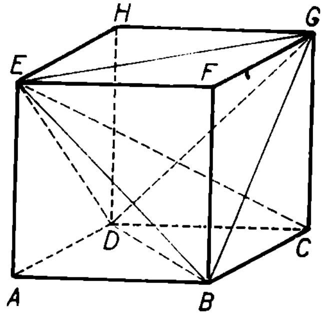
3. kapitola

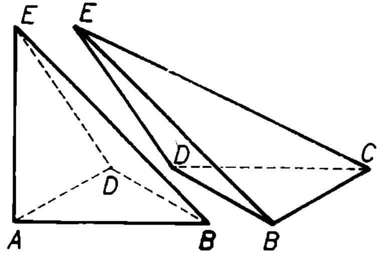
EULEROVA VĚTA

Každý mnohoúhelník v rovině lze rozložit v trojúhelníky. To se také provádí; vzpomeňte si na výpočet obsahu různoběžníka. V prostoru lze podobně každý mnohostěn rozložit na čtyrstěny. Na obr. 31 je jako příklad zobrazena krychle a její rozklad na mnohostěny. V obr. 31abc jsou jednotlivé čtyrstěny zobrazeny každý zvlášť. Všechny tyto čtyrstěny mají společný vrchol *E*. Podotkněme však, že to není jediný



Obr. 31

rozklad. Je možné např. zvolit libovolný bod *L* (buď uvnitř krychle, nebo někde na její stěně), který je pak společným vrcholem všech čtyrstěnů, na něž lze krychli rozložit. Rozklady mnohostěnů na čtyrstěny se provádějí vždy,

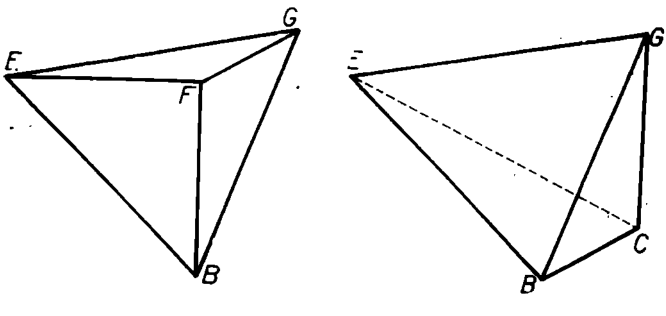


Obr. 31a

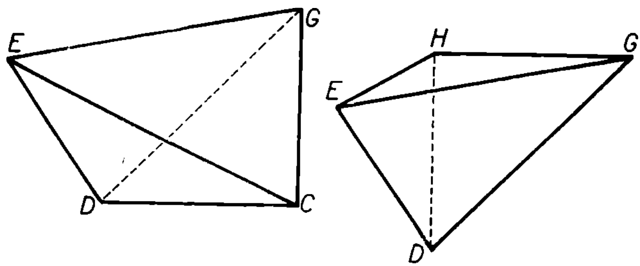
chceme-li elementárními prostředky zjistit objem složitějších těles. Čtyrstěn se nám tu podle toho jeví jako základ, z něhož lze všechny ostatní mnohostěny vytvořit.

V dalších řádcích budeme potřebovat pojem trojhranu a konvexního n-hranu.

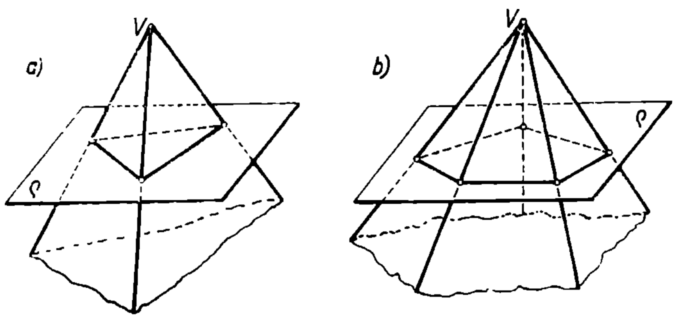
Definice. Trojhran je množina všech polopřímek, které mají společný počátek V a přitom protínají daný trojúhelník, jehož rovina vrcholem V neprochází. (Obr. 32a.) Ty polopřímky, které procházejí vrcholy daného trojúhelníka, se nazývají hrany trojhranu, bod V je vrchol trojhranu.



Obr. 31b



Obr. 31c



Obr. 32a

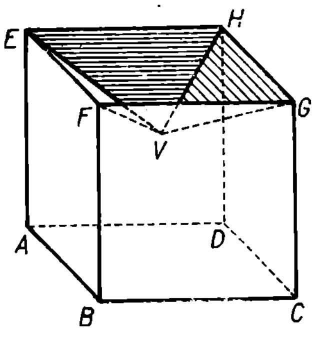
Obr. 32b

Podobně vypadá definice n-hranu.

Definice. Nechť je dána rovina ϱ, v ní konvexní n-úhelník a mimo rovinu ϱ je bod V. Množina všech polopřímek o společném počátku V, které protínají daný n-úhelník, je konvexní n-hran. Bod V je jeho vrchol a ty polopřímky, které procházejí vrcholy n-úhelníka, se nazývají hrany n-hranu. (Obr. 32b.)

Z každého vrcholu V mnohostěnu vychází n ($n \geqq 3$) hran. Tyto hrany náleží n-hranu s vrcholem V. Budeme stručně říkat, že hrany mnohostěnu ve vrcholu V tvoří n-hran. Tak např. ve všech vrcholech krychle jsou trojhrany (říká se, že krychle je mnohostěn třívalentní). Čtyrstěn je též mnohostěn třívalentní. Pravidelný osmistěn je mnohostěn čtyřvalentní. Vysvětlete sami.

Čtyrstěn, krychle, pravidelný osmistěn, hranoly a jehlany, s kterými jste se ve škole seznámili, náleží mezi konvexní útvary v prostoru. (V knížce *Konvexní útvary*, která vyšla v této edici, najde čtenář poučení o konvexních útvarech.) Základní vlastnost těchto útvarů je ta, že konvexní těleso leží vždy v témž poloprostoru, který je vyťat rovinou kterékoli jeho stěny nebo kterékoli jeho tečné roviny. Těleso znázorněné v obr. 33 (je to krychle s jehlanovitou prohlubeninou) není konvexní, neboť rovina stěny



Obr. 33

EFV mnohostěn protíná tak, že část mnohostěnu leží v jednom poloprostoru vyťatém rovinou EFV a druhá část leží v poloprostoru opačném.

V celé této kapitole se budeme zabývat jen konvexními mnohostěny.

Definice. Úhel, sevřený dvěma hranami mnohostěnu se společným vrcholem, nazýváme hranový úhel.

Otázky. Jak velké hranové úhly jsou na krychli, na pravidelném čtyrstěnu? Jak velké hranové úhly jsou na pravidelném čtyřbokém jehlanu, jehož plášť je složen z rovnostranných trojúhelníků?

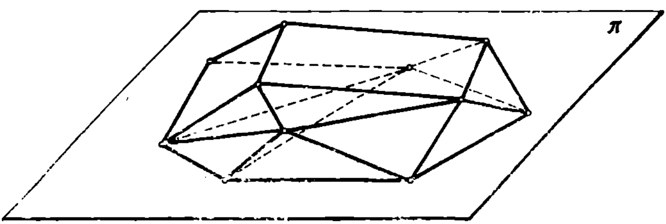
Příklad 1. Dokažte, že součet všech hranových úhlů daného konvexního mnohostěnu je roven plnému úhlu znásobenému počtem vrcholů, který je zmenšen o dvě.

Než přistoupíme k důkazu, zapíšeme vyslovenou větu rovnicí. Je-li σ součet všech hranových úhlů, v je počet vrcholů daného tělesa, platí

$$\sigma = (v - 2).4R.$$

Dříve, než přistoupíme k důkazu, uvědomíme si dvě věci. a) Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $(n - 2)\,2R$. b) Každý n-úhelník, který neleží v promítací rovině, se promítne do n-úhelníku. Důsledek toho je, že se promítáním nezmění součet vnitřních úhlů.

Důkaz (obr. 34). Daný mnohostěn, který má v vrcholů, promítněme rovnoběžně do libovolné roviny π. Směr pro-



Obr. 34

mítání volme však tak, aby se žádná stěna nepromítala jako úsečka a aby žádné dva vrcholy neměly společný průmět. Potom průmětem mnohostěnu je nějaký konvexní mnohoúhelník M. Přitom v_1 vrcholů daného mnohostěnu má své průměty na obvodě mnohoúhelníka M a $v - v_1$ vrcholů má své průměty uvnitř mnohoúhelníka M. Součet σ všech hranových úhlů je součet všech vnitřních úhlů všech stěn daného mnohostěnu a proto se promítnutím nemění. Vypočteme jej tedy nejlépe v průmětu M. Součet σ se skládá jednak ze součtu průmětů všech hranových úhlů při vnitřních vrcholech

$$(v - v_1).4R,$$

a jednak ze součtu průmětů hranových úhlů při obrysových vrcholech

$$(v_1 - 2).2R.$$

(Je to součet vnitřních úhlů ve v_1-úhelníku.) Tento součet je nutné zdvojnásobit, neboť každý vnitřní úhel mnohoúhelníku M náleží jednak viditelné části mnohostěnu, a jednak neviditelné. Tudíž

$$\sigma = (v - v_1).4R + (v_1 - 2).4R =$$
$$= (v - 2).4R.$$

Tím je důkaz proveden. Právě dokázaná věta se nazývá *Descartova*. Poslouží nám k rozřešení dalšího příkladu.

Příklad 2. V konvexním mnohostěnu označme v, h, s po řadě počet vrcholů, hran a stěn. Pak platí Eulerova věta: Součet počtu vrcholů a počtu stěn je roven počtu hran zvětšenému o dvě. Zápis tedy je

$$s + v = h + 2.$$

Důkaz. Předpokládejme, že daný mnohostěn obsahuje trojúhelníky v počtu s_3, čtyrúhelníky v počtu s_4 atd. až k-úhelníky v počtu s_k kde $k \geqq 3$. Platí pak

$$s = s_3 + s_4 + \ldots + s_k = \sum_{n=3}^{k} s_n \,. \tag{1}$$

Počet hran daného mnohostěnu je

$$h = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \ldots + k\,s_k) = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k} n\,s_n. \tag{2}$$

Nechť daný mnohostěn má v_3 vrcholů, v nichž hrany tvoří trojhrany, v_4 vrcholů, v nichž hrany tvoří čtyrhrany atd. až v_r vrcholů, v nichž hrany tvoří r-hrany ($r \geqq 3$). Pro počet vrcholů a hran platí

$$v = v_3 + v_4 + \ldots + v_r, \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}(3v_3 + 4v_4 + \ldots + r\,v_r)\,. \tag{4}$$

Vypočteme součet všech hranových úhlů. Znamená to vypočítat součet všech vnitřních úhlů všech stěn mnohohranu. Dostaneme

$$\sigma = s_3 . 2R + s_4 . 4R + \ldots + s_k . (k-2) . 2R =$$

$$= [s_3 + 2s_4 + \ldots + (k-2)s_k] . 2R = 2R \sum_{n=3}^{k} (n-2)s_n \,.$$

Z rovnic (1) a (2) vyplývá

$$2h - 2s = \sum_{n=3}^{k} n . s_n - \sum_{n=3}^{k} 2 . s_n = \sum_{n=3}^{k} (n-2) . s_n \,.$$

Tento výraz dosaďme do výrazu pro σ a obdržíme

$$\sigma = 2R.(2h - 2s) = 4R.(h - s).$$

Porovnáme-li nyní tento vztah s Descartovou větou, dojdeme k Eulerově rovnici

$$s + v = h + 2.$$

Poznámka. Eulerovu rovnici jsme odvodili za předpokladu, že jde o konvexní těleso. Ukazuje se však, že platí i pro některá nekonvexní tělesa. Poněvadž se v této publikaci budeme zabývat jen konvexními tělesy, postačí nám Eulerova věta odvozená za užších předpokladů. — Mnohostěny, splňující právě odvozenou rovnici, se nazývají Eulerovy. Konvexní mnohostěny jsou Eulerovy.

Příklad 3. Dokažte, že o konvexních mnohostěnech platí

$$1\text{a)}\quad \frac{1}{2}s + 2 \leqq v \leqq 2s - 4,$$

$$1\text{b)}\quad \frac{1}{2}v + 2 \leqq s \leqq 2v - 4.$$

$$2\text{a)}\quad \frac{3}{2}s \leqq h \leqq 3s - 6,$$

$$2\text{b)}\quad \frac{3}{2}v \leqq h \leqq 3v - 6.$$

$$3\text{a)}\quad \frac{1}{3}h + 2 \leqq s \leqq \frac{2}{3}h,$$

$$3\text{b)}\quad \frac{1}{3}h + 2 \leqq v \leqq \frac{2}{3}h.$$

Důkaz. a) Stěny každého mnohostěnu jsou nějaké n-úhelníky, kde $n \geqq 3$. Proto každý mnohostěn má nejméně $\frac{3}{2} s$ hran, tj.

$$h \geqq \frac{3}{2} s. \tag{5}$$

Podobně, každý vrchol mnohostěnu je společný aspoň třem hranám a proto

$$h \geqq \frac{3}{2} v. \tag{6}$$

Vztah (5) sečteme s Eulerovou rovnicí a dostaneme

$$v \geqq \frac{1}{2} s + 2. \tag{7}$$

Podobně Eulerova rovnice a vztah (6) dají

$$v \leqq 2 s - 4. \tag{8}$$

Vztahy (7) a (8) jsou již vztah 1a).

Nerovnostem (7) a (8) je možné dát tvar

$$s \leqq 2 v - 4, \tag{9}$$

$$s \geqq \frac{1}{2} v + 2 \tag{10}$$

a tím jsme došli k vztahu 1b).

b) Vztah (6) psaný v tvaru

$$\frac{2}{3} h \geqq v \tag{11}$$

sečteme s Eulerovou rovnicí. Dojdeme tak k nerovnosti

$$h \leqq 3 s - 6, \tag{12}$$

což s nerovností (5) dává vztah 2a).

Vztahu (5) dejme tvar

$$\frac{2}{3} h \geqq s \tag{13}$$

a sečtěme jej s Eulerovou rovnicí. Tím dostaneme

$$h \leqq 3v - 6, \tag{14}$$

což spojeno s (6) dá vztah 2b).

c) Vztah (12) pišme v tvaru

$$\frac{1}{3} h + 2 \leqq s, \tag{15}$$

což se vztahem (13) dává vztah 3a).

Nerovnost (14) psaná ve formě

$$\frac{1}{3} h + 2 \leqq v$$

spolu se vztahem (11) dá 3b).

Příklad 4. V každém konvexním mnohostěnu platí, že součet počtu trojúhelníkových stěn a počtu vrcholů, v nichž jsou trojhrany, je roven nejméně číslu 8.

Důkaz. Počet k-úhelníkových stěn daného mnohostěnu označme s_k. Nechť na mnohostěnu jsou nejvýše n-úhelníky ($n \geqq 3$). Pak

$$s = s_3 + s_4 + \ldots + s_n. \tag{16}$$

Počet vrcholů, v nichž hrany tvoří r-hran, označme v_r a nechť mezi nimi jsou nejvýše m-hrany. Potom

$$v = v_3 + v_4 + \ldots + v_m, \tag{17}$$

přičemž n, m jsou přirozená čísla rovna nejméně třem. Obecně ovšem $n \neq m$. Počet hran se dá vyjádřit dvěma způsoby:

$$2h = 3s_3 + 4s_4 + \ldots + ns_n, \qquad (18)$$
$$2h = 3v_3 + 4v_4 + \ldots + mv_m. \qquad (19)$$

Eulerovu rovnici pišme poněkud v jiném tvaru, do něhož hned dosazujme z rovnic (18) a (19).

$$4s + 4v = 2h + 2h + 8 =$$
$$= 8 + (3s_3 + 4s_4 + \ldots + ns_n) + (3v_3 + 4v_4 + \ldots$$
$$\ldots + mv_m) = 8 + 3(s_3 + v_3) + 4(s_4 + v_4) + \ldots$$

Za s a v dosaďme z rovnic (16) a (17). Po kratší úpravě dojdeme k rovnici

$$s_3 + v_3 = 8 + (s_5 + v_5) + 2(s_6 + v_6) + \ldots,$$

z níž plyne

$$s_3 + v_3 \geqq 8,$$

jak jsme měli dokázat.

Zajímavý důsledek právě dokázané věty je tento: Jestliže žádná stěna Eulerova mnohostěnu není trojúhelník, pak nutně musí mít aspoň 8 vrcholů, v nichž hrany tvoří trojhrany. Ale také duálně: Jestliže v žádném vrcholu Eulerova mnohostěnu netvoří hrany trojhran, pak nutně musí mít aspoň 8 trojúhelníkových stěn.

Poznámka. Zmínili jsme se o dualitě a tu je potřebí tento pojem objasnit. Dá se to říci stručně: Každá věta, vyslovená o vrcholech, stěnách a hranách mnohostěnu, zůstává v platnosti, zaměníme-li v ní slovo vrchol (stěna) slovem stěna (vrchol) a slovo hrana ponecháme. Přitom provedeme ještě příslušné mluvnické úpravy. Pěkným příkladem duality jsou vzorce 1a a 1b, 2a a 2b, 3a a 3b na str. 71. Eulerova věta je sama k sobě duální.

Příklad 5. Neexistuje Eulerův mnohostěn, mezi jehož stěnami by se nevyskytoval ani trojúhelník, ani čtyrúhelník, ani pětiúhelník. — Duální tvrzení: Neexistuje Eulerův mnohostěn, který by neměl vrchol ani s trojhranem, ani se čtyrhranem, ani s pětihranem.

Důkaz. a) Eulerovu větu pišme v tvaru

$$s = 2 + h - v$$

a za h dosaďme z rovnice (19) a za v z rovnice (17); dojdeme tak k rovnici

$$s = 2 + \frac{1}{2}(v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + 5v_7 + \ldots),$$

$$2s = 4 + v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + 5v_7 + \ldots \quad (20)$$

My však víme, že (str. 71, vzorec 2a)

$$h \geqq \frac{3}{2}s \Rightarrow 4h \geqq 6s.$$

Do této nerovnosti dosaďme z rovnice (20) a z rovnice (19).

$$6v_3 + 8v_4 + 10v_5 + 12v_6 + 14v_7 + \ldots \geqq$$
$$\geqq 12 + 3v_3 + 6v_4 + 9v_5 + 12v_6 + 15v_7 + \ldots$$

Upravíme:

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 \geqq 12 + v_7 + \ldots .$$

Z toho je již správnost vysloveného tvrzení patrna. Kdyby totiž bylo

$$v_3 = v_4 = v_5 = 0,$$

potom by platilo

$$0 \geqq 12 + v_7 + \ldots ,$$

což je vyloučeno.

b) Důkaz duální věty přenechávám čtenáři.

V této publikaci byla učiněna několikrát zmínka o pravidelném čtyrstěnu. Ten náleží mezi tzv. pravidelné mnohostěny. Krychle je také pravidelný mnohostěn. Existuje jen pět pravidelných mnohostěnů. To ostatně ukážeme v následujících řádcích.

Definice. Pravidelný mnohostěn je takový konvexní mnohostěn, který je omezen vesměs pravidelnými mnohoúhelníky, navzájem shodnými.

Za povšimnutí stojí, že každý pravidelný mnohostěn je téže valence (vzhledem k n-hranům ve vrcholech).

Příklad 6. Dokažte toto tvrzení: Existuje právě pět pravidelných mnohostěnů, a to pravidelný čtyrstěn, krychle, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn.

Důkaz. Počet vrcholů, stěn a hran označme po řadě v, s, h.

a) Předpokládejme, že pravidelný mnohostěn je omezen rovnostrannými trojúhelníky a pak mohou nastat tyto případy.

α) Mnohohran je třívalentní, tj. v každém jeho vrcholu je trojhran. Počet jeho stěn je

$$s = \frac{v.3}{3} = v.$$

Pro počet hran dostaneme

$$h = \frac{3.s}{2} = \frac{3.v}{2},$$

neboť každá stěna má tři hrany. Dosaďme do Eulerova vzorce:

$$v + v - \frac{3v}{2} = 2,$$

$$v = s = 4, \; h = 6.$$

Došli jsme k pravidelnému čtyrstěnu.

β) Předpokládejme, že mnohohran je čtyřvalentní, tj. v každém jeho vrcholu je čtyrhran. Pro počet stěn máme

$$s = \frac{4}{3} v .$$

Počet hran je

$$h = \frac{3s}{2} = 2v.$$

Dosazením do Eulerova vzorce dostaneme

$$v = 6, \ s = 8, \ h = 12.$$

To odpovídá pravidelnému osmistěnu.

γ) Předpokládejme nyní, že daný mnohohran je pětivalentní, tj. v každém jeho vrcholu je pětihran. Je-li za tohoto předpokladu počet vrcholů v, pak počet stěn je

$$s = \frac{5v}{3}$$

a počet hran

$$h = \frac{3s}{2} = \frac{15v}{6} = \frac{5v}{2} .$$

Po dosazení do Eulerovy věty dostaneme

$$v = 12, \ s = 20, \ h = 30.$$

Dospěli jsme tak k pravidelnému dvacetistěnu.

Tím jsme vyčerpali všechny případy, kdy pravidelný mnohostěn je složen z rovnostranných trojúhelníků.

b) Předpokládejme, že pravidelný mnohostěn je složen z čtverců. Je to nutně mnohostěn třívalentní. Méněvalentní nemůže být a vícevalentní také ne, neboť čtyři čtverce by už ležely v rovině. (Součet hranových úhlů při témž vrcholu by byl $4R$.) I platí

$$s = \frac{3\,v}{4}, \quad h = \frac{4\,s}{2} = 2\,s = \frac{3\,v}{2}.$$

Po dosazení do Eulerovy věty obdržíme

$$s = 6, \; v = 8, \; h = 12.$$

Je to krychle (pravidelný šestistěn).

c) Jestliže pravidelný mnohohran je omezen pravidelnými pětiúhelníky, pak každý vrchol je společný právě třem stěnám z týchž důvodů, jako tomu bylo u krychle. A pak

$$s = \frac{3\,v}{5}, \quad h = \frac{5\,s}{2} = \frac{3\,v}{2}.$$

Dosazením do Eulerovy věty dostaneme

$$s = 12, \; v = 20, \; h = 30.$$

Došli jsme tak k pravidelnému dvanáctistěnu, čímž počet pravidelných mnohostěnů je vyčerpán. Jiné možnosti totiž nemohou nastat.

Hned si tu všimneme, že i zde platí zákon duality. Krychli je duálně přiřazen pravidelný osmistěn a pravidelnému dvacetistěnu odpovídá v dualitě pravidelný dvanáctistěn. Čtyrstěn je sám k sobě duální. Zde se dá princip duality vyjádřit též takto: Jestliže existuje pravidelný mnohostěn, který má s stěn, v vrcholů a h hran, pak existuje též pravidelný mnohostěn, který má s vrcholů, v stěn a h hran.

Příklad 7. Na základě vzorců příkladu 3 rozhodněte, zda existuje těleso, které by mělo a) 11 hran, b) 7 hran. Tělesa popište a zobrazte.

Řešení. a) Předpokládejme, že takové těleso existuje a pak platí

$$\frac{3}{2} s \leqq 11 \leqq 3 s - 6.$$

Odtud dostáváme

$$s \leqq \frac{22}{3}, \quad s \geqq \frac{17}{3}.$$

Oběma nerovnostem vyhovují dvě přirozená čísla:

$$s_1 = 6, \; s_2 = 7.$$

Jestliže $s_1 = 6$, pak z Eulerovy věty plyne

$$v_1 = 7.$$

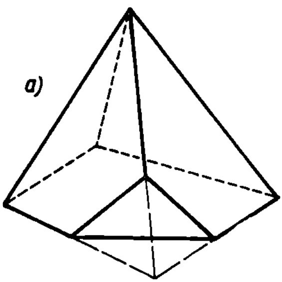
Jestliže $s_2 = 7$, dostaneme z téže věty

$$v_2 = 6.$$

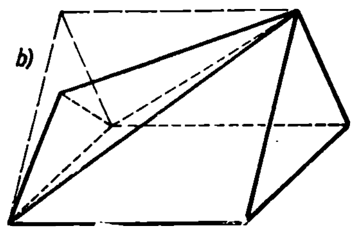
Obě tělesa jsou navzájem duální. Jejich tvar je znázorněn v obr. 35a, b.

b) Užijme týchž dvou vzorců a dostaneme

$$s \leqq \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}, \quad s \geqq \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$



Obr. 35a



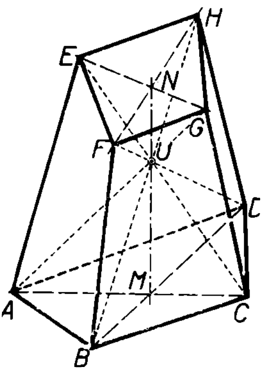
Obr. 35b

Mezi čísly $4\frac{1}{3}$ a $4\frac{2}{3}$ neexistuje však žádné přirozené číslo a proto neexistuje žádné těleso, které by mělo 7 hran.

Řekli jsme, že obě tělesa jsou vzájemně duální. Existuje jednoduchý předpis, jak z jednoho z nich snadno dostaneme druhé. V každé stěně jednoho zvolíme totiž vždy jeden bod. Každý z těchto bodů je vrcholem druhého tělesa.

Příklad 8. Šestistěn je konvexní mnohostěn, který se skládá ze šesti čtyřúhelníkových stěn. Přitom protější stěny nemusí ležet v rovinách vzájemně rovnoběžných. O tomto mnohostěnu platí věta: Jestliže v šestistěnu mají tělesové úhlopříčky společný bod, pak týž bod mají společný i přímky, spojující průsečíky úhlopříček protějších stěn. Dokažte tuto větu.

Důkaz (obr. 36). Pro každý rovnoběžnostěn věta platí. Obraťme tedy svou pozornost na šestistěn, který není rovnoběžnostěnem. Jeho vrcholy označíme A, B, C, D,



Obr. 36

E, F, G, H. Tělesové úhlopříčky AG, CE, BH, DF procházejí podle předpokladu společným bodem, který označíme U. Úhlopříčky AG, CE leží v rovině ϱ, která obsahuje stěnové úhlopříčky AC, EG (a bod U). Úhlopříčky BH, DF leží v rovině σ, v níž leží stěnové úhlopříčky BD, FH (a bod U). Průsečnice rovin ϱ, σ obsahuje podle toho bod U a body $M \equiv AC.BD$, $N \equiv EG.FH$. Stejným způsobem se důkaz provede pro další dvě dvojice tělesových úhlopříček; tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 9. Najděte všechny mnohostěny, které mají šest stěn.

Řešení. Použijeme vzorce

$$\frac{1}{2} v + 2 \leqq s \leqq 2 v - 4$$

z 3. příkladu. Odtud po dosazení $s = 6$,

$$v \leqq 8, \quad v \geqq 5.$$

Oběma nerovnostem vyhovují

$$v_1 = 5, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 7, \quad v_4 = 8.$$

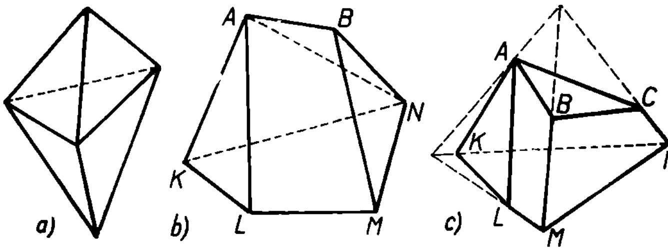
a) $v_1 = 5$, $s = 6$, $h_1 = 9$.

Tomu vyhovuje mnohostěn znázorněný na obr. 37a.

b) $v_2 = 6$, $s = 6$, $h_2 = 10$.

Tomu vyhovují dva mnohostěny: pětiboký jehlan a prismatoid, jenž místo podstavy má úsečku AB rovnoběžnou s podstavou $KLMN$. Vyhovuje však i mnohostěn, v němž hrana AB není rovnoběžná s podstavou $KLMN$, tedy mnohostěn obecnější než prismatoid. (Obr. 37b.)

c) $v_3 = 7$, $s = 6$, $h_3 = 11$.



Obr. 37

Dostaneme mnohostěn, jehož vznik z trojbokého jehlanu je patrný z obr. 37c. Přitom roviny ABC, $KLMN$ nemusí být vzájemně rovnoběžné.

d) $v_4 = 8, \quad s = 6, \quad h_4 = 12.$

Těmto požadavkům vyhovuje každý čtyrboký hranol nebo šestistěn nebo čtyrboký komolý jehlan.

Cvičení

1. Kolik hran má mnohostěn, jehož součet všech hranových úhlů je roven 36R? Dovedli byste takový mnohostěn zobrazit?

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž střed je S. Z ní je vyňat jehlan $SEFGH$. Vznikl tak mnohostěn s prohlubní. Přesvědčte se, že pro tento mnohostěn, který není konvexní, platí Eulerův vzorec.

3. Na základě vzorců příkladu 3 se přesvědčte, zda existují mnohostěny, pro něž a) $h = 6$, b) $h = 8$.

4. Existuje mnohostěn, skládající se z jednoho pětiúhelníku a několika trojúhelníků, a mající přitom 12 hran?

5. Tak jako se dají sestavit magické čtverce, dají se sestavit i magické krychle. Zde máte několik návodů.

a) Čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 očíslujte stěny krychle tak, aby součty čísel v těch čtyřech stěnách, které jsou rovnoběžné s toutéž hranou, byly stejné.

b) Čísla 1, 2, 3, . . ., 7, 8 vepište k vrcholům krychle tak, aby součet čísel při vrcholech téže stěny byl vždy týž.

c) Čísly 1, 2, 3, . . ., 11, 12 očíslujte hrany krychle tak, aby součet čísel při hranách v téže stěně byl týž.