Vektory v geometrii

1. kapitola. Úvod

In: Bruno Budinský (author); Stanislav Šmakal (author); Jan Volejník (illustrator): Vektory v geometrii. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1971. pp. 5–24.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403733

1. kapitola

ÚVOD

1.1. Základní pojmy z logiky

Metodou matematiky je *formální logika* a základním stavebním prvkem formální logiky je *výrok*. Obsah tohoto pojmu je pro studenta střední školy dnes již zcela běžný. Připomeňme proto pouze, že dva výroky A, B nám dovolují tvořit výroky nové, kterým říkáme logické operace s výroky. Mezi hlavní logické operace s výroky řadíme *konjunkci* (znak $A \wedge B$), *alternativu* (znak $A \vee B$), *implikaci* (znak $A \Rightarrow B$), a *dvojstrannou implikaci* (znak $A \Leftrightarrow B$).

Z hlediska formální logiky nás zajímá pouze *pravdivost* výroků. Při konjunkci požadujeme současnou *platnost* obou výroků A, B, při disjunkci pak platnost aspoň jednoho z nich.

Implikace $A \Rightarrow B$ je takové spojení dvou výroků A, B, při kterém platnost výroku A má za následek platnost výroku B. Výroku A říkáme obvykle předpoklad *(premisa)*, výroku B důsledek *(konkluze)*. Běžně se užívá také těchto rčení: *A je postačující podmínkou pro B* nebo *B je nutnou podmínkou pro A*. Implikaci $A \Rightarrow B$ můžeme charakterizovat gramatickou větou: „*Když platí A, pak platí i B.*“

Jsou-li dány výroky A, B, jsou formálně myslitelny vždy dvě implikace: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$. Žádáme-li, aby platila konjunkce $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, nazýváme takový výrok *dvojstrannou implikací* vzhledem k A, B

a píšeme stručně $A \Leftrightarrow B$. Obsah *dvojstranné implikace* výstižně vyjadřuje gramatická věta: „*A platí právě tehdy, když platí B.*“

Při výstavbě matematických disciplín vycházíme z jistého souboru výroků, tzv. *axiomů*, jejichž pravdivost předpokládáme. Ostatní pravdivé výroky nazýváme *větami*. *Důkaz* je jistou formou verifikace (ověření, zjištění pravdivosti) nějakého výroku. Gramatické věty, které nám měly přiblížit obsah implikace a dvojstranné implikace, mají povahu příčinné souvislosti; z hlediska formální logiky nejde však o příčinnou souvislost v pravém slova smyslu.

Jestliže pravdivému výroku přiřadíme číslo 1, nepravdivému 0, potom pravdivost uvedených čtyř logických souvětí v závislosti na vstupních výrocích A, B je dána následující tabulkou:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0

Uvedené tabulce říkáme *pravdivostní schéma*. Pro lepší orientaci zapišme slovně třeba poslední řádek: Je-li výrok A nepravdivý a zároveň B pravdivý, pak konjunkce $A \wedge B$ a *dvojstranná implikace* $A \Leftrightarrow B$ jsou výroky nepravdivé, *alternativa* $A \vee B$ a implikace $A \Rightarrow B$ jsou výroky pravdivé.

Pro zkrácení zápisu použijeme občas zavedených symbolů.

1.2. Některé pojmy z teorie množin

Znalost základních pojmů předpokládáme. Dohodneme se na tomto místě pouze na symbolice, které budeme příležitostně používat, a seznámíme čtenáře s nezbytným minimem nových pojmů tak, aby sledování dalšího textu mohlo probíhat bez nejmenších potíží.

Je-li a prvkem množiny M, píšeme $a \in \mathsf{M}$; platí-li opak, píšeme $a \notin \mathsf{M}$. *Prázdnou* množinu označíme ϑ.

Množinu, která se skládá ze všech takových prvků x, které mají *vlastnost* $\mathscr{V}$, píšeme ve tvaru

$$\{x | x \text{ má vlastnost } \mathscr{V}\} .$$

Tak třeba kružnice o středu S a poloměru 7, která leží v dané rovině ω, je množina

$$\{Y | Y \in \omega,\ YS = 7\} ,$$

tj. množina všech bodů Y, které leží v ω a mají od daného bodu S vzdálenost 7.

Jestliže dvě množiny M, N mají tu vlastnost, že každý prvek jedné je současně prvkem druhé množiny a obráceně, potom píšeme $\mathsf{M} = \mathsf{N}$ a říkáme, že obě množiny se sobě *rovnají*. Symbolicky zapíšeme definici rovnosti dvou množin takto:

$$\mathsf{M} = \mathsf{N} \Leftrightarrow [x \in \mathsf{M} \Rightarrow x \in \mathsf{N};\ y \in \mathsf{N} \Rightarrow y \in \mathsf{M}] . \quad (1.1)$$

Přečtěme si (1.1) ještě jednou; říká se zde: *Množina* M *je rovna množině* N *právě tehdy, jestliže platí: a) když prvek x leží v* M, *pak leží také v* N; *b) když prvek y leží v* N, *pak leží též v* M.

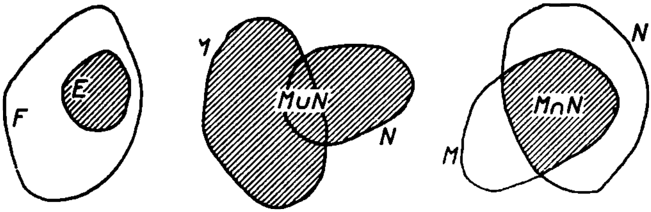
Jestliže množina E je *částí* množiny F, píšeme $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}$ (obr. 1a). Definice uvedené vlastnosti množiny E vzhledem k F je dána zápisem

$$\mathsf{E} \subset \mathsf{F} \Leftrightarrow [x \in \mathsf{E} \Rightarrow x \in \mathsf{F}] .$$

Skutečnost, že $E \subset F$, nevylučuje možnost $E = F$.

Sjednocení množin M, N označujeme $M \cup N$, *průnik* těchto množin $M \cap N$ (obr. 1b, 1c). Zřejmě platí:

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\},$$
$$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}.$$



Obr. 1a. Množina E je částí množiny F.
Obr. 1b. Sjednocení množin M, N.
Obr. 1c. Průnik množin M, N.

Pamatujme, že spojku nebo nechápeme v matematice nikdy ve smyslu vylučovacím; to ostatně plyne z definice alternativy. Do sjednocení množin $M \cup N$ patří proto každý prvek průniku $M \cap N$. Je snadné rozšířit průnik a sjednocení na více množin.

Předpokládejme, že M, N jsou dvě neprázdné množiny. Pomocí těchto množin můžeme vytvořit další množinu, kterou budeme označovat $M \times N$ a nazývat *kartézským součinem* množin M, N. Množinu $M \times N$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, v nichž x je prvek z množiny M a y je prvek z množiny N. Množina $M \times N$ je tedy definována zápisem

$$M \times N = \{[x, y] \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Důležitou množinou, s níž budeme často pracovat, je *množina všech reálných čísel.* Budeme ji označovat R_1. Pomocí množiny R_1 můžeme vytvořit jinou důležitou množinu, kterou nazýváme *aritmetickým prostorem dimenze* 2 a označujeme R_2. Množinu R_2 definujeme jako kartézský součin množiny R_1 se sebou samou, tj. $\mathsf{R}_2 = \mathsf{R}_1 \times \mathsf{R}_1$. Prvky množiny R_2 jsou tedy uspořádané dvojice reálných čísel. V tom smyslu třeba [2, 5] je jiná uspořádaná dvojice než [5, 2].

Množina $\mathsf{R}_n = \mathsf{R}_1 \times \mathsf{R}_1 \times \ldots \times \mathsf{R}_1$ (celkem n činitelů) je tzv. *aritmetický prostor* R_n *dimenze* n. Můžeme jej též definovat zápisem

$$\mathsf{R}_n = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid x_i \in \mathsf{R}_1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

1.3. Rozklad množiny

Tento odstavec je poněkud obtížnější. Čtenář jej může při prvním čtení textu bez většího rizika vynechat, doporučujeme však, aby se k němu přece jen vrátil. Bude na to později upozorněn.

Předpokládejme, že je dána neprázdná množina M. Sestrojme kartézský součin $\mathsf{M} \times \mathsf{M}$ a zvolme si množinu $\mathscr{R}$, která je podmnožinou v $M \times M$. Množinu $\mathscr{R}$ budeme nazývat *relací* na množině M. Pro každou uspořádanou dvojici prvků $[x, y] \in \mathsf{M} \times \mathsf{M}$ může nastat právě jedna z těchto možností:

$$1.\ [x, y] \in \mathscr{R},$$

$$2.\ [x, y] \notin \mathscr{R}.$$

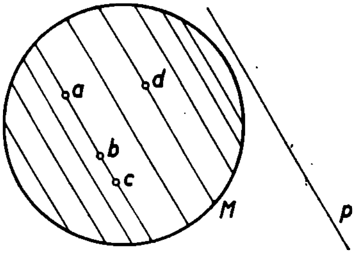
V prvém případě budeme říkat, že prvek x *je v relaci* $\mathscr{R}$ s prvkem y a budeme psát $x \mathscr{R} y$. V druhém případě budeme říkat, že prvek x *není v relaci* $\mathscr{R}$ s prvkem y a budeme psát $x \bar{\mathscr{R}} y$.

Z předcházejících úvah tedy vyplývá, že relace $\mathscr{R}$ na množině M je pravidlo, které o každé uspořádané dvojici prvků z M rozhoduje, zda první prvek je či není v relaci s druhým prvkem. S pojmem relace se setkáváme i v praktickém životě. Na množině M všech žáků jedné školy můžeme zavést relaci $\mathscr{R}$ mnoha způsoby, např. takto:

PŘÍKLAD I. Dvojice žáků A, B (v uvedeném pořadí) ze školy M je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže žák A je ze stejné školní třídy jako žák B.

PŘÍKLAD II. Dvojice žáků A, B (v uvedeném pořadí) ze školy M je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže žák A je menší než žák B.

Uveďme ještě příklad z geometrie.



Obr. 2. Rozklad množiny M.

PŘÍKLAD III. Na obr. 2 je znázorněna v dané rovině množina M, která je kruhem; v téže rovině leží přímka p. Dohodneme se, že o uspořádané dvojici $[a, b]$ bodů z kruhu M prohlásíme, že je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže body a a b leží na přímce rovnoběžné s přímkou p. Můžeme tedy psát $a \mathscr{R} a$ a dále pak (obr. 2): $a \mathscr{R} c$, $b \mathscr{R} c$, $b \overline{\mathscr{R}} d$ atd.

Relace $\mathscr{R}$ na množině M z příkladu III má tyto vlastnosti:

Jsou-li x, y, z libovolné prvky množiny M, pak platí:

$$\begin{aligned} &1.\ x \mathcal{R} x \quad \textit{(reflexivnost)}, \\ &2.\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x \quad \textit{(symetrie)}, \\ &3.\ (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z \quad \textit{(tranzitivnost)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Množina M z našeho příkladu III se skládá z úseček rovnoběžných s přímkou p. Říkejme těmto úsečkám *třídy*. Mají-li dvě nějaké množiny tu vlastnost, že jejich průnik je roven prázdné množině Θ, nazýváme takové množiny *disjunktní*. V tomto smyslu můžeme tedy o našich úsečkách mluvit jako o třídách navzájem disjunktních. Každé dva prvky téže třídy jsou zde v relaci $\mathcal{R}$, každé dva prvky z různých tříd nejsou v relaci $\mathcal{R}$. Každá třída je tedy vlastně množinou prvků, které jsou v relaci $\mathcal{R}$. Systém všech uvedených tříd (je to opět množina) nazýváme *faktorovou množinou* množiny M vzhledem k relaci $\mathcal{R}$. Užívá se pro ni označení $\mathsf{M}/\mathcal{R}$.

Pokusme se nyní o trochu obecnější pohled na věc. V uvedeném příkladě jsme rozdělili množinu M na disjunktní třídy a pomocí daného rozdělení jsme definovali na M relaci $\mathcal{R}$. Vzniká zcela zákonitě otázka: Když je dána na M relace $\mathcal{R}$, je možno pomocí této relace $\mathcal{R}$ rozdělit množinu M na disjunktní třídy tak, že každá jednotlivá třída T_x obsahuje právě všechny prvky y, pro které platí $x \mathcal{R} y$? Takovou třídu T_x bychom pak mohli zapsat ve tvaru $\mathsf{T}_x = \{y | x \mathcal{R} y\}$. Odpověď na danou otázku obsahuje věta 1.1; dříve však musíme zavést pojem *ekvivalence* na množině.

Definice 1.1. Na množině M je dána relace $\mathcal{R}$. Je-li tato relace reflexivní, symetrická a tranzitivní, nazývá se *ekvivalencí* na množině M.

K definici 1.1 dodejme jen to, že požadované vlastnosti jsou dány vztahy (1.2). Jako ilustrace nám poslouží příklady I—III; relace v příkladech I a III je ekvivalencí na M, relace z příkladu II není ekvivalencí na M (pokud má škola aspoň jednoho žáka).

Věta 1.1. *Na množině* M *je dána relace* $\mathscr{R}$*; pro každý prvek* $x \in \mathsf{M}$ *sestrojme třídu* $\mathsf{T}_x = \{y | x \mathscr{R} y\}$. *Relace* $\mathscr{R}$ *je ekvivalencí na* M *právě tehdy, když systém všech* T_x *tvoří disjunktní rozklad množiny* M.

Disjunktní rozklad množiny M znamená, že pro libovolné dvě třídy T_x, T_z platí

$$\mathsf{T}_x = \mathsf{T}_z \quad \text{nebo} \quad \mathsf{T}_x \cap \mathsf{T}_z = \emptyset . \tag{1.3}$$

Důkaz věty vynecháme, i když není obtížný. Stačí totiž ukázat, že podmínky (1.2) a (1.3) jsou vzájemně ekvivalentní.

Je zřejmé, že každá třída T_x disjunktivního rozkladu je jednoznačně určena libovolným svým prvkem (tzv. *reprezentantem*). Později se na to odvoláme.

1.4. Problém zavedení euklidovského prostoru E_3

Převážná část našich úvah bude prováděna v trojrozměrném prostoru, který nazýváme euklidovským prostorem a označujeme E_3. Definovat euklidovský prostor E_3 není ovšem věc tak jednoduchá, jak by se mohlo na první pohled zdát. Zdůrazněme předem, že by bylo přinejmenším pochybné říci, že E_3 je prostor, ve kterém žijeme. Taková definice by totiž nemohla být podkladem žádné matematické úvahy, s takovou definicí se prostě řečeno nedá pracovat.

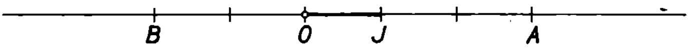
Nejčastěji bývá prostor E_3 chápán jako množina prvků zvaných body, která má jisté pevně stanovené vlastnosti. Říkáme také, že E_3 je množina bodů vybavená jistou strukturou. Budovat ovšem prostor E_3 axiomaticky je práce nesmírně obtížná. Poprvé se tímto problémem zabýval slavný řecký geometr *Euklides* (365? až 300? př. n. l.) ve své knize *Základy*. Moderně celou problematiku vyčerpávajícím způsobem zpracoval neméně slavný německý matematik *D. Hilbert* (1862 až 1943) v proslulé knize *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)*.

Jistě čekáte, jak se s tímto problémem vypořádáme v naší knížce. Cílem této publikace není konstrukce euklidovského prostoru E_3 a z hlediska našich potřeb bude stačit, seznámíme-li se jen s těmi vlastnostmi E_3, které jsou pro další účely nutné; to nebude nijak obtížné, neboť většinu těchto vlastností zná čtenář ze střední školy. Skutečnost je ovšem taková, že geometrie není ve středoškolských učebnicích budována zcela důsledně a nelze to mít ani za zlé. O hlubší pohled se pokusíme proto ve 4. kapitole, kde bude naznačena konstrukce prostoru afinního a euklidovského pomocí vektorových prostorů.

1.5. Euklidovská přímka

Na dané přímce o zvolíme úsečku OJ délky 1 (obr. 3). Bod O dělí přímku o na dvě polopřímky. Polopřímku OJ nazveme *kladnou* poloosou o_+, polopřímku k ní opačnou nazveme *zápornou* poloosou o_-. Každému bodu X přiřadíme na ose o číslo x a nazveme je *souřadnicí* bodu X. Přiřazení provedeme takto:

a) Je-li $X \in o_+$, pak $x = OX$.
b) je-li $X \in o_-$, pak $x = -OX$.



Obr. 3. Souřadný systém na přímce.

Všechny vnitřní body kladné poloosy o_+ mají proto kladné souřadnice, všechny vnitřní body záporné poloosy o_- mají souřadnice záporné; bod O má souřadnici 0 a říkáme mu *počátek* soustavy souřadnic. Jelikož každému bodu X odpovídá jediné reálné číslo a každému reálnému číslu jediný bod, mluvíme o vzájemně jednoznačném zobrazení. Nemůže proto dojít k nedorozumění, jestliže bod X o souřadnici x napíšeme ve tvaru $X = [x]$. Podle této dohody platí pro body v obr. 3 $O = [0]$, $J = [1]$, $A = [3]$, $B = [-2]$.

Vzdálenost d libovolných dvou bodů $X = [x]$, $Y = [y]$ je určena velikostí úsečky XY. Platí: $d = |x - y|$. Není problémem ověřit uvedený vztah, ať je poloha bodů X, Y jakákoliv. Při zvolené jednotkové úsečce OJ je číslo d nezávislé na volbě bodu O, budeme proto říkat, že vzdálenost dvou bodů je nezávislá na volbě soustavy souřadnic.

Pro každou dvojici bodů $X = [x]$, $Y = [y]$, kde $x < y$, a střed $S = [s]$ úsečky XY platí:

$$s = x + \frac{|x - y|}{2} = x + \frac{y - x}{2} = \frac{x + y}{2}. \quad (1.4)$$

Je-li $x > y$, dospějeme k témuž závěru. Přímku o, o níž jsme dosud jednali, nazýváme euklidovskou přímkou E_1. Na E_1 zavedeme další důležitý pojem.

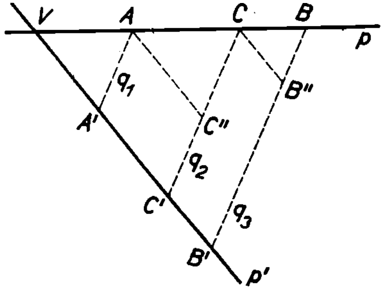
Definice 1.2. Na přímce E_1 jsou dány tři body $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, přičemž $b \neq c$. Číslo $(c - a) : (c - b)$ nazýváme *dělicím poměrem* uspořádané trojice bodů A, B, C a označujeme (ABC); píšeme pak

$$(ABC) = \frac{c - a}{c - b}. \tag{1.5}$$

Z (1.5) je vidět, že (ABC) je vlastně, snad až na znaménko, poměr vzdáleností $AC : BC$. Nechť $a < b$; jestliže $(ABC) < 0$, bod C odděluje body A, B. Když $0 < (ABC) < 1$, odděluje bod A body C, B. Pokud $(ABC) = 0$, je $A = C$; a konečně případ $(ABC) > 1$ znamená, že bod B odděluje body A, C (obr. 4).

Obr. 4. Dělicí poměr (ABC).

Vraťme se nyní trochu k planimetrii (obr. 5). Mějme dvě různoběžné přímky p, p', které se protínají v bodě V. Libovolnými body A, B, C ($B \neq C$) přímky p veďme rovnoběžky $q_1 \parallel q_2 \parallel q_3$ tak, že tyto rovnoběžky protnou přímku p' v bodech A', B', C' ($B' \neq C'$). Pořadí bodů A, B, C na p je stejné jako pořadí bodů A', B', C' na p'; leží-li bod C na p mezi body A, B, pak C' leží na p' mezi body A', B' atd. Rovnoběžky s přímkou p' vedené body A, C protnou přímky q_2, q_3 po řadě v bodech C'', B''. Z planimetrie pak víme, že $\triangle\, AC''C \sim \triangle\, CB''B$, proto $AC : BC = A'C' : B'C'$. Řekli jsme si již, že poměry $AC : BC$ a $A'C' : B'C'$ určují po řadě — až snad na znaménko — dělicí poměry (ABC) a $(A'B'C')$. Dokázali jsme tím velmi důležité tvrzení:



Obr. 5. Dělicí poměr v rovnoběžném promítání.

Věta 1.2. *Rovnoběžným promítáním se dělicí poměr nemění.*

Příklad 1.1. Je-li S střed úsečky AB, pak zřejmě $(ABS) = -1$.

Příklad 1.2. Leží-li bod M na úsečce AB a platí $AM : BM = 2 : 5$, pak $(ABM) = -\frac{2}{5}$.

Příklad 1.3. Určete souřadnici bodu C, víte-li, že $(ABC) = \lambda$, kde $\lambda \neq 1$.

Řešení: Podle (1.7) máme

$$\frac{c - a}{c - b} = \lambda\,;$$

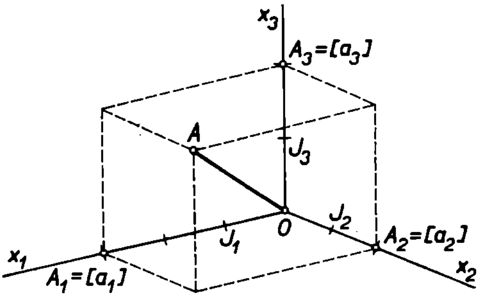
odtud plyne:

$$c = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}.$$

1.6. Euklidovský prostor E_3

Zvolme v prostoru tři různoběžky, z nichž každé dvě jsou vzájemně kolmé; jejich společný bod označme O. Na jedné z nich zvolme úsečku OJ_1 délky 1 a na dvou zbývajících sestrojme body J_2, J_3 tak, aby úsečky OJ_1, OJ_2, OJ_3 byly shodné. Na přímkách OJ_1, OJ_2, OJ_3 můžeme pak zavést souřadnice bodů naprosto stejně, jako jsme to udělali s přímkou OJ v odstavci 1.5 (obr. 6).

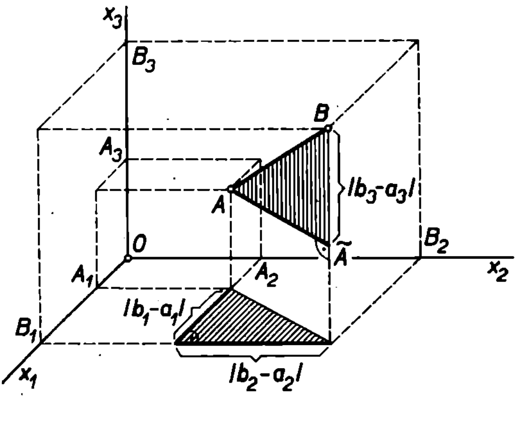
Uspořádanou čtveřici bodů $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ nazveme *kartézskou soustavou souřadnic* v E_3. Pro přímky OJ_1, OJ_2, OJ_3, kterým říkáme *souřadnicové osy*, zaveďme tradiční označení $OJ_1 = x_1$, $OJ_2 = x_2$, $OJ_3 = x_3$. Dvojice souřadnicových os určují tři roviny, kterým říkáme *souřadnicové roviny*.



Obr. 6. Kartézská soustava souřadnic v E_3.

Zvolme v E_3 libovolný bod A a veďme tímto bodem roviny, které jsou rovnoběžné s rovinami souřadnicovými. Pomocné roviny protínají osy x_1, x_2, x_3 v jistých bodech, které označíme A_1, A_2, A_3 (obr. 6). Každý z bodů A_i ($i = 1, 2, 3$) má na své ose x_i jednoznačně určenou souřadnici a_i. Bodu A jsou jednoznačně přiřazeny body A_i a tím také tři pevná čísla a_i. Zvolme obráceně na každé souřadnicové ose x_i bod A_i o souřadnici a_i; bodům A_i je pak jednoznačně přiřazen bod A jako vrchol jistého kvádru s tělesovou úhlopříčkou OA.

Můžeme tedy říci: *V dané kartézské soustavě souřadnic* $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ *je každému bodu* $A \in \mathsf{E}_3$ *přiřazena jednoznačně uspořádaná trojice čísel a každou uspořádanou trojicí čísel je stanoven jediný bod* $A \in \mathsf{E}_3$. Uspořádanou trojici čísel a_1, a_2, a_3 nazýváme *kartézskými souřadnicemi* bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$. V obr. 6. je $A = [3; 2; 2]$. Dodejme ještě, že bodům souřadnicových os přiřadíme také tři souřadnice; dvě z nich jsou vždy nulové, třetí je určena souřadnicí bodu na příslušné ose. V obr. 6. je $A_1 = [3, 0, 0)$, $A_2 = [0, 2, 0]$, $A_3 = [0, 0, 2]$.



Obr. 7. Vzdálenost bodů A, B.

Zvolme v E_3 dva různé body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Střed S úsečky AB sestrojíme tak, že přímku AB považujeme na chvíli za E_1 a žádáme, aby bylo $AS = BS$. Z odstavce 1.5 víme, že poloha bodu S je určena jednoznačně. Označíme kolmé průměty bodů A, B, S do souřadnicových os opět A_i, B_i, S_i ($i = 1, 2, 3$). Užitím známých vět o podobnosti trojúhelníků zjistíme, že body S_i jsou středy úseček A_iB_i; odtud okamžitě máme pro souřadnice středu $S = [s_1, s_2, s_3]$ úsečky AB:

$$s_i = \frac{a_i + b_i}{2} \; (i = 1, 2, 3)\,. \tag{1.8}$$

Vzdálenost d libovolných dvou bodů A, B je pak dána vzorcem

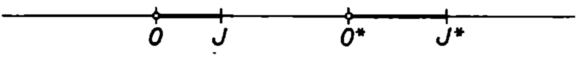
$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,. \tag{1.9}$$

K důkazu (1.9) stačí použít Pythagorovy věty na trojúhelník $AB\tilde{A}$ (obr. 7).

1.7. Afinní geometrie přímky

Dříve, než se pokusíme o přesnější vymezení některých pojmů, vraťme se k euklidovské přímce E_1, na níž je zvolena soustava souřadnic $\{O, J\}$; říkejme jí kartézská. Zvolme na E_1 dvojici různých bodů O^*, J^* (obr. 8) a domluvme se na těchto požadavcích:

1. nechť každému bodu $X = [x]$ odpovídá jisté číslo $\bar{x}$, které vyhovuje rovnici $\bar{x} = \alpha x + \beta$; kde α, β jsou daná čísla, $\alpha \neq 0$;
2. bodu $O^* = [o^*]$ ať je danou rovnicí přiřazeno číslo nula, bodu $J^* = [j^*]$ ať odpovídá číslo 1.



Obr. 8. Afinní souřadný systém na přímce.

Tím jsou jednoznačně určeny konstanty α, β. Dosadíme-li totiž za x do rovnice $\bar{x} = \alpha x + \beta$ nejprve o^* a pak j^*, získáme soustavu rovnic

$$\alpha o^* + \beta = 0\,,$$
$$\alpha j^* + \beta = 1\,,$$

z níž plyne:

$$\alpha = \frac{1}{j^* - o^*}\,, \quad \beta = \frac{o^*}{o^* - j^*}\,.$$

Různost bodů O^*, J^* má za následek rozdílnost čísel o^*, j^*, popsaným způsobem odpovídá tedy každému bodu $X = [x]$ jediné číslo

$$\bar{x} = \frac{1}{j^* - o^*}\,x + \frac{o^*}{o^* - j^*}\,. \tag{1.9}$$

Čísla (1.9) považujeme za jakési nové tzv. *afinní* souřadnice bodů X. Počítejme pomocí nich dělicí poměr bodů A, B, C, který označíme dočasně $(\overline{ABC})$. Máme:

$$(\overline{ABC}) = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{b}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{j^* - o^*}\,c + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\frac{1}{j^* - o^*}\,a + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right)}{\left(\frac{1}{j^* - o^*}\,c + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\frac{1}{j^* - o^*}\,b + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right)} =$$

$$= \frac{c - a}{c - b} = (ABC)\,.$$

Určeme dále pomocí souřadnic (1.9) vzdálenost $\bar{d}$ libovolných dvou bodů X, Y:

$$\bar{d} = |\bar{x} - \bar{y}| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{j^* - o^*}x + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\frac{1}{j^* - o^*}y + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right)\right| =$$

$$= \frac{|x - y|}{|j^* - o^*|}.$$

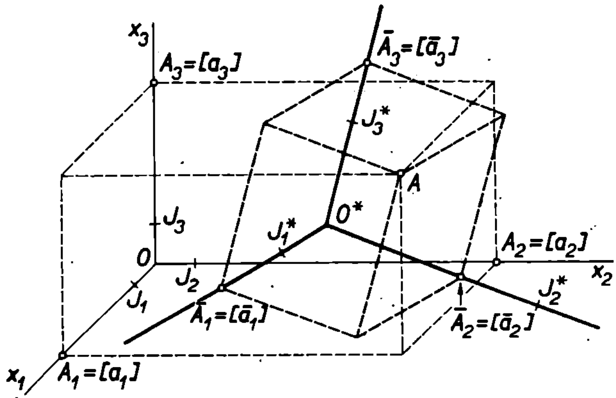
Zjistili jsme, že $(\overline{ABC}) = (ABC)$; dělicí poměr se nemění a nezávisí proto na výběru bodů O^*, J^*. Vzdálenost dvou bodů se však nezmění pouze v tom případě, když úsečka O^*J^* je shodná s jednotkovou úsečkou OJ.

Řekněme, že máme k dispozici pouze čísla (1.9) a neznáme kartézské souřadnice bodů. Celou věc si můžeme představit třeba tak, že „absolutní jednotka" je nám utajena. Jakmile zvolíme na přímce E_1 dva různé body O^*, J^* a přiřadíme jim po řadě čísla 0, 1, máme v tom okamžiku na E_1 definovánu soustavu souřadnic $\{O^*, J^*\}$, které budeme říkat *afinní soustava souřadnic.* Kartézská soustava se tedy jeví jako zvláštní případ afinní soustavy souřadnic.

Jestliže neznáme vztah k původní kartézské soustavě $\{O, J\}$, vzniká přirozeně otázka, kterým geometrickým otázkám můžeme věnovat svou pozornost bez nebezpečí, že naše závěry budou chybné. Je-li dána afinní soustava souřadnic $\{O^*, J^*\}$, ztrácí význam pojem vzdálenosti; z našich úvah však plyne, že se zachovává dělicí poměr (ABC). Můžeme tedy porovnávat úsečky bez znalosti „absolutní jednotky" a vše je v nejlepším pořádku. Geometrii, kterou můžeme na E_1 provádět pomocí afinních souřadnic, nazveme *afinní geometrií přímky.*

1.8. Afinní geometrie prostoru E_3

V odstavci 1.7 jsme si dost podrobně ujasnili, co rozumíme afinní geometrií přímky. Také jsme se již zabývali euklidovským prostorem E_3 a zavedli jsme tam kartézskou soustavu souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$. Přitom, zhruba řečeno, je pro nás euklidovská geometrie v E_3 souhrnem definic a vět, které získáme při studiu prostoru E_3. V našich dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že je dána nějaká pevná soustava souřadnic (afinní či kartézská). Transformací soustavy souřadnic se zabývat nebudeme, zabralo by to příliš mnoho času. Abychom si však ujasnili, co rozumíme afinní geometrií prostoru E_3, musíme se na tomto místě transformací soustavy souřadnic v jistém směru zabývat. Půdu k tomu máme však již připravenu.



Obr. 9. Afinní soustava souřadnic v E_3.

Předpokládejme, že v E_3 je dána kartézská soustava souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ a zvolme čtyři body O^*, J_1^*,

J_2^*, J_3^* tak, že neleží v jedné rovině; stejně jako jsme to udělali v předchozím odstavci s přímkou, přiřaďme bodu O^* číslo nula a každému bodu J_i^* $(i = 1, 2, 3)$ číslo 1. Pak lze každému bodu $X \in \mathsf{E}_3$ přiřadit rovnicí $\bar{x}_i = \alpha_i x_i + \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ jednoznačně uspořádanou číselnou trojici $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ a čísla $\bar{x}_i$ nazvat *afinními souřadnicemi* bodu X. Ryze geometricky vypadá celá věc tak, že nové souřadnicové osy nejsou obecně vzájemně kolmé a úsečky $O^*J_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ nejsou obecně shodné (obr. 9). Souřadnice libovolného bodu A získáme — stejně jako v případě kartézských souřadnic — pomocí průmětů $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ do souřadnicových os (srov. odst. 1.6).

Jak jsme ukázali v odstavci 1.5, rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr bodů (ABC). Bez ohledu na výchozí kartézskou soustavu (tedy bez znalosti „absolutní jednotky") můžeme v E_3 studovat ty otázky, které se týkají vzájemné polohy geometrických objektů, a také všechny vztahy, které lze odvodit pomocí dělicího poměru. Nemůžeme však věnovat pozornost těm problémům, v nichž vystupuje vzdálenost dvou bodů (tj. velikost úsečky) a velikost úhlu, neboť tyto dva pojmy spolu velmi úzce souvisí.

Čtenář si může představit, že se nachází v této situaci: Chce studovat vlastnosti prostoru E_3, ale „zapomněl" vzít s sebou měřítko a úhloměr. Má však jistý „přístroj", který mu dovoluje

a) rozhodnout o vzájemné poloze dvou přímek,

b) na každé dané přímce porovnávat úsečky pomocí dělicího poměru,

c) rozhodnout o vzájemné poloze přímky a roviny, dvou rovin atd.

Tyto a jim podobné otázky tvoří afinní geometrii prostoru E_3.

POZNÁMKA 1.1. V matematice se snažíme, aby naše úvahy měly co nejširší dosah, proto saháme často k co nejabstraktnějšímu pojetí. V našem případě jsme zvolili trochu názornější přístup. Bylo by důslednější zavést jistý afinní prostor A_3, v němž by nebyla definována tzv. *euklidovská metrika.* Prostor A_3 by byl obecnějším prostorem než E_3 a studiem A_3 bychom automaticky dělali afinní závěry pro E_3, ale také pro jiné prostory, jako je tzv. Minkowského prostor apod.

Řekli jsme si ovšem již na jiném místě, že se v úvodní kapitole omezíme jen na nutné minimum nových pojmů z hlediska potřeb 2. a 3. kapitoly. Při definici prostoru A_3 se totiž setkáváme s obdobnými potížemi, jako při definici E_3. Hloubavějšímu čtenáři je určena 4. kapitola, v níž je položen solidnější základ pro studium obou uvedených prostorů.