Vektory v geometrii

2. kapitola. Afinní geometrie

In: Bruno Budinský (author); Stanislav Šmakal (author); Jan Volejník (illustrator): Vektory v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1971. pp. 25–81.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403734

2. kapitola

AFINNÍ GEOMETRIE

Úvahy této kapitoly se budou opírat o euklidovský prostor E_3, případně o euklidovskou rovinu E_2. Obsah pojmu afinní geometrie jsme si ujasnili už v 1. kapitole. Budeme proto „ignorovat" úlohy, které se neobejdou bez metrických pojmů „vzdálenost dvou bodů" a „velikost úhlu". Předmětem našeho zájmu bude tedy pouze vzájemná poloha geometrických objektů z hlediska incidence, uspořádání a rovnoběžnosti; v této souvislosti mluvíme také o geometrii polohy. Způsob studia těchto otázek může být samozřejmě různý, naše metoda bude založena na vektorovém počtu; seznámení s vektorovým počtem bude náš první úkol.

2.1 Pojem vektoru

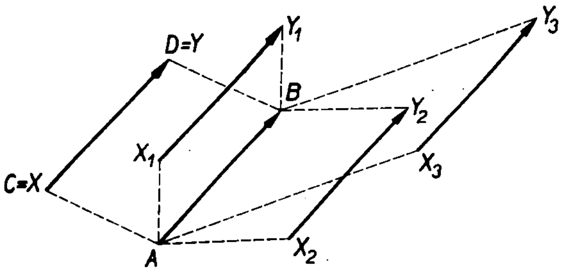
Nejdůležitějším bodem tohoto odstavce je definice 2.4; pro naše účely bude však prospěšné názornější hledisko.

Definice 2.1. Jsou-li A, B dva libovolné body prostoru E_3, pak uspořádanou dvojici (A, B) nazveme *vázaným vektorem* v E_3 a označíme $\overrightarrow{AB}$. Bodu A říkáme *počáteční*, bodu B *koncový* bod vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$; je-li $A = B$, pak vázaný vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ nazveme *nulovým* vázaným vektorem v bodě A, není-li $A = B$, pak $\overrightarrow{AB}$ je tzv. *nenulový* vázaný vektor.

Pro názornost budeme naše úvahy doprovázet obrázky. Nenulové vázané vektory znázorníme úsečkou, opatřenou šipkou v koncovém bodě.

Definice 2.2. Jestliže $A = C'$, $B = D'$, pak píšeme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ a vázané vektory nazýváme *totožnými*.

Definice 2.3. Nechť $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou dva vázané vektory v E_3; je-li možno jediným rovnoběžným posunutím dosáhnout, aby platilo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'}$, kde C', D' jsou v daném posunutí obrazy bodů C, D, pak říkáme, že vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou *ekvipolentní* a píšeme $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (obr. 10).



Obr. 10. Vázané vektory, ekvipolentní s vázaným vektorem $\overrightarrow{AB}$.

Je dobré si hned uvědomit, že ve smyslu poslední definice je každý vázaný vektor, který je ekvipolentní s nulovým vázaným vektorem, rovněž nulový vázaný vektor.

Zavedené pojmy nám již dovolují přikročit k definici vektoru.

Definice 2.4. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je libovolný vázaný vektor v E_3; množinu všech vázaných vektorů $\overrightarrow{XY}$, pro které platí $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$, nazýváme *vektorem* v E_3.

Vektory budeme značit malými tučnými písmeny $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ apod.; označíme-li vektor, zavedený definicí 2.4, třeba $\mathbf{u}$, pak vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ bývá často nazýván *reprezentantem* nebo též *umístěním* vektoru $\mathbf{u}$. Řekneme-li „vektor $\mathbf{u}$ je umístěn v bodě A“, bude to znamenat, že příslušný vázaný vektor má počáteční bod v bodě A. Vektor, který je reprezentován vázaným vektorem $\overrightarrow{AA}$, budeme přirozeně nazývat *nulovým* vektorem a značit vždy $\mathbf{o}$. V literatuře bývají někdy vektory nazývány volnými vektory. Zavedená označení budeme důsledně dodržovat; definici 2.4 můžeme stručně psát ve tvaru

$$\mathbf{u} = \{\overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}\,.$$

Vraťme se ještě na chvíli k obr. 10. Dá se ukázat (a z názoru je to patrné), že reprezentantem vektoru $\mathbf{u}$ může být kterýkoliv vázaný vektor $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$. Ze základních vlastností rovnoběžného posunutí v E_3 plyne, že pro vázané vektory platí:

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (vztah reflexivní),
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (vztah symetrie),
3. $(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$
   (vztah tranzitivní).

To znamená, že ekvipolence vektorů je ekvivalencí ve smyslu odstavce 1.3. Množiny všech navzájem ekvipolentních vázaných vektorů tvoří proto disjunktní rozklad. Libovolnou třídu tohoto rozkladu (tj. vektor) lze reprezentovat podle odst. 1.3 libovolným prvkem.

Pojem vektoru si přiblížíme na případu racionálního čísla. Každý zlomek množiny

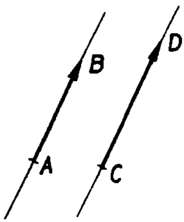
$$M = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{2000}{5000}, \ldots\right\}$$

vyjadřuje totéž racionální číslo. Protože každý prvek z M toto racionální číslo určuje jednoznačně, dá se říci, že každý prvek z M je reprezentantem daného racionálního čísla. Je přitom lhostejné, který zlomek množiny M za reprezentanta zvolíme. Racionální číslo je tedy v jistém smyslu pěknou analogií vektoru (volného), každý zlomek z množiny M je pak analogií reprezentanta vektoru.

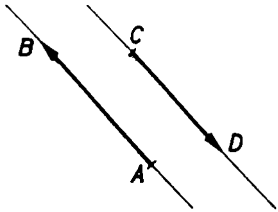
Dále bude účelné zavést některá samozřejmá označení. Předpokládejme, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou dva nenulové vektory, $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jejich umístění.

a) Řekneme, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou si rovny a píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, jestliže $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

b) Prohlásíme, že nenulové vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou *rovnoběžné* a píšeme $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, je-li přímka AB rovnoběžná s přímkou CD. Mohou zde ovšem nastat dva případy. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazveme *souhlasně* rovnoběžné, jsou-li souhlasně



Obr. 11a. Dva souhlasně rovnoběžné vektory.



Obr. 11b. Dva nesouhlasně rovnoběžné vektory.

rovnoběžné polopřímky AB a CD (obr. 11a); jestliže polopřímky AB, CD jsou *nesouhlasně* rovnoběžné, prohlásíme totéž o vektorech **u**, **v** (obr. 11b).

Poznamenejme na závěr, že rovnost a rovnoběžnost vektorů je nezávislá na výběru reprezentanta; to si čtenář snadno promyslí sám.

2.2. Souřadnice vektoru

Jak napovídá název odstavce, přiřadíme každému vektoru jistým způsobem čísla, která nazveme souřadnicemi vektoru. Použití souřadnic nám umožňuje převádět problémy geometrické na algebraické (tj. početní), výsledky algebraických operací pak interpretujeme geometricky. Tomuto způsobu studia geometrických objektů a vztahů mezi nimi říkáme analytická metoda v geometrii.

Zavedení souřadnic by se mohlo zdát předčasné, neboť celou řadu problémů z afinní geometrie lze řešit vektorově bez použití souřadnic. Řešení každé úlohy bez souřadnic za každou cenu by ovšem bylo příliš samoúčelné a ne vždy snadné; čtenář se však brzy přesvědčí, že v některých případech je to způsob velmi elegantní a efektivní, neboť má ještě jednu důležitou přednost — je totiž předem jasné, že dosažený výsledek nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Odborně říkáme, že taková vlastnost geometrického útvaru je *invariantní* vůči transformaci souřadnic. Budeme proto používat obou zmíněných metod, vždy té, která se ukáže v daném případě vhodnější.

Aby se čtenář mohl s plným porozuměním věnovat dalším řádkům, doporučujeme mu, aby se znovu vrátil k odstavci 1.5.

Předpokládejme nyní, že v E_3 je dána libovolná afinní soustava souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$; pro začátek stačí představa, že výchozí soustava souřadnic je kartézská.

Nechť $\overrightarrow{AB}$ je vázaný vektor v E_3, označme $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ a vypočítejme tato tři čísla:

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad b_3 - a_3. \tag{2.1}$$

Zvolme v E_3 další vázaný vektor $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, označme zcela obdobně $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$ a utvořme opět čísla

$$d_1 - c_1, \quad d_2 - c_2, \quad d_3 - c_3; \tag{2.2}$$

ukážeme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= d_1 - c_1, \\ b_2 - a_2 &= d_2 - c_2, \\ b_3 - a_3 &= d_3 - c_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Víme, že pro střed $S = [s_1, s_2, s_3]$ nějaké úsečky XY platí

$$s_i = \frac{x_i + y_i}{2}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou ekvipolentní, proto úsečka AD má nutně týž střed S jako úsečka BC; máme tedy (obr. 12):

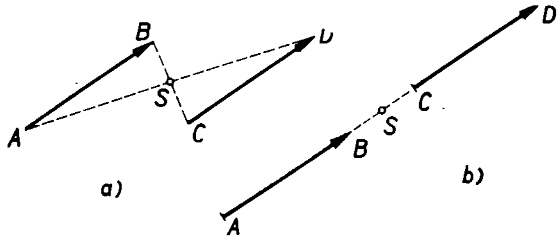
$$s_i = \frac{b_i + c_i}{2} = \frac{a_i + d_i}{2}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Rovnost (2.4) představuje tři rovnosti mezi souřadnicemi se stejným indexem, a plyne z ní, že

$$b_i - a_i = d_i - c_i; \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Rovnosti (2.5) jsou však jen stručnějším zápisem rovností (2.3).

A nyní obráceně: Předpokládejme, že pro dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ platí rovnosti (2.3); pak ovšem platí i rovnost (2.4) a úsečky AD, BC mají týž střed. Tím je dokázáno:



Obr. 12. Dva ekvipolentní vázané vektory.

Věta 2.1. *Dva vázané vektory* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{CD}$ *jsou ekvipolentní právě tehdy, jestliže platí rovnosti* (2.3).

Uvedená věta má pro nás zásadní důležitost, neboť nám umožňuje zavést souřadnice vektoru. Vektor $\mathbf{u}$, jak víme, je množina všech navzájem ekvipolentních vázaných vektorů. Tyto vázané vektory mají všechny společnou vlastnost; každému z nich lze totiž přiřadit tři pevná čísla a tato uspořádaná trojice je stejná při každém umístění vektoru $\mathbf{u}$. Má proto smysl říci:

Definice 2.5. Je-li vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak čísla

$$u_1 = b_1 - a_1, \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad u_3 = b_3 - a_3 \quad (2.6)$$

nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{u}$ a píšeme

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)\,, \tag{2.7}$$

nebo také

$$\mathbf{u} = B - A\,. \tag{2.8}$$

Souřadnice vektoru budeme psát v oblých závorkách, abychom i formálně odlišili vektory a body, u nichž používáme závorek hranatých.

Čtenáři je jistě známo, že každému bodu v prostoru E_3 lze přiřadit jedinou uspořádanou trojici čísel a každá uspořádaná trojice čísel nám určuje jediný bod v E_3. Stejnou otázku si musíme přirozeně položit i v případě daného vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Že každému vektoru lze přiřadit jedinou trojici čísel, bylo již řečeno; nyní tedy obráceně: je-li dána trojice čísel u_1, u_2, u_3 v uvedeném pořadí, pak existuje jediný bod $U = [u_1, u_2, u_3]$ a vázaný vektor $\overrightarrow{OU}$ je zřejmě umístěním vektoru $\mathbf{u} = U - O$. Vektor $\mathbf{u}$ tedy existuje, a to jediný podle věty 2.1. Čtenář si jistě snadno dokáže, že všechny souřadnice nulového vektoru jsou rovny nule.

Dále si čtenář snadno dokáže, že rovnost dvou vektorů nastává právě tehdy, jestliže jsou si rovny odpovídající souřadnice obou vektorů. Tento fakt můžeme též zapsat tímto způsobem:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i = v_i\ (i = 1, 2, 3)\,.$$

Všimněme si ještě jednou rozdílu v označení $\overrightarrow{AB}$, $B - A$; prvé znamená vázaný vektor, druhé vektor, jehož umístěním je $\overrightarrow{AB}$. Tedy každými dvěma body A, B je určen jednoznačně vektor $B - A$. Dohodneme se, že tento vektor budeme nazývat rozdílem bodů B, A. Touto úmluvou jsme tedy zavedli operaci, *rozdíl dvou* *bodů*; výsledkem této operace je vektor. Heslovitě, i když méně přesně, můžeme též říci: „Bod minus bod rovná se vektor.“ Důležité pro praktické výpočty je, že pro vektor $B - A$ platí $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, o čemž se snadno přesvědčíte na základě (2.6) a (2.8).

Rovnost $\mathbf{u} = B - A$ je tedy ekvivalentní se soustavou rovností

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1, \\ u_2 &= b_2 - a_2, \\ u_3 &= b_3 - a_3; \end{aligned} \tag{2.10}$$

rovnice $\mathbf{u} = B - A$ znamená proto formální zápis tří rovnic (v souřadnicích). Podobně můžeme zapsat ostatně také střed úsečky AB

$$S = \frac{A + B}{2} . \tag{2.11}$$

Čtenář se jistě ptá, zda zavedeme obecně také součet dvou bodů. K této otázce se ještě vrátíme, řekněme si však již nyní, že pojem součet dvou bodů nemá pro studium geometrických útvarů význam, i když (2.11) kupodivu smysl má, o tom však později.

2.3. Součet bodu a vektoru

Nic nám nebrání, abychom rovnosti (2.10) psali ve tvaru $a_i + u_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. To je ovšem stejné, jako když ekvivalentní rovnost (2.8) píšeme ve formě

$$A + \mathbf{u} = B ; \tag{2.12}$$

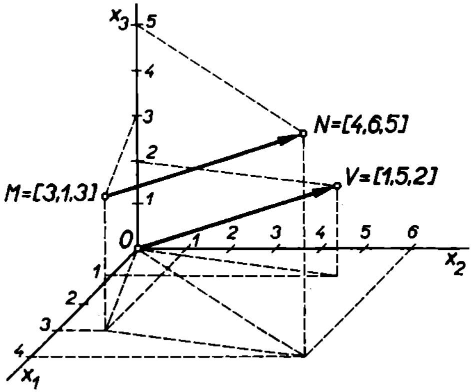
rovnost (2.12) nám říká: Jestliže k souřadnicím bodu A přičteme odpovídající souřadnice vektoru $\mathbf{u}$, obdržíme souřadnice bodu B. Heslovitě také říkáme, že bod plus vektor dává bod. Připomeňme si, že $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\mathbf{u}$. Jsme tedy vedeni k této definici:

Definice 2.6. Umístěme počáteční bod nějakého vektoru $\mathbf{u}$ do bodu A a koncový bod takto umístěného vektoru označme B; bod B pak nazveme *součtem* bodu A s vektorem $\mathbf{u}$ a píšeme (2.12).

I když nejde o složitý pojem, ilustrativní příklad nám jistě neublíží.

Příklad 2.1. Je dán bod $M = [3, 1, 3]$ a vektor $\mathbf{v} = (1, 5, 2)$. Sestrojte bod $N = M + \mathbf{v}$ a nakreslete příslušný obrázek.

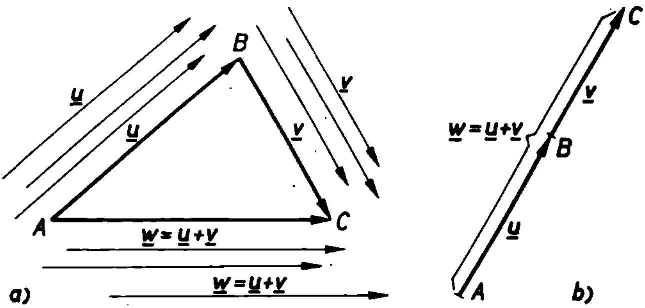
Řešení. Platí: $N = M + \mathbf{v} = [3, 1, 3] + (1, 5, 2) = [4, 6, 5]$; konstrukce je na obr. 13.



Obr. 13. Grafický součet [3, 1, 3] + (1, 5, 2).

2.4. Součet vektorů

Definice 2.7. Mějme dva libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a nechť $\overrightarrow{AB}$ je nějaké umístění vektoru $\mathbf{u}$; vektor $\mathbf{v}$ umístíme do bodu B, koncový bod označíme C. Dále označme $\mathbf{w}$ vektor, jehož umístěním je $\overrightarrow{AC}$ (obr. 14).



Obr. 14. Součet dvou vektorů.

Vektor $\mathbf{w}$ nazýváme *součtem* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a píšeme

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\,. \tag{2.13}$$

Z uvedené definice při zachování zavedených označení plyne, že

$$\mathbf{w} = C - A = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)\,,$$

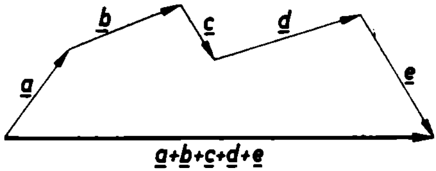
neboli

$$\mathbf{w} = (c_1 - b_1 + b_1 - a_1,\ c_2 - b_2 + b_2 - a_2,\ c_3 - b_3 + b_3 - a_3)\,;$$

potom však platí

$$\mathbf{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\,.$$

ciativního vztahu je možnost vypuštění závorek při součtu vektorů; budeme proto psát stručně $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ atp. (Důkazovou cestou pro větší počet sčítanců by zde byla matematická indukce.) Na obr. 15 je znázorněn součet vektorů $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}$; výsledný vektor (silně vytažený) je jednoznačně stanoven, ať provedeme uzávorkování jakkoliv.



Obr. 15. Grafický součet $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}$.

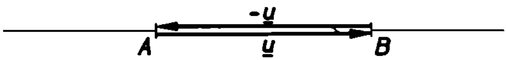
$\mathscr{A}_3$) Důkaz je zřejmý:

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) = \mathbf{u} .$$

$\mathscr{A}_4$) K danému vektoru $\mathbf{u}$ hledáme takový vektor $\mathbf{x}$, aby platilo

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{o} ;$$

tato rovnice rozepsaná po složkách (tj. souřadnicích) však platí právě tehdy, jestliže $\mathbf{x} = (-u_1, -u_2, -u_3)$. Označme $\mathbf{x} = -\mathbf{u}$ a důkaz je ukončen. Dodejme pouze, že vektor $-\mathbf{u}$ nazýváme opačným vektorem k vektoru $\mathbf{u}$; jestliže $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak zřejmě $\overrightarrow{BA}$ je umístěním vektoru $-\mathbf{u}$ (obr. 16).



Obr. 16. Vektory opačné.

Na závěr uveďme důležitou rovnost

$$(A + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

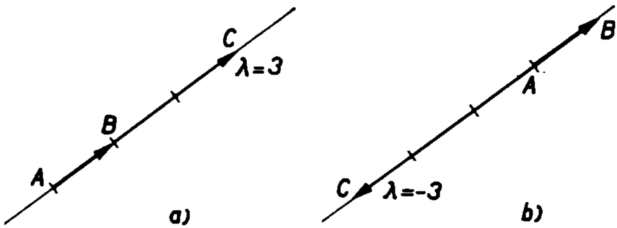
kterou si čtenář snadno odvodí sám.

2.5. Součin vektoru s reálným číslem

Definice 2.8. Nechť je $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$ a λ reálné číslo. Jestliže $\lambda = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak součinem $\lambda\mathbf{u}$ rozumíme nulový vektor $\mathbf{o}$; je-li $\lambda \neq 0$ i $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, sestrojíme na přímce AB bod C tak, aby pro úsečky AB, AC platil vztah

$$AC = |\lambda|\, AB\,, \tag{2.15}$$

přičemž pro $\lambda > 0$ naneseme bod C na polopřímku AB, pro $\lambda < 0$ na polopřímku k ní opačnou, a součinem $\lambda\mathbf{u}$ rozumíme pak vektor, který má umístění $\overrightarrow{AC}$ (obr. 17).



Obr. 17. Vektor $\lambda\mathbf{u}$ a) $\lambda = 3$; b) $\lambda = -3$.

POZNÁMKA 2.1. Na začátku kapitoly jsme řekli, že „zapomeneme" na slovo vzdálenost. Rozsah naší knížky nedovoluje zacházet do detailů, konstatujme však aspoň, že konstrukce bodu C v definici 2.8 je nezávislá na volbě výchozí jednotkové úsečky na přímce AB, zůstáváme

Dokázali jsme tedy:

Věta 2.2. *Jsou-li* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *dva libovolné vektory v* E_3, *pak platí*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) . \tag{2.14}$$

Součtem vektorů je tedy opět vektor, jehož souřadnice určíme podle (2.14). V definici součtu dvou vektorů hrál zdánlivě důležitou roli bod A, do něhož jsme umístili vektor $\mathbf{u}$, z věty 2.2 však mimo jiné plyne, že na volbě bodu A vůbec nezáleží; jeho souřadnice se v (2.14) totiž neobjevují.

Pro součet vektorů si nyní odvodíme čtyři důležité věty.

Věta 2.3. *Nechť* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *jsou tři libovolné vektory v* E_3. *Pak platí*

$\mathscr{A}_1$) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(vztah komutativní)*,

$\mathscr{A}_2$) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(vztah asociativní)*,

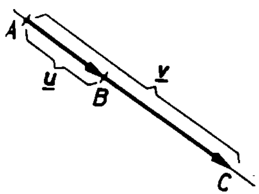
$\mathscr{A}_3$) $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$.

$\mathscr{A}_4$) *Ke každému vektoru* $\mathbf{u}$ *existuje vektor* $-\mathbf{u}$ *tak, že platí* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

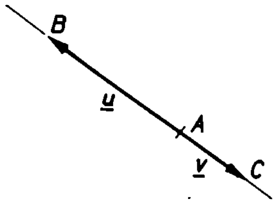
Důkaz. $\mathscr{A}_1$) Komutativní vztah platí, jak víme, pro součet reálných čísel; můžeme tedy psát $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Důkaz lze ovšem vést také bez souřadnic, podkladem tohoto postupu jsou známé vlastnosti rovnoběžníka, nevýhoda spočívá v tom, že je třeba uvážit zvláštní případy $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ atp.

$\mathscr{A}_2$) Asociativní vztah platí pro reálná čísla, stačí tedy od vektorů přejít k souřadnicím podle (2.14) a máme požadovanou rovnost $\mathscr{A}_2$ pro vektory. Důsledkem asotedy stále na půdě afinní geometrie. Ostatně konstrukci bodu C lze provést také tím způsobem, že na přímce AB sestrojíme bod C tak, aby pro dělicí poměr (CBA) platilo $(CBA) = \lambda$. Snadno se také přesvědčíte, že definice je nezávislá na umístění vektoru $\mathbf{u}$.

V odstavci 2.1 jsme definovali rovnoběžnost vektorů. Jestliže $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ jsou umístění vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a body A, B, C leží na jedné přímce, pak $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$; na obr. 18a je zakreslen případ vektorů souhlasně rovnoběžných, na obr. 18b pak případ vektorů nesouhlasně rovnoběžných. Snadno si ověříme, že platí:



Obr. 18a.
Vektor $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$, $\mu > 0$.



Obr. 18b.
Vektor $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$, $\nu < 0$.

Věta 2.4. *Dva nenulové vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou souhlasně rovnoběžné právě tehdy, jestliže* $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$ a $\mu > 0$, *nesouhlasně rovnoběžné pak právě tehdy, jestliže* $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$ *a* $\nu < 0$.

Věta 2.5. *Budiž* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *libovolný vektor a* λ *reálné číslo. Pak platí*

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)\,. \tag{2.16}$$

D ů k a z věty 2.4 je snadný, na to stačí čtenář sám; solidní provedení důkazu věty 2.5 se opírá o řadu vět ze stereometrie a z hlediska cíle této knížky se spokojíme s tím, že uvedená věta platí.

Příklad 2.2. Dokažte, že vektory

a) $\mathbf{u} = (2, 3, -5)$, $\mathbf{v} = (6, 9, -15)$ jsou souhlasně rovnoběžné,

b) $\mathbf{u} = (-1, 0, 5)$, $\mathbf{v} = (10, 0, -50)$ jsou nesouhlasně rovnoběžné,

c) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, 10, -6)$ nejsou rovnoběžné.

Řešení. Podle vět 2.4 a 2.5 máme:

a) $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$, $\mu = 3$; b) $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$, $\nu = -10$; c) neexistuje pevné reálné číslo λ tak, aby platilo $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Zaveďme nyní další důležitý pojem.

Definice 2.9. Je-li jeden vektor násobkem jiného vektoru, potom říkáme, že tyto vektory jsou *kolineární* nebo také *lineárně závislé.*

Poslední definice — jako ostatně každá definice — zavádí nový pojem. Všimněme si tentokrát pozorněji, jaký je její obsah: Nulový vektor $\mathbf{o}$ je jistě kolineární s každým vektorem, neboť pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ platí rovnost $0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}$; jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ oba nenulové a kolineární, pak existuje $\lambda \neq 0$ tak, že $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, případně $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy rovnoběžné. Můžeme proto říci: *Dva vektory jsou kolineární právě tehdy, lze-li je umístit na jedné přímce* (linea je latinský název pro přímku). To nám dovoluje snadné řešení úlohy.

Příklad 2.3. Dokažte, že body $A = [1, 0, 2]$, $B = [3, 2, 4]$, $C = [6, 5, 7]$ leží na jedné přímce.

Řešení: Body A, B, C leží na jedné přímce, leží-li na téže přímce vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, což znamená, že vektory $B - A$ a $C - A$ jsou kolineární; to je však splněno, neboť $C - A = 2{,}5\,(B - A)$, jak se lze snadno přesvědčit. Místo vektorů $B - A$ a $C - A$ jsme mohli ovšem vzít dvojice vektorů $B - A$, $C - B$ nebo $C - A$, $C - B$.

Pro součin čísla s vektorem platí čtyři významné vztahy:

Věta 2.6. *Nechť α, β jsou dvě libovolná reálná čísla a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva nějaké vektory. Pak platí:*

$$
\begin{array}{ll}
\mathscr{B}_1) & 1 . \mathbf{u} = \mathbf{u}\,, \\
\mathscr{B}_2) & \alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\, \mathbf{u}\,, \\
\mathscr{B}_3) & (\alpha + \beta)\, \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}\,, \\
\mathscr{B}_4) & \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}\,.
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \textit{(vztahy distributivní)}
$$

Důkaz. $\mathscr{B}_1)$ $1 . \mathbf{u} = 1(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}\,.$

$\mathscr{B}_2)$ $\alpha(\beta \mathbf{u}) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) = (\alpha\beta)\, \mathbf{u}\,.$

Postup pro $\mathscr{B}_3)$ a $\mathscr{B}_4)$ je zcela obdobný, přenecháme jej proto čtenáři.

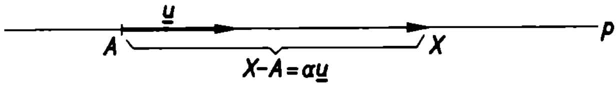
POZNÁMKA 2.2. Prozradíme předem, že $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_4$, $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$ nám poslouží v poslední kapitole k vybudování afinního prostoru. Za zmínku stojí, že ve větě 2.6 není uvedena tato snadno dokazatelná vlastnost: $-1 . \mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Z axiomatického hlediska by totiž byla přebytečná, neboť by představovala axiom odvoditelný ze vztahů $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_4$, $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$.

2.6. Přímka

Uvažujme množinu všech bodů X, které vyhovují rovnici

$$X = A + \alpha\mathbf{u}\,, \tag{2.17}$$

v níž α probíhá množinu všech reálných čísel. Ukážeme si, že rovnicí (2.17) je popsána přímka, která prochází bodem A. Vektor $\mathbf{u}$ je tzv. *směrový vektor* této přímky (obr. 19). Pravá strana rovnice (2.17) není totiž nic jiného, než součet bodu A s vektorem $\alpha\mathbf{u}$ (srv. odst. 2.3).



Obr. 19. K vektorové rovnici přímky.

Mysleme si, že všechny vektory $\alpha\mathbf{u}$ jsou umístěny v bodě A. Jestliže při umístění vektoru $\mathbf{u}$ do bodu A (počáteční bod) označíme jeho koncový bod B, pak pro $\alpha \geqq 0$ probíhá bod X polopřímku AB, pro $\alpha \leqq 0$ polopřímku opačnou k polopřímce AB (srv. definici pro násobení vektoru s číslem v odst. 2.5). Bod X leží tedy pro libovolné $\alpha \in (-\infty, \infty)$ na přímce AB; zvolíme-li obráceně bod X, který leží na přímce AB, pak z vlastnosti reálných čísel plyne, že existuje nějaké $\alpha \in (-\infty, \infty)$ tak, že platí $X - A = \alpha\mathbf{u}$ čili že platí (2.17). Rovnici (2.17) říkáme vektorová rovnice přímky. Připomínáme znovu, že (2.17) jsou vlastně tři rovnice mezi souřadnicemi.

Pro lepší pochopení vyřešíme dva jednoduché příklady.

Příklad 2.4. Je dána přímka AB, $A = [4, 3, 1]$, $B = [7, 4, 2]$. Určete souřadnice průsečíku P přímky AB s půdorysnou (tj. se souřadnicovou rovinou určenou osami x_1, x_2).

Řešení. Body A, B je určen směrový vektor naší přímky $\mathbf{u} = B - A = (3, 1, 1)$. Bod P přímky AB vyhovuje dle (2.17) rovnici

$$P = [4, 3, 1] + \alpha(3, 1, 1),$$

což rozepsáno po složkách vede na tři rovnice

$$\begin{aligned} p_1 &= 4 + 3\alpha, \\ p_2 &= 3 + \alpha, \\ 0 &= 1 + \alpha; \end{aligned}$$

třetí souřadnice bodu P je rovna nule, neboť tuto vlastnost má každý bod půdorysny. Z poslední rovnice tedy máme, že $\alpha = -1$ a dosadíme-li za α do zbývajících dvou, pak $P = [1, 2, 0]$.

Další příklad se bude týkat přímek, které leží v jedné rovině. Můžeme si docela dobře představovat, že danou rovinou je souřadnicová rovina (x_1, x_2). Pak ovšem je třetí souřadnice každého bodu nula a v důsledku toho má stejnou vlastnost také každý vektor. Nic se tedy nestane, budeme-li ji vynechávat, body i vektory budou popsány dvěma čísly, což je případ euklidovské roviny E_2.

POZNÁMKA 2.3. Jiný, dost nevýhodný postup, by spočíval v tom, že bychom všechny úvahy z E_3 zopakovali pro E_2. To by nebylo rozhodně účelné. Ani naše zaměření na E_3 není z obecného pohledu nejvhodnější, má však svůj metodický význam. Elegantní přístup vychází z tzv. n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a E_2 či E_3 se pak objeví jako speciální případy. Více si o tom povíme v kapitole 4.

Příklad 2.5. Určete průsečík P přímek AB a CD; $A = [5, 0]$, $B = [9, 2]$, $C = [4, -4]$, $D = [2, 2]$.

Řešení: Podle (2.17) můžeme bod P zapsat ve tvaru $P = A + \alpha(B - A)$ nebo $P = C + \beta(D - C)$. Z rovnosti levých stran plyne rovnost pravých stran rovnic, tedy

$$A + \alpha(B - A) = C + \beta(D - C)\,.$$

Po úpravě pak dostaneme

$$\alpha(B - A) + \beta(C - D) = C - A$$

a po přechodu k souřadnicím získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta &= -1\,, \\ 2\alpha - 6\beta &= -4\,, \end{aligned}$$

z nichž plyne, že $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Dosazením za α do výchozí rovnice zjistíme, že $P = [5, 0] - \frac{1}{2}(4,2) = [3, -1]$. Kontrolu správnosti můžeme provést dosazením za β do rovnice $P = C + \beta(D - C)$.

Rovnici (2.17) můžeme zajisté psát ve tvaru

$$X = A + \alpha(B - A)\,, \tag{2.18}$$

kde $A \neq B$ jsou určující body přímky. Jestliže rovnici (2.18) rozepíšeme po souřadnicích, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \alpha(b_1 - a_1)\,, \\ x_2 &= a_2 + \alpha(b_2 - a_2)\,, \\ x_3 &= a_3 + \alpha(b_3 - a_3)\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Soustavě (2.19) říkáme parametrické rovnice přímky. Ze soustavy (2.19) vytěžíme jeden závěr, a to, že rovnici (2.18) můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \alpha B - \alpha A\,,$$

neboli

$$X = (1 - \alpha)\,A + \alpha B\,; \tag{2.20}$$

rovnice (2.20) po rozepsání do souřadnic má smysl. A nyní pozor! Zmínili jsme se ke konci odst. 2.2, že nemá význam sčítání bodů (rozuměj po souřadnicích). Ať bychom totiž výsledek interpretovali jako vektor či bod, ukazuje se, že tento výsledek závisí vždy na volbě soustavy souřadnic. Sčítání v rovnici (2.20) však smysl má, neboť se dá ihned převést na součet bodu a vektoru a tato operace, jak víme, na zvolené soustavě souřadnic nezávisí. Pamatujme si tedy: Operace (2.20) nezávisí na tom, v jaké soustavě souřadnic pracujeme, pokud součet koeficientů u bodů A, B je roven 1. Jde ovšem o důsledek věty daleko obecnější.*)

Věta 2.7. *Budiž k libovolné přirozené číslo; zvolme $k + 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ a $k + 1$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ tak, aby jejich součet byl roven 1. Potom bod X, o němž platí*

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k + \alpha_{k+1} A_{k+1}\,, \tag{2,21}$$

je stanoven jednoznačně nezávisle na volbě soustavy souřadnic.

---

*) Čtenář se k ní může vrátit později.

Důkaz. Bylo již několikrát řečeno, že operace součtu bodu s vektorem na soustavě souřadnic nezávisí. Stačí tedy ukázat, že (2.21) můžeme zapsat jako součet bodu a vektoru; to je však snadné, neboť je $\alpha_{k+1} = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$, což po dosazení do (2.21) a formální úpravě převádí (2.21) na tvar

$$X = A_{k+1} + \alpha_1(A_1 - A_{k+1}) + \alpha_2(A_2 - A_{k+1}) + \\ + \ldots + \alpha_k(A_k - A_{k+1}) .$$

Tím je věta dokázána.

Jistou analogií věty 2.7 je věta následující:

Věta 2.7a. *Budiž k libovolné přirozené číslo; zvolme $k + 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ a $k + 1$ čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}$ tak, aby jejich součet byl roven* 0. *Potom vektor $\mathbf{u}$ definovaný*

$$\mathbf{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_k A_k + \beta_{k+1} A_{k+1} \tag{2.21a}$$

je stanoven jednoznačně nezávisle na volbě soustavy souřadnic.

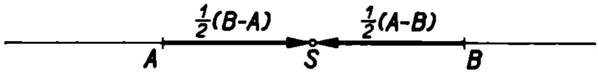
Důkaz. Rovnost (2.21a) má po rozepsání do souřadnic zajisté smysl. Je tedy touto rovností v dané soustavě souřadnic vektor $\mathbf{u}$ stanoven jednoznačně. Abychom však ukázali, že jeho konstrukce nezávisí na volbě soustavy souřadnic, stačí ukázat, že $\mathbf{u}$ je lineární kombinací nějakých vektorů, a tedy vektor. To je však snadné, neboť platí: $\beta_{k+1} = -\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_k$ po dosazení do (2.21a) a formální úpravě dostaneme:

$$\mathbf{u} = \beta_1(A_1 - A_{k+1}) + \beta_2(A_2 - A_{k+1}) + \\ + \ldots + \beta_k(A_k - A_{k+1}) .$$

Tím je důkaz uzavřen.

Na základě věty 2.7 a 2.7a budeme zápisů (2.21) a (2.21a) užívat při řešení některých úloh v této i následující kapitole. Čtenář si může položit otázku, proč se nedržíme důsledně vektorového zápisu. Důvod je však nasnadě, neboť zápisy (2.21) a (2.21a) vedou ke značnému zjednodušení [srv. třeba zápisy (2.22), (2.23) aj.]. Upustíme od dalších podrobností. Čtenář si může v každém příkladě, kde bude těchto zápisů užito, vždycky ověřit, že k témuž výsledku dospěje pomocí zápisu striktně vektorového, resp. po souřadnicích.

V odstavci 2.2 jsme se také trochu pozastavili nad tím, že střed úsečky AB můžeme psát ve tvaru (2.11). To je však v souhlase s větou 2.7, neboť $S = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$, součet koeficientů je tedy 1. Vzorec (2.11) snadno uvedeme na tvar $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$ nebo $S = B + \frac{1}{2}(A - B)$ (obr. 20). Bod S dělí úsečku AB v poměru 1 : 1.



Obr. 20. Střed úsečky AB.

2.7. Některé úlohy o trojúhelníku a čtyřstěnu

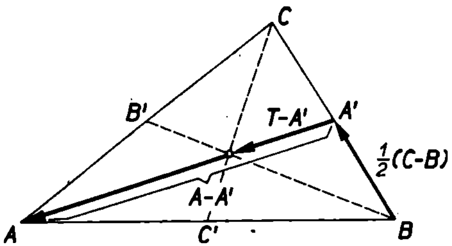
Věta 2.8. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který nazýváme těžištěm; těžiště dělí každou těžnici v poměru* 1 : 2 *(počítáno od strany trojúhelníka).*

Důkaz. Obsah věty zná čtenář velmi dobře, nám jde pouze o důkaz pomocí vektorů. Užijme označení podle obr. 21 a zvolme na úsečce AA' bod T tak, aby bylo $A'T : TA = 1 : 2$; to znamená, že platí rovnost $T - A' = \frac{1}{3}(A - A')$, kterou můžeme psát ve tvaru

$$T = A' + \frac{1}{3}(A - A')\,.$$

Dosadíme-li sem za $A' = \dfrac{B + C}{2}$, máme

$$T = \frac{1}{3}(A + B + C)\,. \tag{2.22}$$

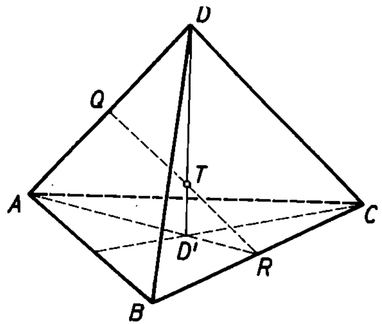


Obr. 21. Těžiště trojúhelníka.

Přejdeme-li k těžnici BB' a určíme bod U, o němž platí $B'U : BU = 1 : 2$, dostaneme U ve tvaru (2.22), tedy $T = U$. Tento výpočet je však zbytečný. Zaměníme-li totiž cyklicky pořadí vrcholů $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, nemění se bod (2.22). Další cyklická permutace $B \to C$, $C \to A$, $A \to B$ vede k témuž závěru, bod T je tedy společným bodem všech tří těžnic a z jeho konstrukce plyne i druhé tvrzení naší věty.

Věta 2.9. *Těžnice čtyřstěnu se protínají v jediném bodě, kterému říkáme těžiště; toto těžiště dělí každou těžnici v poměru* 1 : 3 *(počítáno od stěny čtyřstěnu).*

D ů k a z. Těžnicí čtyřstěnu nazýváme úsečku, která spojuje vrchol čtyřstěnu s těžištěm protější stěny.



Obr. 22. Těžiště čtyřstěnu.

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ (obr. 22). Těžiště trojúhelníka ABC označme D' a zvolme na úsečce DD' bod T tak, aby bylo $D'T : DT = 1 : 3$. Formálně jde o stejný postup jako v důkazu věty 2.8, můžeme být proto stručnější; zřejmě $T = D' - \frac{1}{4}(D - D')$ a po dosazení za D' podle (2.22) dává krátký výpočet tento výsledek:

$$T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)\,. \qquad (2.23)$$

Výsledný bod (2.23) se nemění cyklickou permutací vrcholů čtyřstěnu a je proto společným bodem všech těžnic; volba bodu T potvrzuje i druhou část věty.

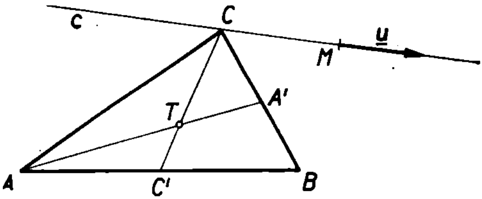
Věta 2.10. *Těžiště čtyřstěnu je středem úsečky, která spojuje středy dvou protilehlých hran čtyřstěnu.*

Důkaz. Protilehlými nazýváme každou dvojici mimoběžných hran. Zůstaneme-li u obr. 22, pak tuto vlastnost mají hrany AD, BC, jejich středy označme po řadě Q, R. Vypočítejme střed úsečky QR, který dočasně označíme S. Jelikož $Q = \frac{1}{2}(A + D)$, $R = \frac{1}{2}(B + C)$, pak nutně s ohledem na (2.23) platí:

$$S = \frac{1}{4}(A + B + C + D) = T\,.$$

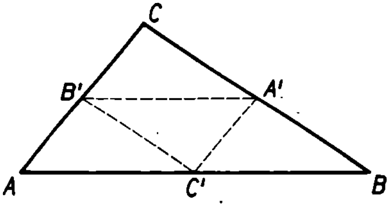
Příklad 2.6. V trojúhelníku ABC jsou vrcholy A, B pevné, bod C probíhá nějakou přímku c. Co opisuje těžiště T trojúhelníků ABC?

Řešení. Je-li $\mathbf{u}$ směrový vektor přímky c, M její libovolný bod, pak můžeme C vyjádřit takto: $C = M + \alpha\mathbf{u}$. Jelikož $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$, dosadíme-li sem za C, máme: $T = \frac{1}{3}(A + B + M + \alpha\mathbf{u})$, neboli $T = \frac{1}{3}(A + B + M) + \frac{1}{3}\alpha\,\mathbf{u}$. Poslední rovnice nám dává odpověď. Těžiště T uvažovaných trojúhelníků vyplní přímku rovnoběžnou s přímkou c. V obecném případě jsou přímky c, AB mimoběžné, tedy také přímka, kterou vytvoří těžiště, je mimoběžná s přímkou AB. Doporučujeme uvážit všechny planimetrické případy (obr. 23).



Obr. 23. K příkladu 2.6.

Příklad 2.7. Určete vrcholy trojúhelníka ABC, jsou-li dány středy A', B', C' jeho stran (obr. 24).



Obr. 24. K příkladu 2.7.

Řešení: Pro středy A', B' máme

$$A' = \frac{1}{2}(B + C)\,,$$

$$B' = \frac{1}{2}(C + A)\,.$$

Odtud ihned plyne, že $B' - A' = \frac{1}{2}(A - B)$; jsou tedy úsečky $A'B'$, AB vzájemně rovnoběžné. Cyklická záměna bodů A', B', C' má za následek, že také $B'C' \parallel BC$ a $A'C' \parallel AC$. Mimochodem jsme také dokázali, že střední příčky v trojúhelníku jsou rovnoběžné se stranami. Sami si snadno zdůvodníte, že platí

$$\begin{aligned} A &= C' + (B' - A'), \\ B &= A' + (C' - B'), \\ C &= B' + (A' - C'). \end{aligned}$$

2.8. Stejnolehlost

Nepochybujeme o tom, že znáte pojem stejnolehlosti v rovině E_2. Nám zde půjde o stejnolehlost v prostoru E_3. Jak účinným se zde ukáže použití vektorů, posoudíte sami.

Definice 2.10. Budiž α nenulové reálné číslo a S_{12} nějaký bod v prostoru E_3. Předpis, který každému $X_1 \in \mathsf{E}_3$ přiřazuje bod $X_2 \in \mathsf{E}_3$ tak, že platí

$$X_2 - S_{12} = \alpha(X_1 - S_{12}), \tag{2.24}$$

se nazývá *stejnolehlost* nebo také *homotetie;* bod S_{12} se nazývá *střed,* číslo α *koeficient stejnolehlosti.* Definovanou stejnolehlost budeme označovat $H_{12}(S_{12}, \alpha)$. Rovnici (2.24) říkáme *vektorová rovnice* stejnolehlosti.

Zkoumejme, co vznikne složením dvou stejnolehlostí $H_{12}(S_{12}, \alpha)$, $H_{23}(S_{23}, \beta)$. Řekněme to trochu podrobněji. Stejnolehlost H_{12} přiřazuje bodu X_1 bod X_2, ve stejnolehlosti H_{23} odpovídá pak bodu X_2 bod X_3. Složením obou stejnolehlostí H_{12}, H_{23} rozumíme zobrazení G_{13}, v němž každému bodu X_1 odpovídá bod X_3. Vnucuje se jistě otázka: Je G_{13} také stejnolehlost? Pokusme se na ni odpovědět.

Zapišme vektorové rovnice obou stejnolehlostí:

$$H_{12}: \quad (X_2 - S_{12}) = \alpha(X_1 - S_{12}) \,, \tag{2.24}$$

$$H_{23}: \quad (X_3 - S_{23}) = \beta(X_2 - S_{23}) \,. \tag{2.25}$$

Rovnici (2.25) můžeme psát ve tvaru

$$(X_3 - S_{23}) = \beta(X_2 - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,,$$

a dosadíme-li sem z (2.24), máme

$$(X_3 - S_{23}) = \alpha\beta(X_1 - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.26}$$

Rovnice (2.26) je vektorová rovnice zobrazení G_{13}: jaké je to zobrazení, o tom nám více řeknou samodružné body. Takový samodružný bod $S = S_1 = S_3$ by musel vyhovovat rovnici (2.26), muselo by tedy být

$$(S - S_{23}) = \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,, \tag{2.27}$$

což můžeme psát takto:

$$(S - S_{12}) + (S_{12} - S_{23}) = \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}).$$

Odtud konečně plyne, že

$$(1 - \alpha\beta)\,(S - S_{12}) = (\beta - 1)\,(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.28}$$

Proveďme diskusi rovnice (2.28).

A. Je-li $\alpha\beta \neq 1$, můžeme z (2.28) bod S jednoznačně určit. Platí

$$S = S_{12} + \frac{\beta - 1}{1 - \alpha\beta}\,(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.29}$$

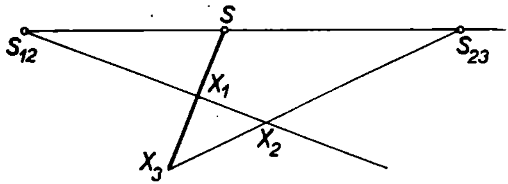
Vraťme se nyní k rovnici (2.26), kterou lze psát ve tvaru

$$(X_3 - S) + (S - S_{23}) =$$
$$= \alpha\beta(X_1 - S) + \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) .$$

Dosadíme-li sem z (2.27), pak

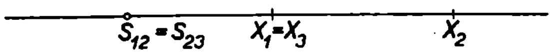
$$X_3 - S = \alpha\beta(X_1 - S) \qquad (2.30)$$

a zobrazení G_{13} je stejnolehlostí $H_{13}(S, \alpha\beta)$; to nám říká vektorová rovnice (2.30) (obr. 25).



Obr. 25. Složení dvou stejnolehlostí v obecném případě.

B. Jestliže $\alpha\beta = 1$ a současně $S_{12} = S_{23}$, pak rovnice (2.28) je identicky splněna pro každé $S \in \mathsf{E}_3$. Složením stejnolehlostí H_{12}, H_{23} vznikne tedy identita (obr. 26).

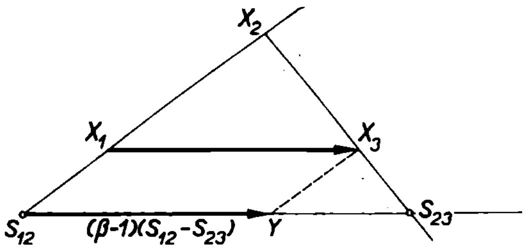


Obr. 26. Složení dvou stejnolehlostí, které je identitou.

C. Nechť $\alpha\beta = 1$, ale $S_1 \neq S_2$; pak jsou možné dva případy.

1. Jestliže $\alpha = \beta = 1$, jde opět o identitu, dokonce obě výchozí stejnolehlosti jsou identitami. To je případ jistě nezajímavý.

2. Jestliže $\alpha \neq 1$, pak také $\beta \neq 1$, rovnice (2.28) nemá řešení a samodružný bod tedy neexistuje. Dosadíme-li $\alpha\beta = 1$ do rovnice (2.26), snadno zjistíme, že $X_3 = X_1 + (\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$; to je však vektorová rovnice rovnoběžného posunutí o konstantní vektor $(\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$ (obr. 27).



Obr. 27. Složení stejnolehlostí $H_{12}(S_{12}, 3)$, $H_{23}\left(S_{23}, \frac{1}{3}\right)$; výsledkem je posunutí o vektor $\frac{2}{3}(S_{23} - S_{12})$.

Závěry shrneme v následujícím tvrzení:

Věta 2.11. *Složení dvou neidentických stejnolehlostí* $H_{12}(S_{12}, \alpha)$, $H_{23}(S_{23}, \beta)$ je

A. *stejnolehlost* $H_{13}(S, \alpha\beta)$ *se středem* (2.29), *jestliže* $\alpha\beta \neq 1$,

B. *identita, pokud* $\alpha\beta = 1$ *a* $S_{12} = S_{23}$,

C. *rovnoběžné posunutí o nenulový vektor* $(\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$, *pokud* $\alpha\beta = 1$ *a* $S_{12} \neq S_{23}$.

Úlohy na stejnolehlost najde čtenář ve cvičení a též v třetí kapitole.

2.9. Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v E_3 mohou být rovnoběžné (případně totožné), různoběžné nebo mimoběžné. Nechť přímka p má počáteční bod P a směrový vektor $\mathbf{u}$, přímka q pak ať má počáteční bod Q a směrový vektor $\mathbf{v}$. Vektorové rovnice těchto přímek mají tedy tvar

$$\begin{aligned} p\colon \quad & X = P + \alpha\mathbf{u}\,, \\ q\colon \quad & X = Q + \beta\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

a) Rovnoběžné nebo totožné jsou přímky p, q právě tehdy, jestliže $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, což znamená, že existuje reálné číslo $\lambda \neq 0$ tak, že $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$; požadavek $\lambda \neq 0$ plyne z toho, že směrové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ musí být nenulové, vektorem $\mathbf{o}$ není určena žádná přímka. Skutečnost, že $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ sama o sobě nestačí, abychom rozhodli, zda p, q jsou různé nebo splývající rovnoběžky. Kterýkoliv bod přímky může být zvolen za počáteční, není proto vyloučeno, že bod Q je bodem přímky p, což ze zápisu nepoznáme; pokud to však nastane, pak mezi čísly $\alpha \in (-\infty, \infty)$ musí existovat takové, že platí $Q = P + \alpha\mathbf{u}$ (nebo existuje takové $\beta \in (-\infty, \infty)$, že $P = Q + \beta\mathbf{v}$). Neexistuje-li takové α, pak p, q jsou dvě různé rovnoběžky.

b) Přímky p, q jsou různoběžné nebo mimoběžné právě tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nejsou násobkem; neexistuje tedy číslo $\lambda \neq 0$ tak, aby platilo $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Jde-li o různoběžky, musí existovat společný bod, musí mít proto řešení vektorová rovnice $P + \alpha\mathbf{u} = Q + \beta\mathbf{v}$. Jsou-li p, q mimoběžky, nemá vektorová rovnice $P + \alpha\mathbf{u} = Q + \beta\mathbf{v}$ řešení.

Příklad 2.8. Jakou vzájemnou polohu mají přímky p, q, jestliže

1. $P = [-1, 0, 2]$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$;
$Q = [1, 2, 6]$, $\mathbf{v} = (2, 2, 4)$,

2. $P = [1, 2, -1]$, $\mathbf{u} = (-1, 1, 3)$;
$Q = [-10, 4, 9]$, $\mathbf{v} = (3, -3, -9)$,

3. $P = [3, 5, 7]$, $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$;
$Q = [-2, -1, 0]$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$,

4. $P = [1, 0, 0]$, $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$;
$Q = [3, 0, 0]$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

Řešení. 1. Jelikož $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$, je $p \parallel q$. Zda nejde o splývající rovnoběžky, o tom rozhodne rovnice $Q = P + \alpha\mathbf{u}$, neboli $[1, 2, 6] = [-1, 0, 2] + \alpha(1, 1, 2)$. Odtud máme tři rovnice mezi souřadnicemi: $\alpha - 1 = 1$, $\alpha = 2$, $2\alpha + 2 = 6$, které jsou splněny pro $\alpha = 2$. Tedy $p = q$.

2. Jde opět o případ rovnoběžných přímek, neboť $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$. Řešení vektorové rovnice $Q = P + \alpha\mathbf{u}$ vede však ke sporné soustavě rovnic: $1 - \alpha = -10$, $2 + \alpha = 4$, $3\alpha - 1 = 9$; z prvé totiž máme $\alpha = 1$ a číslo 1 není řešením druhé rovnice, neboť $3 \neq 4$. Jedná se tedy o dvě různé rovnoběžky.

3. V tomto případě není vektor $\mathbf{v}$ násobkem vektoru $\mathbf{u}$; zda jde o různoběžky nebo mimoběžky zjistíme řešením vektorové rovnice $\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} = Q - P$, která rozepsána po složkách dává soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha - 3\beta &= -5\,, \\ 2\alpha - 2\beta &= -6\,, \\ 3\alpha - \beta &= -7\,. \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $\alpha = -2$, $\beta = 1$, přímka p je různoběžná s přímkou q. Chceme-li znát průsečík R, dosadíme $\alpha = -2$ do rovnice $X = P + \alpha\mathbf{u}$ nebo $\beta = 1$

do rovnice $X = Q + \beta\mathbf{v}$; máme tak $R = [1, 1, 1]$.

4. Přímky p, q nejsou rovnoběžné, řešíme tedy stejně jako v předchozím případě vektorovou rovnici $\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} = Q - P$, neboli soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\beta &= 2\,, \\ \alpha - \beta &= 0\,, \\ 2\alpha - \beta &= 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava řešení nemá, z prvých dvou rovnic totiž máme $\alpha = \beta = -2$ a dosazení těchto hodnot do třetí vede ke sporu $2 = 0$. Přímky p, q jsou mimoběžné.

2.10. Příčka dvou přímek

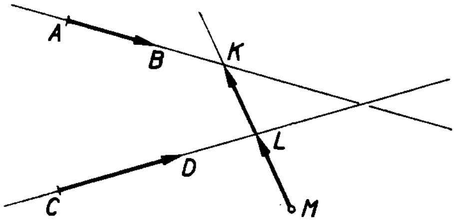
Příčkou dvou daných přímek nazýváme každou přímku, která je s oběma různoběžná.

Věnujme se v tomto odstavci dvěma klasickým úlohám.

Příklad 2.9. Je dán bod M a přímky AB, CD; napište vektorovou rovnici příčky daných přímek, která prochází bodem M, a určete společné body hledané příčky s danými přímkami. Řešte pro případ: $M = [1, 1, 1]$, $A = [5, 3, 5]$, $B = [2, 3, 2]$, $C = [4, 6, 8]$, $D = [3, 4, 5]$.

Řešení. Klasický syntetický postup spočívá v tom, že bodem M a přímkami proložíme roviny, průsečnice těchto rovin je pak hledaná příčka. Vektory nám nabízejí elegantnější postup: Hledaná příčka (pokud existuje) protíná přímky AB, CD po řadě v bodech K, L (obr. 28), které lze vyjádřit takto: $K = A + \alpha(B - A)$, $L = C + \beta(D - C)$. Body M, L, K mají ležet na jedné přímce, proto $K - M = \gamma(L - M)$. Dosadíme-li sem za K a L podle výše uvedených rovnic, dostaneme po malé úpravě

$$\alpha(B - A) + \beta\gamma(C - D) + \gamma(M - C) = M - A. \tag{2.31}$$



Obr. 28. **Příčka dvou přímek vedená daným bodem M.**

Po rozepsání do složek máme soustavu pro neznámé α, $\beta\gamma$, γ:

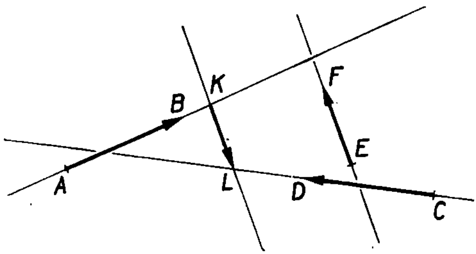
$$\begin{aligned} -3\alpha + \beta\gamma - 3\gamma &= -4\,, \\ 2\beta\gamma - 5\gamma &= -2\,, \\ -3\alpha + 3\beta\gamma - 7\gamma &= -4\,. \end{aligned}$$

Čtenář snadno zjistí, že soustava má právě jedno řešení $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta\gamma = 4$, $\gamma = 2$; odtud $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$. Dosadíme-li do rovnic pro K a L (viz dříve), zjistíme, že $K = [3, 3, 3]$, $L = [2, 2, 2]$, a vektorová rovnice příčky je $X = M + \lambda(K - M)$, neboli $X = [1, 1, 1] + \lambda(2, 2, 2)$.

V našem případě existuje tedy jediná příčka přímek AB, CD, která prochází bodem M. To nemusí platit obecně. Co když body A, B, C, D, M leží v jedné rovině nebo $AB \parallel CD$, bod M však neleží v rovině těchto rovnoběžek? Nadhozené otázky přirozeně úzce souvisí s rovnicí (2.31), která může mít nekonečně mnoho řešení nebo také žádné.

Příklad 2.9. Napište vektorovou rovnici příčky přímek AB, CD, je-li tato příčka rovnoběžná s přímkou EF; $A = [5, 2, 3]$, $B = [4, 1, 2]$, $C = [1, 3, 3]$, $D = [1, 2, 2]$, $E = [3, 2, 2]$, $F = [5, 2, 3]$.

Řešení. Hledanou příčku označme p, její průsečíky s přímkami AB, CD po řadě K, L (obr. 29). Jde jen



Obr. 29. Příčka dvou přímek rovnoběžná s daným směrem.

o jistou modifikaci příkladu 2.8, můžeme být proto stručnější. Zřejmě $K = A + \alpha(B - A)$, $L = C + \beta(D - C)$ a $L - K = \gamma(F - E)$; odtud

$$\alpha(A - B) + \beta(D - C) + \gamma(E - F) = A - C\,, \tag{2.32}$$

což vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha \qquad\quad -2\gamma &= 4\,, \\ \alpha - \beta \qquad\quad &= -1\,, \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0\,, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$.

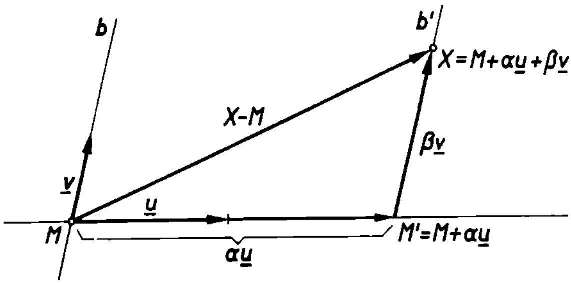
Je tedy $K = [3, 0, 1]$, $L = [1, 0, 0]$ a vektorová rovnice příčky je $X = K + \lambda(L - K)$, čili $X = [3, 0, 1] + \lambda(-2, 0, -1)$.

I zde upustíme od obecné diskuse, která souvisí s rovnicí (2.32).

2.11. Rovina

Nechť M je nějaký bod prostoru E_3 a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vektory lineárně nezávislé. Zkoumejme množinu všech bodů X, které vyhovují vektorové rovnici

$$X = M + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}\,, \tag{2.33}$$



Obr. 30. K vektorové rovnici roviny.

v níž α, β probíhají nezávisle na sobě všechna reálná čísla. Ukážeme si, že touto množinou je rovina procházející bodem M. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tzv. *směrové vektory* této roviny.

Uvažujme následovně: Dva lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ umístěné do pevného bodu M určují dvě různoběžky a, b (obr. 30). Zvolme v rovině těchto různoběžek libovolný bod X a veďme jím přímku $b' \parallel b$ (obr. 30). Průsečík přímek b, b' označme M'. Zřejmě existují čísla α, β taková, že

$$X - M = (X - M') + (M' - M) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}\,,$$

čili $X = M + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, což je (2.33). Každý bod Xté roviny, která odpovídá naší představě, vyhovuje tedy rovnici (2.33). Vzniká přirozeně otázka, zda nějaký bod, který vyhovuje rovnici (2.33), neleží mimo rovinu různoběžek a, b. Odpověď je negativní. Jsou-li totiž α, β jakákoliv reálná čísla, pak vektor $\alpha\mathbf{u}$ je kolineární s vektorem $\mathbf{u}$, vektor $\beta\mathbf{v}$ je kolineární s $\mathbf{v}$ a vektor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, umístěný do bodu M, leží v rovině různoběžek a, b (to se snadno nahlédne). V rovině různoběžek a, b leží pak také koncový bod vektoru $X - M$.

Rovnice (2.33) se nazývá vektorová rovnice roviny; při pevně zvoleném M, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je toto vyjádření jednoznačné, jak si ještě ukážeme. Předpokládejme opak. Potom pro daný bod X platí jednak (2.33), jednak (2.34)

$$X = M + \alpha'\mathbf{u} + \beta'\mathbf{v}\,, \tag{2.34}$$

a je splněna aspoň jedna z nerovností $\alpha' \neq \alpha$, $\beta' \neq \beta$. Odečteme-li rovnice (2.33) a (2.34), dostaneme $\mathbf{o} = (\alpha - \alpha')\mathbf{u} + (\beta - \beta')\mathbf{v}$. Jestliže například $\alpha' \neq \alpha$, uvedeme poslední rovnici na tvar

$$\mathbf{u} = \frac{\beta - \beta'}{\alpha' - \alpha}\,\mathbf{v}\,. \tag{2.35}$$

Vektory (2.35) jsou nutně kolineární, což je ve sporu s požadavky definice roviny.

O vektoru $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ říkáme, že je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Můžeme tedy říci, že rovina, definovaná rovnicí (2.33), je množina všech bodů X, které jsou součtem bodu M s každou lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Příklad 2.10a. Máme napsat vektorovou rovnici roviny, která je určena body A, B, C; $A = [-2, 0, 1]$, $B = [1, 2, 1]$, $C = [-1, 2, 3]$.

Řešení. Zřejmě $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$ jsou dva směrové vektory dané roviny a podle (2.33) $X = A + \alpha(B - A) + \beta(C - A)$, neboli

$$X = [-2, 0, 1] + \alpha(3, 2, 0) + \beta(1, 2, 2)\,,$$

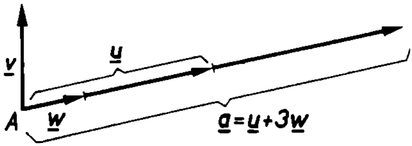
a úkol je splněn. Pokud poslední rovnici zapíšeme po složkách, získáme soustavu lineárních rovnic, kterým říkáme parametrické rovnice roviny:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 3\alpha + \beta\,, \\ x_2 &= \phantom{-2 +{}} 2\alpha + 2\beta\,, \\ x_3 &= 1 \phantom{{}+ 3\alpha} + 2\beta\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Příklad 2.10b. Leží body $P = [-1, -2, -3]$, $Q = [4, 4, 2]$ v rovině ABC z příkladu 2.10a?

Řešení. Rovina ABC z příkladu 2.10 má parametrické rovnice (2.36). Je-li nějaký bod bodem roviny ABC, musí mít řešení soustava (2.36), do níž dosadíme za x_1, x_2, x_3 souřadnice daného bodu. Snadno se přesvědčíte, že bod P je bodem roviny ABC pro $\alpha = 1$, $\beta = -2$, bod Q v rovině ABC neleží.

POZNÁMKA 2.4. Jsou-li dány nějaké tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a jeden z nich můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, říkáme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou *komplanární* nebo také *lineárně závislé*. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lze pak umístit do jedné roviny (latinsky „planum" = = rovina). Tři vektory, které nejsou komplanární, nazýváme *lineárně nezávislé*. Všimněme si jedné jemnosti: jestliže kupř. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, nikterak z toho neplyne, že $\mathbf{v}$ můžeme psát ve tvaru $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{w}$ (srovnejte s obr. 31, kde $\alpha = 0$, $\beta = 3$). Vektor $\gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{w}$



Obr. 31. Zvláštní případ komplanárních vektorů.

je v našem případě vždy kolineární jak s vektorem $\mathbf{u}$, tak s vektorem $\mathbf{w}$ a vektor $\mathbf{a}$ (obr. 31) můžeme psát ve tvaru $\mathbf{a} = \mathbf{u} + 3\mathbf{w}$, ale též $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}$. Je-li tedy vektor vyjádřen jako lineární kombinace lineárně závislých vektorů, pak toto vyjádření není určeno jednoznačně.

2.12. Vzájemná poloha přímky a roviny a vzájemná poloha dvou rovin

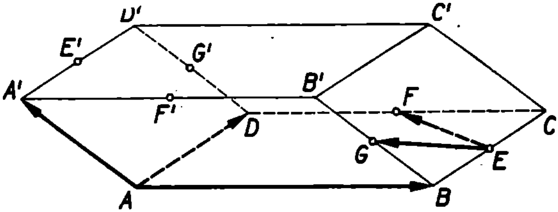
Zapišme znovu vektorové rovnice přímky a roviny:

$$X = A + \alpha\mathbf{u}\,,$$
$$X = M + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}\,.$$

Má-li mít přímka s rovinou společný bod, musí existovat čísla α, β, γ tak, že platí vektorová rovnice $A + \alpha\mathbf{u} = M + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, která rozepsána po souřadnicích vede (tuto operaci jsme zopakovali již několikrát) na systém tří lineárních rovnic o neznámých α, β, γ. Tato soustava — jak známo — může mít řešení jedno, žádné nebo nekonečně mnoho; v prvém případě jde o přímku různoběžnou s rovinou, v druhém o rovnoběžku, třetí možnost znamená, že přímka v rovině leží.

Ukažme si to na příkladech.

Příklad 2.11. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$. Označme postupně E, F, G, E', F', G' středy hran, které neprocházejí body A, C' (obr. 32), a dokažme, že uvedených šest středů leží v jedné rovině.



Obr. 32. K příkladu 2.11.

Řešení. Ukažme, že vektor $E' - E$, který je umístěn v bodě E, leží v rovině EFG; při označení $G - E = \mathbf{a}$, $F - E = \mathbf{b}$ stačí ukázat, že vektor $E' - E$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Položme $A' - A = \mathbf{w}$, $D - A = \mathbf{v}$, $B - A = \mathbf{u}$; pak jsou zřejmé tyto vztahy:

$$E' = A' + \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

$$E = A + \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

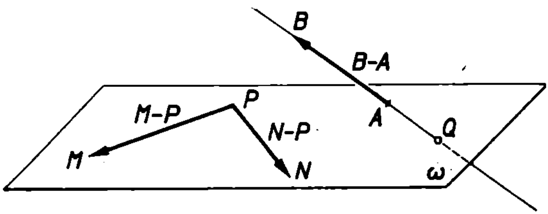
$$G = A + \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{w},$$

$$F = A + \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}.$$

Z nich pak dostaneme, že $E' - E = \mathbf{w} - \mathbf{u}$, $\mathbf{a} = G - E = \frac{1}{2}\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = F - E = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$. A tedy $E' - E = \mathbf{w} - \mathbf{u} = 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, c.b.d. Zcela obdobně bychom postupovali v případě bodu F' i G'.

Příklad 2.12. Určete průsečík přímky AB s rovinou MNP; $A = [2, 1, 2]$, $B = [3, 1, 3]$, $M = [1, 2, 2]$, $N = [2, 2, 1]$, $P = [3, 5, 3]$.

Řešení. Z toho, co bylo řečeno na začátku tohoto odstavce, plyne $A + \alpha(B - A) = P + \beta(M - P) + \gamma(N - P)$. (Záměrně jsme v poslední rovnici vybrali za počáteční bod roviny bod P, aby si čtenář uvědomil, že je lhostejné, který bod roviny zvolíme za počáteční.)



Obr. 33. K příkladu 2.12.

Uvedená vektorová rovnice vede na soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 1\,, \\ 3\beta + 3\gamma &= 4\,, \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 1\,, \end{aligned}$$

z níž plyne $\alpha = -1$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$. Průsečík Q získáme nejlépe z rovnice přímky, tj. $Q = A + \alpha(B - A) = [2, 1, 2] - 1\,(1, 0, 1) = [1, 1, 1]$; v rovnici roviny bychom museli dosadit za β, γ a znamená to jistou práci navíc (obr. 33).

Příklad 2.13. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky AB a roviny MNP, jestliže $A = [1, 2, 0]$, $B = [3, 1, 2]$, $M = [1, 0, 0]$, $N = [2, 0, 1]$, $P = [1, 1, 0]$.

Řešení. Postupujme zcela obdobně jako v předchozím příkladě a napišme proto hned soustavu příslušných lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha \qquad - \gamma &= 0\,, \\ -\alpha + \beta + \gamma &= -1\,, \\ 2\alpha \qquad - \gamma &= 0\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnice říká totéž co první, můžeme ji tedy vynechat; zbývající dvě rovnice mají pak nekonečně mnoho řešení tvaru $\beta = -1 - \alpha$, $\gamma = 2\alpha$, kde α je libovolné reálné číslo. Z úvah na začátku odstavce plyne, že přímka leží v rovině.

Příklad 2.14. Určete průsečnici rovin, z nichž první je určena bodem A a vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, druhá bodem C a vektory $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; $A = [0, 0, 1]$, $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$, $C = [7, 5, 5]$, $\mathbf{c} = (3, 2, 2)$, $\mathbf{d} = (2, 1, 1)$.

Řešení. Zapišme vektorové rovnice daných rovin a hledejme jejich společné body. Rovnice první roviny je $X = A + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, druhá $X = C + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}$, pro společné body pak máme $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c} - \delta\mathbf{d} = C - A$. Rozpis po souřadnicích vede na systém tří rovnic pro čtyři neznámé

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta &= 5\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Čtenář není asi obeznámen s řešením systémů lineárních rovnic o n neznámých, je-li $n > 3$, a rozsah této publikace nedovoluje, abychom tomuto problému věnovali více místa. Řekněme si však aspoň tolik, že vhodným sčítáním rovnic lze převést danou soustavu na tzv. *trojúhelníkový tvar*, přičemž tato nová soustava je *ekvivalentní* (tj. každé řešení jedné soustavy je řešením soustavy druhé a obráceně) s danou soustavou. Pro naše potřeby postačí, ukážeme-li celý postup na soustavě (2.37). První a třetí rovnici opíšeme, od druhé rovnice odečteme první a máme

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \gamma + \delta &= -2\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4 \end{aligned}$$

a výměnou druhé a třetí rovnice získáme zmíněný trojúhelníkový tvar soustavy:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4\,, \\ \gamma + \delta &= -2\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

POZNÁMKA 2.5. Název trojúhelníkový tvar vznikl takto: Je-li dána soustava n rovnic o n neznámých a soustava má jediné řešení, pak levá strana soustavy má po úpravách skutečně tvar trojúhelníka. V našem případě, jak vidno z (2.38), jsme dostali tvar lichoběžníka, avšak i v takových případech hovoříme běžně o „trojúhelníkovém tvaru".

Pro naše potřeby uveďme bez důkazu tvrzení: Budiž n počet neznámých a h počet rovnic po uvedení na trojúhelníkový tvar. Potom platí: a) je-li $h = n$ a žádná rovnice není „sporná", má soustava jediné řešení; b) je-li $h < n$ a žádná rovnice není „sporná", má soustava nekonečně mnoho řešení a $n - h$ neznámých můžeme volit libovolně; c) je-li v systému aspoň jedna rovnice „sporná", nemá soustava řešení.

K našemu tvrzení dodejme ještě toto: Ke „sporné" rovnici může dojít jen tak, že na levé straně dostaneme při úpravách nulu, ale pravá strana je různá od nuly.

V systému rovnic (2.38) je $n = 4$, $h = 3$. Podle tvrzení z poznámky 2.5 má tedy soustava (2.38) nekonečně mnoho řešení, přičemž jedna z nich je libovolně volitelná; tato volitelná v našem systému budiž δ. Pak je $\gamma = -2 - \delta$, $\beta = -\delta$, $\alpha = 1 + \delta$. Po dosazení do rovnice $X = A + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ máme ihned $X = A + (1 - \delta)\mathbf{a} - \delta\mathbf{b}$, neboli $X = A + \mathbf{a} + \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Poslední rovnice je však vektorová rovnice přímky; roviny mají tedy společnou přímku a jsou proto různoběžné. Konkrétně má naše průsečnice rovnici $X = [1, 1, 1] + \delta(-1, -1, -1)$.

Příklad 2.15. Určete vzájemnou polohu rovin ABC a PQR, jestliže

a) $A = [1, 2, 3]$, $\quad B = [0, 2, 5]$, $\quad C = [3, 3, 4]$,
$P = [2, 3, 0]$, $\quad Q = [3, 4, 3]$, $\quad R = [5, 4, -1]$,

b) $A = [1, 2, 3]$, $B = [3, 2, -1]$, $C = [-5, -1, 0]$,
$P = [5, 2, -5]$, $Q = [6, 3, -2]$, $R = [8, 3, -6]$.

Řešení. a) Postupujeme stejně jako při řešení příkladu 2.14. Dospějeme tak k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta &= -1\,, \\ \beta - \gamma - \delta &= 1\,, \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma + \delta &= -3\,, \end{aligned}$$

která po úpravě na trojúhelníkový tvar dává

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta &= -1\,, \\ \beta - \gamma - \delta &= 1\,, \\ 0 &= -6\,. \end{aligned}$$

Poslední „rovnost" neplatí, soustava obsahuje tedy „spornou" rovnici (vzhledem k ostatním rovnicím) a nemá proto řešení. Neexistuje tedy žádný společný bod daných rovin, což znamená, že jsou rovnoběžné.

b) V tomto případě systém rovnic analogický se systémem (2.37) má tvar

$$\begin{aligned} 2\alpha - 6\beta - \gamma - 3\delta &= 4\,, \\ 3\beta + \gamma + \delta &= 0\,, \\ 4\alpha + 3\beta + 3\gamma - \delta &= 8\,; \end{aligned}$$

systém, odpovídající systému (2.38), pak je

$$\begin{aligned} 2\alpha - 6\beta - \gamma - 3\delta &= 4\,, \\ 3\beta + \gamma + \delta &= 0\,. \end{aligned}$$

Podle tvrzení z poznámky 2.5 má poslední soustava nekonečně mnoho řešení, přičemž dvě neznámé můžeme volit zcela libovolně, zbývající vypočítáme. Můžeme-li však volit libovolně třeba γ, δ (a to můžeme), určuje každá zvolená dvojice po dosazení do vektorové rovnice

$X = P + \gamma(Q - P) + \delta(R - P)$ bod roviny PQR. To však znamená, že každý bod roviny PQR je také bodem roviny ABC, obě roviny tedy splývají.

POZNÁMKA 2.6. Rádi bychom na tomto místě upozornili čtenáře na jednu důležitou věc. Sami vidíte, že s velkou lehkostí řešíme pomocí vektorového počtu i dosti komplikované konkrétní problémy; někdy však couváme před obecným pohledem. V tomto odstavci jsme se kupř. vyhnuli odpovědi na otázku, jaké podmínky musí obecně platit pro body A, B, C a P, Q, R (případně pro odpovídající vektory), aby dané roviny měly jednu ze tří známých poloh. Důvod je ovšem jasný; nemáme totiž k dispozici dost obsáhlý algebraický aparát. Je jistě pravda, že nám jde především o geometrii, ale potřeba jistého okruhu znalostí z algebry je naprosto zřejmá. Těm, které geometrie opravdu hlouběji zajímá, doporučujeme, aby souběžně věnovali svou pozornost také algebře. Při výběru literatury vám jistě poradí každý dobrý učitel matematiky.

2.13. Obecný tvar rovnice přímky a roviny

Víme, že v E_2 můžeme každou přímku zapsat také jedinou rovnicí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\,, \tag{2.39}$$

v níž aspoň jedno z čísel a_1, a_2 je nenulové. Řekněme si rovnou, že v E_3 nelze přímku zapsat ve tvaru (2.39). Připomeňme si převod vektorové rovnice přímky v E_2 na tvar (2.39), kterému říkáme obecný tvar rovnice přímky.

Příklad 2.16. Napište vektorovou rovnici přímky AB

a převeďte ji na obecný tvar, jestliže $A = [1, 4]$, $B = [-2, 3]$.

Řešení. Vektorová rovnice naší přímky je $X = A + \alpha(B - A)$, tedy $X = [1, 4] + \alpha(-3, -1)$; odtud máme tzv. parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3\alpha\,, \\ x_2 &= 4 - \alpha\,, \end{aligned}$$

z nichž vyloučíme parametr α třeba tak, že druhou rovnici násobíme číslem -3, sečteme s první a máme ihned tvar obecný: $x_1 - 3x_2 + 11 = 0$. Podobně to můžeme udělat s vektorovou rovnicí roviny $X = M + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$; přejdeme-li k parametrickým rovnicím a vyloučíme z nich parametry α, β, dostaneme obecně lineární rovnici o třech neznámých x_1, x_2, x_3, kterou můžeme psát ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0\,. \tag{2.40}$$

Rovnici (2.40), v níž aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový, říkáme obecný tvar rovnice roviny. Bod X je bodem dané roviny právě tehdy, jestliže jeho souřadnice, dosazeny do (2.40), převádějí tuto rovnici v rovnost.

Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé (nekolineární), dá se ukázat, že převod je vždy možný a každý bod X, který vyhovuje vektorové rovnici, vyhovuje také rovnici (2.40) a obráceně. Rovnice (2.39) a (2.40) jsou objekty afinní geometrie, od důkazu však na tomto místě upouštíme, neboť nemáme dostatek algebraických prostředků, které by byly k dispozici ze střední školy. Důkaz rovnice (2.40) podáme ve 3. kapitole, použijeme však metrických pojmů.

Příklad 2.16. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází body $A = [-1, 0, -1]$, $B = [-9, 1, 1]$, $C = [6, -2, -2]$.

Řešení. Postupujme cestou, kterou jsme nastínili v úvodu; parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 8\alpha + 7\beta\,, \\ x_2 &= \phantom{-1 -{}} \alpha - 2\beta\,, \\ x_3 &= -1 + 2\alpha - \beta\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnici násobíme nejprve číslem -2 a sečteme s druhou, potom číslem 7 a sečteme s první; získáme tak dvě rovnice, v nichž se parametr β již nevyskytuje:

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 2 - 3\alpha\,, \\ x_1 + 7x_3 &= -8 + 6\alpha\,. \end{aligned}$$

Násobme nyní prvou rovnici dvěma a sečtěme s druhou; tím se zbavíme i parametru α a po anulování máme

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0\,, \tag{2.41}$$

což je rovnice (2.40).

Můžeme však zvolit jiný postup. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že body A, B, C musí splňovat rovnici (2.40); proto platí

$$\begin{aligned} -a_1 \phantom{{}+ a_2} + a_3 + a_0 &= 0\,, \\ -9a_1 + a_2 + a_3 + a_0 &= 0\,, \\ 6a_1 - 2a_2 - 2a_3 + a_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

O soustavách lineárních rovnic jsme se zmínili v poznámce 2.5. Stačí přejít na trojúhelníkový tvar a zjistíte, že jedno z čísel a_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ můžeme volit libovolně, zbylá jsou při dané volbě jednoznačně určena;

nemusíme ovšem získat rovnici formálně shodnou s rovnicí (2.41), nutně však bude s rovnicí (2.41) ekvivalentní. Bylo řečeno, že za volitelnou neznámou můžeme dosadit libovolné číslo. Obecně ano, v našem případě však nesmíme dosadit nulu; důvod, který snadno odhalíte, je ovšem v geometrii, nikoli v algebře.

Příklad 2.17. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky EF s rovinou $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$, jestliže

a) $E = [-2, 4, 6]$, $F = [-3, 2, 3]$,
b) $E = [0, -2, 0]$, $F = [1, 2, -3]$,
c) $E = [3, 1, 3]$, $F = [4, 5, 0]$;

je-li přímka různoběžná s rovinou, určete průsečík.

Řešení. a) Z vektorové rovnice přímky $X = [-2, 4{,}6] + \alpha(-1, -2, -3)$ přejdeme k rovnicím parametrickým

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - \alpha\,, \\ x_2 &= 4 - 2\alpha\,, \\ x_3 &= 6 - 3\alpha\,. \end{aligned}$$

Má-li přímka s rovinou společný bod, pak jeho souřadnice převádějí rovnici roviny v rovnost. Dosadíme-li parametrické rovnice přímky do rovnice roviny, dostaneme lineární rovnici pro neznámou α. Víme ovšem, že taková rovnice může mít také nekonečně mnoho řešení nebo žádné. V našem případě platí $(-2 - \alpha) + 2(4 - 2\alpha) + 3(6 - 3\alpha) + 4 = 0$; odtud $\alpha = 2$, existuje jediný společný bod obou útvarů, přímka je různoběžná s danou rovinou. Průsečík R určíme dosazením $\alpha = 2$ do vektorové rovnice přímky: $R = [-4, 0, 0]$.

b) Zcela obdobně zjistíme v tomto případě, že příslušná lineární rovnice pro α je splněna identicky, každý bod přímky (nám by stačily dva) je také bodem dané roviny, přímka tedy v rovině leží.

c) Dá se očekávat, že úloha je volena tak, aby byla vyčerpána každá ze tří možných poloh. Jde vskutku o polohu rovnoběžnou a přímka EF není přímkou dané roviny; příslušná lineární rovnice pro α nemá řešení, doporučujeme proto čtenáři, aby se o tom přesvědčil. V prostoru E_3 používáme často místo symboliky $X = [x_1, x_2, x_3]$ zápisu $X = [x, y, z]$; použijme tohoto označení v následující úloze.

Příklad 2.18. Určete průsečnici rovin daných rovnicemi

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 2 &= 0\,, \\ x + 2y + 3z + 4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení. Souřadnice společných bodů musí splňovat obě rovnice, jsou tedy určeny řešením dané soustavy dvou rovnic o třech neznámých, kterou převedeme opět na trojúhelníkový tvar

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -2\,, \\ y + z &= -2\,; \end{aligned}$$

podle poznámky 2.5 můžeme jednu neznámou volit zcela libovolně, zbývající dvě jsou pak již na této volbě závislé. Zvolme tedy obecně $z = \alpha$; pak $y = -2 - \alpha$, $x = -\alpha$. Výsledné řešení zapíšeme přehledněji

$$\begin{aligned} x &= -\alpha\,, \\ y &= -2 - \alpha\,, \\ z &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Obě roviny mají tedy nekonečně mnoho společných bodů, které můžeme psát ve tvaru $X = [0, -2, 0] + \alpha(-1, -1, 1)$, což je vektorová rovnice přímky. Dané roviny jsou proto různoběžné a řešením je popsána jejich průsečnice.

Příklad 2.19. Rovina je dána rovnicí $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$. Dokažte, že nenulový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je rovnoběžný s danou rovinou právě tehdy, jestliže platí

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0\,. \tag{2.42}$$

Řešení. V dané rovině zvolíme bod Q a umístíme do něj vektor $\mathbf{u}$; koncový bod vektoru $\mathbf{u}$ při tomto umístění označme R. Je-li vektor $\mathbf{u}$ s danou rovinou rovnoběžný, pak při zvoleném umístění platí rovnice

$$a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 + a_0 = 0\,, \tag{2.43}$$

$$a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + a_0 = 0\,; \tag{2.44}$$

odečtením obou rovnic dostaneme

$$a_1(r_1 - q_1) + a_2(r_2 - q_2) + a_3(r_3 - q_3) = 0\,, \tag{2.45}$$

neboli $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$.

Obráceně — platí-li (2.42) neboli (2.45), pak při daném umístění platí také (2.43) a součet obou rovnic vede na rovnici (2.44); bod R tedy leží rovněž v dané rovině a leží tam proto i vektor $\mathbf{u} = R - Q$ s umístěním v bodě Q.

2.14. Svazek rovin

Úvahy v tomto odstavci budou vycházet z následující definice:

Definice 2.11. Množina všech rovin, které procházejí společnou přímkou o, se nazývá *svazek rovin* (přesněji *svazek rovin* 1. *druhu*). Přímka o je tzv. *osa svazku*.

Svazek rovin je určen, známe-li dvě jeho různé roviny. Předpokládejme, že určující roviny svazku jsou dány rovnicemi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a = 0\,, \tag{2.46}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b = 0\,. \tag{2.47}$$

Ukážeme si, že každá rovina, určená rovnicí

$$\begin{aligned}\alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a) &+ \\ + \beta(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b) &= 0\,,\end{aligned} \tag{2.48}$$

kde α, β jsou reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové, náleží do uvažovaného svazku. Skutečně, jestliže $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ je libovolný bod ležící na průsečnici o, pak jeho souřadnice musí vyhovovat rovnicím (2.46) a (2.47). Potom ovšem souřadnice tohoto bodu vyhovují rovnici (2.48); čili v rovině určené rovnicí (2.48) leží každý bod průsečnice o a zkoumaná rovina náleží danému svazku rovin.

Vzniká jistě otázka, jestli každá rovina svazku má rovnici tvaru (2.48). Odpověď je kladná. Nechť libovolná rovina svazku prochází bodem $[x_1, x_2, x_3] \notin o$. Ukážeme, že její rovnici lze psát ve tvaru (2.48). Dosaďme souřadnice tohoto bodu do rovnice (2.48). Získáme tak rovnici pro neznámé koeficienty α, β.

Tyto koeficienty jsou až násobek libovolným číslem určeny jednoznačně a dosadíme-li je do (2.48), máme rovnici roviny v hledaném tvaru. Dodejme, že (2.48) se často nazývá rovnicí svazku rovin.

Příklad 2.20. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $M = [3, 1, 3]$ a obsahuje průsečnici rovin

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 3z - 1 &= 0\,, \\ x + 3y - z - 2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení. Rovnici hledané roviny lze psát podle (2.48) ve tvaru

$$\alpha(2x + 2y - 3z - 1) + \beta(x + 3y - z - 2) = 0\,. \tag{2.49}$$

Dosadíme-li sem souřadnice bodu M, dostáváme

$$-2\alpha + \beta = 0$$

a tedy $\alpha : \beta = 1 : 2$. Zvolíme-li $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dostáváme z (2.49)

$$4x + 8y - 5z - 5 = 0\,,$$

což je rovnice hledané roviny.

S dalšími příklady na svazek rovin se setkáme ještě ve třetí kapitole. Dodejme, že bývá zvykem i množinu všech rovin navzájem rovnoběžných nazývat svazkem (přesněji *svazkem rovin 2. druhu*). Jsou-li (2.46) a (2.47) rovnice dvou různých rovin svazku druhého druhu, potom (2.48) je tzv. rovnicí svazku. Lze totiž ukázat, že platí zcela analogická věta jako pro svazek prvního druhu. Rovnici roviny, která náleží právě do svazku rovnic druhého druhu, lze psát ve tvaru (2.48).

Cvičení

2.1. Co je to vektor a jak jsou definovány základní vektorové operace: součet dvou vektorů; součin vektoru s reálným číslem? Kdy jsou dva vektory kolineární, kdy jsou tři vektory komplanární?

2.2. V rovnoběžníku $ABCD$, který má střed S, označme $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = D - A$. Vyjádřete pomocí vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektory $S - A$, $B - S$, $D - S$.

2.3. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}$ jsou lineárně závislé.

2.4. Je dán trojúhelník ABC a libovolný bod T. Sestrojte vektory $\mathbf{a} = A - T$, $\mathbf{b} = B - T$, $\mathbf{c} = C - T$. Ukažte, že rovnice

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$$

je splněna právě tehdy, jestliže T je těžištěm trojúhelníka.

2.5. Je dán lichoběžník $ABCD$. Jeho základna AB je třikrát větší než základna CD. Pomocí vektorů $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - B$, vyjádřete vektory $D - C$, $A - D$.

2.6. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 4, 2)$ jsou komplanární.

2.7. Dokažte, že body $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 1, 2]$, $C = [3, 1, 2]$, $D = [3, 1, 1]$ jsou vrcholy rovnoběžníka.

2.8. Ukažte, že body $A = [3, 3, 0]$, $B = [5, 4, 3]$, $C = [1, 2, -3]$, $D = [7, 5, 6]$ leží na jedné přímce.

2.9. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází bodem $A = [4, 3, -5]$ rovnoběžně s vektory $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$.

2.10. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází body $A = [2, -1, 3]$, $B = [4, 1, 3]$, $C = [-1, -2, 4]$.

2.11. Dokažte, že dvě roviny o rovnicích

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0\,, \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \end{aligned}$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, jestliže existuje číslo $k \neq 0$ tak, že platí

$$A = ka\,, \quad B = kb\,, \quad C = kc\,.$$

2.12. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $M = [1, 2, 3]$ a je rovnoběžná s rovinou $2x + y - 2z = 0$.

2.13. Určete vzájemnou polohu rovin

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 4 &= 0\,, \\ 3x + 2y + z - 6 &= 0\,, \\ x + y - 2z &= 0\,. \end{aligned}$$

2.14. Určete průsečík P přímky AB s rovinou $x - 2y + 3z - 2 = 0$, jestliže $A = [2, 1, 4]$, $B = [3, 1, 7]$.

2.15. Průsečnicí rovin

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z + 1 &= 0\,, \\ x - 2y - 2z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

proložte rovinu, která prochází bodem $M = [0, 1, -2]$; zvolte různé způsoby řešení.

2.16. Průsečnicí rovin z předcházejícího příkladu proložte rovinu rovnoběžnou s přímkou AB; $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 3, 3]$ a napište její rovnice (parametrické i obecnou).

2.17. Bodem M vedeme příčku přímek AB, CD. Napište její rovnici, jestliže $M = [3, 4, 1]$; $A = [0, 0, 2]$, $B = [2, 4, 0]$, $C = [4, 0, 0]$, $D = [0, 6, 2]$.

2.18. Určete rovnici příčky přímek AB, CD z předcházejícího příkladu, víte-li, že je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$.

2.19. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky AB s rovinou PQR; $P = [2, 4, 2]$, $Q = [2, 2, 2]$, $R = [8, -2, 4]$,

a) $A = [3, 4, 3]$, $B = [4, 5, 4]$,

b) $A = [2, 4, 2]$, $B = [5, 0, 3]$.

2.20. Dokažte, že středy hran AB, BC, CD, DA daného čtyřstěnu leží v jedné rovině.

2.21. Označme T_A, T_B, T_C, T_D těžiště stěn čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $T_AT_BT_CT_D$ mají společné těžiště.

2.22. Dokažte, že ve stejnolehlosti těžišti daného čtyřstěnu odpovídá těžiště odpovídajícího čtyřstěnu.

2.23. Co vznikne složením stejnolehlostí H_{12} (S_{12}, α) a H_{23} (S_{23}, β), jestliže

a) $S_{12} = [3, 4, 1]$, $\alpha = -\dfrac{1}{5}$, $S_{23} = [5, 2, -1]$, $\beta = 5$,

b) $S_{12} = [7, 0, 2]$, $\alpha = 3$, $S_{23} = [3, 2, 1]$, $\beta = \dfrac{1}{3}$?

2.24. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$. Nechť k_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou reálná čísla vesměs různá od nuly a od jedné. Na každé straně A_iA_{i+1} $(A_4 = A_1)$ sestrojme body B_i tak, že dělicí poměr $(A_iA_{i+1}B_i) = k_i$. Pak platí

1. všechny body B_i leží na jedné přímce právě tehdy, když $k_1k_2k_3 = 1$ (věta Menelaova);
2. přímky B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2 mají společný bod nebo společný směr právě tehdy, když $k_1k_2k_3 = -1$ (věta Cevova).

Pokuste se uvedené věty dokázat; obě lze zobecnit pro $(n + 1)$-úhelník z n-rozměrného prostoru.