:
$$p \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ -x + 2y + 3z + 2 = 0; \end{cases}$$
$$q \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ -2x + 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.17. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [0, -4, 3]$ a je rovnoběžná s průsečnicí rovin
$$x + y - 2z + 3 = 0\,,$$
$$-x + 2y + z + 3 = 0\,.$$

3.18. Vypočtěte vzdálenost bodu $M = [3, 2, -1]$ od přímky, která je dána rovnicí $X = A + \alpha\,\mathbf{u}$; $A = [1, -1, -2]$, $\mathbf{u} = (5, 3, 4)$. Výsledek zkontrolujte pomocí vzorce
$$d = \frac{|\mathbf{u} \times (M - A)|}{|\mathbf{u}|}\,,$$
jehož správnost dokažte!

3.19. Vypočtěte velikost úhlu, který svírá průsečnice rovin $2x + 3y = 0$, $3y - z = 0$ s rovinou $x + 2y + z = 0$.

3.20. Napište rovnici roviny, která prochází průsečnicí rovin $3x - y + 4z - 6 = 0$, $-x + 5y + z + 10 = 0$ a je kolmá k rovině $5x - y + 2z - 5 = 0$.

3.21. Napište rovnici roviny, která má vzdálenost $d = 4$ od roviny $x + 2y + 2z - 8 = 0$.

3.22. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC; $A = [5, 3, 4]$, $B = [2, 5, -2]$, $C = [-1, 0, 6]$.

3.23. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ mají odchylku $\frac{\pi}{4}$; $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 3$.

Vypočtěte obsah trojúhelníka sestrojeného nad vektory $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

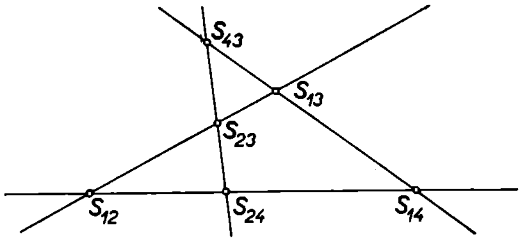
3.24. Je dán čtyřstěn $ABCD$; $A = [3, 1, 1]$, $B = [1, 4, 1]$, $C = [1, 1, 7]$, $D = [3, 4, 9]$. Určete a) objem čtyřstěnu, b) velikost jeho výšky procházející bodem D, c) odchylku stěn, které se protínají v hraně AB.

3.25. Jsou dány tři jednotkové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ takové, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$. Ukažte, že body A, $A + \mathbf{u}$, $A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Dále ukažte, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ svírají úhel velikosti $\frac{2}{3}\pi$.

3.26. Jestliže ve čtyřstěnu se všechny čtyři výšky protínají v jediném bodě (tzv. ortocentru), nazýváme čtyřstěn *ortocentrickým*. Dokažte větu: *V ortocentrickém čtyřstěnu jsou každé dvě protilehlé hrany na sebe kolmé.*

3.27. Dokažte větu: *Nejkratší příčka (tj. osa) každých dvou mimoběžných hran ortocentrického čtyřstěnu prochází ortocentrem čtyřstěnu.*

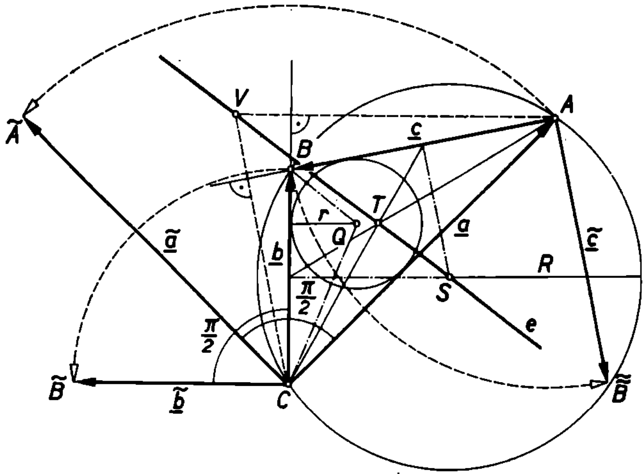
3.28. Jsou dány čtyři kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ různých středů i poloměrů. Pak pro každé dvě různé kulové plochy $\varkappa_i$, $\varkappa_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ existuje právě jeden vnější střed S_{ij} stejnolehlosti, v níž si obě kulové plochy odpovídají. Dokažte, že všechny středy S_{ij} leží v jedné rovině a v ní pak vytvářejí bodovou konfiguraci, která je znázorněna obrázkem 58.



Obr. 58. Ke cvičení 3.28.

3.29. Je dán trojúhelník ABC. Označme S střed kružnice opsané, T těžiště, V průsečík výšek, Q střed kružnice

vepsané, $\mathbf{a} = A - C$, $\mathbf{b} = B - C$, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ (viz obr. 59).
Dále označme R poloměr kružnice opsané, r poloměr kružnice vepsané, P plochu trojúhelníka a konečně $2s = a + b + c$. Otočme v kladném smyslu body A, B kolem bodu C o úhel $\frac{\pi}{2}$ do bodů $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ a označme $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{A} - C$; $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{B} - C$. Nechť $\tilde{\mathbf{a}} . \mathbf{b} > 0$ (a tedy $P = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}} . \mathbf{b}$). Podobně sestrojte vektor $\tilde{\mathbf{c}}$ (viz obrázek 59).



Obr. 59. Ke cvičení 3.29.

Ukažte, že

$$S = C + \frac{b^2\tilde{\mathbf{a}} - a^2\tilde{\mathbf{b}}}{4P}; \quad T = C + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3},$$

$$V = C - \frac{ab}{2P}\tilde{\mathbf{c}}; \quad Q = C + \frac{a\mathbf{b} + b\mathbf{a}}{2s},$$

$$R = \frac{abc}{4P} \; ; \quad r = \frac{P}{s} \, .$$

3.30. V roce 1905 dokázal Josef Langr následující větu: Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka ABC jakožto nad základnami rovnoramenné trojúhelníky ABC', BCA', CAB', které mají při vrcholech A', B', C' shodné úhly o velikostech $2\pi/3$ (všechny rovnoramenné trojúhelníky sestrojíme vně trojúhelníka ABC nebo obráceně), pak trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Pokuste se o důkaz pomocí vektorů.

3.31. Na výškách trojúhelníka ABC sestrojme po řadě body A', B', C' tak, aby bylo

$$\frac{AA'}{BC} = \frac{BB'}{CA} = \frac{CC'}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

a aby všechny polopřímky AA', BB', CC' buď protínaly, nebo neprotínaly příslušné protější strany trojúhelníka. Potom trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte!