Mnohostěny

2. kapitola. Speciální čtyřstěny

In: Stanislav Horák (author): Mnohostěny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1970. pp. 40–63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403725

2. kapitola

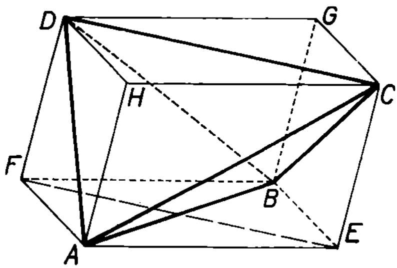
SPECIÁLNÍ ČTYRSTĚNY

1. Ortocentrický čtyrstěn

V první části této kapitoly si všimneme ortocentrického čtyrstěnu. Než však k němu dojdeme, odvodíme několik důležitých vět.

Věta 1. *Čtyrstěn buď a) nemá žádný pár protějších hran k sobě kolmých, nebo b) má právě jeden pár protějších hran k sobě kolmých, nebo c) má všechny tři páry protějších hran k sobě kolmých.*

Důkaz (obr. 23). Danému čtyrstěnu $ABCD$ opišme známým již způsobem rovnoběžnostěn $AEBFHCGD$ a všimněme si jedné jeho stěny, např. $AEBF$. Její úhlopříčka AB je hrana čtyrstěnu $ABCD$ a druhá úhlopříčka EF je rovnoběžná s hranou CD, tj. s hranou, která je k hraně



Obr. 23

AB protilehlá. Obdobné tvrzení platí o úhlopříčkách všech stěn sestrojeného rovnoběžnostěnu. Jestliže tedy dvě mimoběžné hrany čtyrstěnu jsou k sobě kolmé, projeví se to tím, že i příslušné stěnové úhlopříčky rovnoběžnostěnu jsou k sobě kolmé, což znamená, že dvě stěny rovnoběžnostěnu jsou rovnostranné rovnoběžníky. Zřejmě to platí i obráceně.

Všimněme si nyní těchto tří případů.

a) Daný čtyrstěn $ABCD$ nemá žádné dvě protější hrany k sobě kolmé a pak povrch rovnoběžnostěnu je složen vesměs z různostranných rovnoběžníků. Obráceně, jestliže povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ je složen vesměs z různostranných rovnoběžníků, nemá čtyrstěn $ABCD$ žádnou dvojici protějších hran k sobě kolmých.

b) Nechť daný čtyrstěn má právě jeden pár protějších hran k sobě kolmých. Potom opsaný rovnoběžnostěn má dvě a jen dvě (protější) stěny rovnostranné rovnoběžníky. Bez újmy na obecnosti můžeme říci, že to jsou hrany AB, CD. Potom však povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje právě dva rovnostranné rovnoběžníky; jsou to $AEBF$ a $HCGD$.

Obráceně. Nechť povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje právě dva rovnostranné rovnoběžníky. Bez újmy na obecnosti řekněme, že to jsou stěny $AEBF$, $HCGD$. To znamená, že jejich úhlopříčky AB, EF jsou k sobě kolmé a také HG, CD jsou k sobě kolmé. Tedy i hrany AB, CD čtyrstěnu jsou k sobě kolmé.

c) Nechť v daném čtyrstěnu $ABCD$ platí

$$AB \perp CD, \quad BC \perp AD.$$

Potom povrch opsaného rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje tyto rovnostranné rovnoběžníky: $AEBF$, $HCGD$ a $EBGC$, $AFDH$. Platí tudíž

$$AE = HC = CG = CE.$$

Odtud vidíme, že i zbývající dvě stěny našeho rovnoběžnostěnu jsou rovnostranné rovnoběžníky. (Nemusí být nutně shodné s předešlými.) Z toho a z obrácené věty odst. b) plyne, že i

$$AC \perp BD.$$

Daný čtyrstěn má každé dvě protější hrany navzájem kolmé.

Čtyrstěn, který jsme takto dostali, se nazývá *ortocentrický*. A hned si řekneme jednu jeho zajímavou vlastnost; všechny hrany rovnoběžnostěnu, který je opsán ortocentrickému čtyrstěnu, jsou shodné.

Z předešlého je patrno, že podle vzájemné polohy protějších hran čtyrstěnu rozdělujeme čtyrstěny do tří skupin:

a) *Čtyrstěny, u nichž žádné dvě protější hrany nejsou k sobě kolmé.*

b) *Čtyrstěny, u nichž právě dvě protější hrany jsou vzájemně kolmé.*

c) *Čtyrstěny, jejichž každý pár protějších hran leží na přímkách k sobě kolmých.*

Než přistoupíme k řešení příkladů, připomeňme si tři důležité věty, týkající se kolmosti přímky k rovině a kolmosti dvou rovin.

I. Definice kolmosti. *Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám této roviny.*

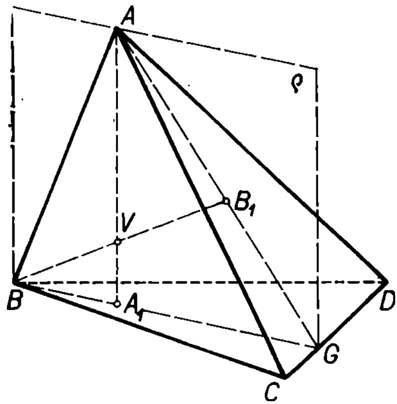
II. Kritérium kolmosti. *Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny.*

III. *Dvě roviny jsou navzájem kolmé, jestliže v jedné z nich leží přímka kolmá k druhé.*

Příklad 1. Jestliže hrany AB, CD daného čtyrstěnu $ABCD$ jsou k sobě kolmé, potom tělesové výšky, jdoucí vrcholy A, B, se protínají. Podobně se protínají (ne nutně v tomtéž bodě) i tělesové výšky jdoucí vrcholy C, D.

Obráceně. Jestliže tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, jdoucí vrcholy A, B, se protínají, jsou hrany AB, CD navzájem kolmé.

Důkaz (obr. 24). a) Podle předpokladu jsou hrany AB,



Obr. 24

CD k sobě kolmé a proto můžeme hranou AB proložit rovinu ϱ kolmou k CD. Ta protne přímku CD v bodě G. V rovině ϱ musí ležet tělesová výška čtyrstěnu jdoucí vrcholem A i vrcholem B a poněvadž obě výšky nemohou být spolu rovnoběžné (proč ?), jsou různoběžné.

Stejně se dokáže, že i tělesové výšky z vrcholů C, D jsou různoběžné.

b) Předpokládejme, že tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, které procházejí vrcholy A, B, se protínají v bodě V. O výšce AV tedy platí

$$AV \perp BCD,$$

což podle věty I znamená, že

$$AV \perp CD.$$

Stejně o výšce z vrcholu B platí

$$BV \perp ACD \Rightarrow BV \perp CD.$$

Dokázali jsme tedy, že

$$CD \perp AV,$$
$$CD \perp BV.$$

Použijeme-li nyní věty II, znamená to, že hrana CD je kolmá k rovině ABV, tj.

$$CD \perp ABV.$$

Použijeme-li znovu věty I, máme

$$CD \perp AB,$$

jak jsme měli dokázat.

Při důkazu jsme mlčky přešli možnost, že by body A, B, V neurčovaly rovinu. To však by nastalo jedině tehdy, když by některé stěny čtyrstěnu byly k sobě kolmé. To jsme však hned na začátku první kapitoly vyloučili.

Příklad 2. V ortocentrickém čtyrstěnu procházejí všechny jeho tělesové výšky týmž bodem.

Důkaz. Daný čtyrstěn označme $ABCD$. Poněvadž hrany AB, CD jsou vzájemně kolmé, protínají se tělesové výšky procházející vrcholy A, B. Poněvadž jsou k sobě kolmé hrany AC, BD, protínají se tělesové výšky z vrcholů A, C. A poněvadž jsou kolmé i hrany AD, BC, protínají se i tělesové výšky z vrcholů A, D. Výšky z vrcholů C, D s B, D a B, C se také protínají. Tedy každé dvě tělesové výšky daného čtyrstěnu se protínají, a to je možné jen v těchto dvou případech:

a) všechny tělesové výšky leží v téže rovině;

b) tělesové výšky neleží v téže rovině, ale procházejí týmž bodem. (*Ortocentrum čtyrstěnu.*)

První případ nastat nemůže, neboť by potom všechny vrcholy čtyrstěnu ležely v téže rovině. Nastane tudíž druhý případ a tím je naše tvrzení dokázáno.

Příklad 3. Je dán ortocentrický čtyrstěn $ABCD$. Ukažte, že tělesová výška, jdoucí vrcholem A (B, C, D) prochází ortocentrem stěny BCD (ACD, ABD, ABC).

Řešení (obr. 24). Hranou AB proložme rovinu $\varrho \perp CD$. To lze, neboť hrany AB, CD jsou navzájem kolmé. Rovina ϱ nutně obsahuje tělesovou výšku AA_1, neboť v rovině ϱ leží všechny kolmice k rovině BCD, které protínají hranu AB. Přitom (věta I)

$$BA_1 \perp CD.$$

To znamená, že přímka BA_1 je výška stěny BCD.

Stejně bychom ukázali, že CA_1 (DA_1) je výška trojúhelníka BCD, jdoucí vrcholem C (D) a odtud vyplývá, že bod A_1 je ortocentrem stěny BCD.

To, co jsme řekli o vrcholu A, platí i o vrcholech B, C, D a tak vyslovená věta je dokázána.

Příklad 4. Budiž dán ortocentrický čtyrstěn $ABCD$. Je-li V jeho ortocentrum, pak prostorový pětiúhelník $ABCDV$ má tyto vlastnosti:

a) Přímka, spojující kterékoli dva jeho vrcholy, je kolmá k rovině určené zbývajícími třemi.

b) Každý vrchol tohoto pětiúhelníka je ortocentrem čtyrstěnu, jehož vrcholy jsou zbývající čtyři vrcholy pětiúhelníka. — Dokažte.

Důkaz. a) Přímka AV (BV; CV; DV) je kolmá na stěnu BCD (ACD, ABD, ABC), neboť to je výška daného čtyrstěnu. Přímka AB je kolmá k rovině CDV, neboť je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny (věta II). Skutečně tu platí

$$AB \perp CD$$

(je to ortocentrický čtyrstěn) a také

$$CV \perp ABD \Rightarrow CV \perp AB$$

(věta I). Platí tedy skutečně

$$AB \perp CDV.$$

Podobně se dá dokázat, že $AC \perp BDV$, $AD \perp BCV$ a tím je důkaz dokončen.

b) Bod V je skutečně ortocentrem čtyrstěnu $ABCD$. Zde věta platí. Stačí proto dokázat, že A je ortocentrem čtyrstěnu $BCDV$.

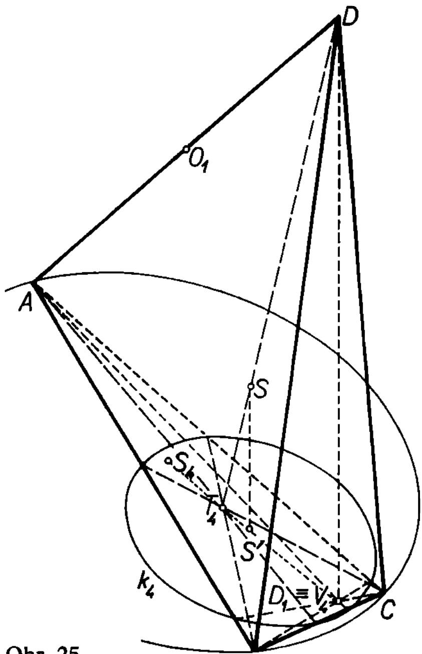
Tělesová výška čtyrstěnu $BCDV$ z vrcholu B je přímka BA, jak jsme si v předchozím odstavci dokázali, a k tomu dodejme, že bodem lze vést k rovině jedinou kolmici.

Podobně výška z vrcholu C (D) na stěnu BDV (BCV) je přímka CA (DA) a výška z vrcholu V na stěnu BCD je přímka VA. Bod A je tudíž ortocentrem čtyrstěnu $BCDV$. Tím je vlastně důkaz proveden, neboť to, co platí o bodu A a čtyrstěnu $BCDV$, platí i o bodu B (C; D) a čtyrstěnu $ACDV$ ($ABDV$; $ABCV$).

Každý trojúhelník, jehož opsaná kružnice je $k \equiv (S; r)$, má svou kružnici devíti bodů, která prochází středy stran trojúhelníka a patami výšek trojúhelníka. Obě kružnice, tj. kružnice k a kružnice devíti bodů mají své středy stejnolehlosti v průsečíku výšek a v těžišti daného trojúhelníka. Koeficient stejnolehlosti je $\frac{1}{2}$. (Viz *Kružnice*, Škola mladých matematiků, sv. 16, str. 78, př. 12.) To, co jsme si tu řekli o kružnici devíti bodů, stačí k tomu, abychom v ortocentrickém čtyrstěnu určili kulovou plochu dvanácti bodů.

Příklad 5. V ortocentrickém čtyrstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje středy všech hran a paty stěnových výšek. (Tzv. první kulová plocha dvanácti bodů.) Její střed splývá s těžištěm daného čtyrstěnu a její poloměr je roven polovině poloměru kulové plochy, která je opsána danému čtyrstěnu.

Důkaz (obr. 25). a) Mějme dán ortocentrický čtyrstěn



Obr. 25

$ABCD$ a v jedné jeho stěně, např. v ABC, sestrojme kružnici k_4 devíti bodů. Víme, že prochází středy A', B', C' hran BC, AC, AB a patami V_1, V_2, V_3 výšek, sestrojených po řadě vrcholy A, B, C ve stěně ABC. Středem O_1 hrany AD a kružnicí k_4 je určena jediná kulová plocha χ' (bod O_1 neleží s kružnicí k_4 v téže rovině), která je rovinou ABD proťata v kružnici k_3. Tato kružnice obsahuje střed C' hrany AB, střed O_1 hrany AD a patu V_3 stěnové výšky z vrcholu D na hranu AB. Těmito třemi body je však určena kružnice devíti bodů v trojúhelníku ABD a poněvadž třemi body, které neleží v přímce, je určena jediná kružnice, je kružnice k_3 kružnicí devíti bodů v trojúhelníku ABD.

Podobně ukážeme, že plocha χ' protíná stěnu ACD (BCD) v kružnici devíti bodů k_2 (k_1) ležící v této stěně. Poněvadž tyto kružnice procházejí středy hran AC, AD, CD, BC, BD a patami stěnových výšek, prochází těmito body i kulová plocha χ'. Tím je vyslovená věta dokázána.

b) V obr. 25 je V_4 ortocentrum stěny ABC a splývá s pravoúhlým průmětem D_1 vrcholu D do roviny ABC. Body T_4 a S_4 jsou po řadě těžiště a střed opsané kružnice trojúhelníka ABC. Víme, že T_4 leží mezi S_4 a V_4 a že platí

$$V_4T_4 = 2 \, . \, T_4S_4.$$

Označme S' střed kružnice k_4 devíti bodů. Bod T_4 leží mezi body S' a S_4 a platí o něm

$$T_4S_4 = 2 \, . \, S'T_4$$

a proto S' je střed úsečky V_4S_4. Počítejme dále

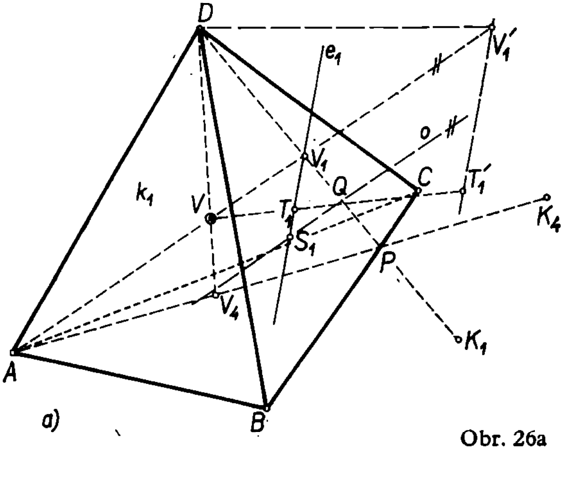
$$S'T_4 = \frac{1}{2} \, T_4S_4 = \frac{1}{2} \, . \, \frac{1}{2} \, . \, V_4T_4 = \frac{1}{4} \, . \, V_4T_4. \quad \text{(a)}$$

Střed S první kulové plochy dvanácti bodů leží na kolmici, sestrojené v bodě S' k rovině ABC. Podle výsledku (a) prochází tato kolmice těžištěm T daného čtyrstěnu.

Stejnou úvahu můžeme provést i pro další stěny daného čtyrstěnu a z toho pak plyne, že střed S kulové plochy χ' splývá s těžištěm T čtyrstěnu.

c) Poloměr plochy χ' je roven polovině poloměru kulové plochy opsané danému čtyrstěnu, což plyne z předcházejících úvah.

Příklad 6. V ortocentrickém čtyrstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje těchto dvanáct bodů: ortocentra všech čtyř stěn; těžiště všech čtyř stěn; body, které dělí v poměru 2 : 1 úsečku, omezenou ortocentrem čtyrstěnu a vrcholem čtyrstěnu, při čemž větší díl je při vrcholu. Poloměr této kulové plochy je roven jedné třetině poloměru kulové plochy, opsané danému čtyrstěnu. (Tato plocha se nazývá druhá kulová plocha dvanácti bodů.) Dokažte vyslovená tvrzení.



Obr. 26a

Důkaz (obr. 26abc). Nejprve ukážeme, že na kulové ploše χ, která je opsána danému čtyrstěnu $ABCD$, leží osm význačných bodů (kromě vrcholů) a teprve potom dokážeme vyslovenou větu.

Těžiště stěn ABC, ABD, ACD, BCD označíme po řadě T_4, T_3, T_2, T_1. Paty výšek, sestrojených vrcholy A, B, C, D na protější stěny, označíme po řadě V_1, V_2, V_3, V_4. Tyto čtyři body jsou zároveň ortocentry jednotlivých stěn. Ortocentrum daného čtyrstěnu označíme V.

a) Průsečík otevřené polopřímky AV_1 s plochou χ označme V'_1. Otevřená polopřímka DV_1, určená stěnovou výškou DV_1, protne hranu BC v bodě P a kulovou plochu χ v bodě K_1. (Obr. 26 a.) Bod K_1 — poněvadž leží v rovině BCD — je nutně bodem kružnice k_1, která je opsána trojúhelníku BCD a je řezem plochy χ rovinou BCD. Tu platí

$$PV_1 = PK_1.$$

(Viz *Kružnice*, Škola mladých matematiků, sv. 16, str. 17, př. 8.) Otevřená polopřímka AV_4 protne hranu BC v bodě P a plochu χ v bodě K_4, o němž platí (podobně jako o bodu K_1)

$$PV_4 = PK_4.$$

Rovina ADP protíná naši kulovou plochu v kružnici (obr. 26 b), která prochází body A, D, V'_1, K_1, K_4. Pravoúhlé trojúhelníky $V_1K_1V'_1$, V_1PV jsou podobné, neboť

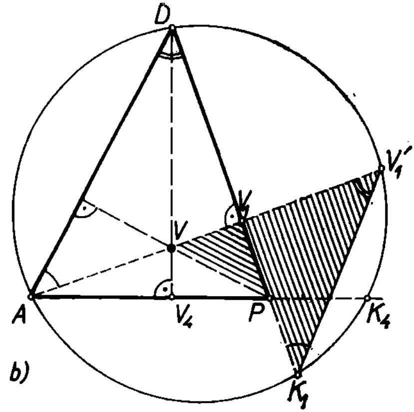
a) $$\sphericalangle ADK_1 = \sphericalangle AV'_1K_1,$$

b) $$\sphericalangle VPV_1 = 90° - \sphericalangle ADK_1,$$

$$\sphericalangle V_1K_1V'_1 = 90° - \sphericalangle AV'_1K_1.$$

Z posledních dvou rovnic plyne

$$\sphericalangle VPV_1 = \sphericalangle V_1K_1V'_1$$



Obr. 26b

a zmíněné dva trojúhelníky jsou podle toho skutečně podobné. Jejich strany, které si v podobnosti odpovídají, jsou pak úměrné:

$$VV_1 : PV_1 = V_1V'_1 : V_1K_1.$$

Můžeme tudíž říci, že podobnost mezi oběma trojúhelníky má koeficient podobnosti rovný 2. Jinak: Bod V_1 je obrazem bodu V'_1 ve stejnolehlosti se středem v bodě V a koeficientem $\frac{1}{3}$.

Stejným způsobem se provede důkaz pro body V, V_2, V'_2; V, V_3, V'_3; V, V_4, V'_4.

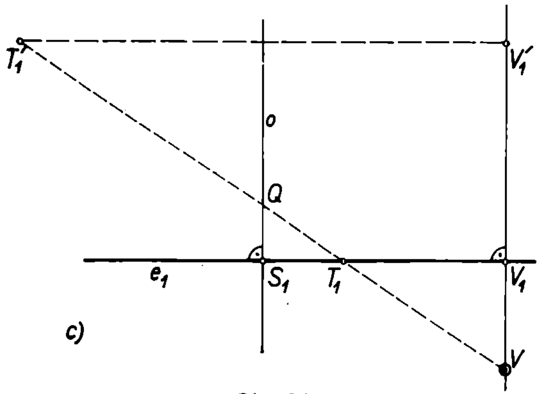
b) Na polopřímce VT_1, na prodloužení za bod T_1, sestrojme bod T'_1 tak, aby (obr. 26 a)

$$T_1T'_1 = 2 . VT_1.$$

Dále označme S_1 střed kružnice k_1 opsané trojúhelníku

BCD. Kolmice o v něm sestrojená k rovině BCD (je rovnoběžná s přímkou VV_1) prochází středem S kulové plochy χ. Body V_1, T_1, S_1 leží na Eulerově přímce e_1 trojúhelníka BCD. (Viz *Kružnice*, str. 84, cvič. 6, obr. 46.) Tudíž bod T_1 leží mezi S_1 a V_1 a platí

$$V_1T_1 = 2 . S_1T_1. \tag{a}$$



Obr. 26c

Na obr. 26c máme znázorněný detail v rovině oV_1. Tato rovina obsahuje ortocentrum V a body T_1, T'_1. (T'_1 leží na přímce VT_1.) Průsečík přímky o s přímkou VT'_1 označme Q. Potom je

$$VT'_1 = 3 . VT_1. \tag{b}$$

Z podobnosti trojúhelníků QT_1S_1, VT_1V_1 a ze vztahů (a), (b) plyne

$$VQ = VT_1 + T_1Q = VT_1 - \frac{1}{2}\, VT_1 = \frac{3}{2}\, VT_1 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} VT'_1 = \frac{1}{2} VT'_1.$$

Vidíme odtud, že přímka o prochází středem úsečky VT'_1 a poněvadž přímky o, VV'_1 jsou vzájemně rovnoběžné, prochází i středem úsečky $T'_1V'_1$. Body T'_1, V'_1 jsou tudíž souměrně sdružené podle přímky o, což znamená, že bod T'_1 leží na kulové ploše χ, neboť tato plocha je souměrná podle každého svého průměru.

Obdobně můžeme dokázat, že na kulové ploše χ leží i body T'_2, T'_3, T'_4.

Shrneme dosavadní výsledky. Na kulové ploše χ leží kromě vrcholů A, B, C, D těchto dalších osm bodů: V'_1, V'_2, V'_3, V'_4; T'_1, T'_2, T'_3, T'_4.

Ortocentrum V daného čtyrstěnu považujme nyní za střed stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{3}$. Tím zmíněných osm bodů přejde v body V_1, V_2, V_3, V_4 (ortocentra jednotlivých stěn); T_1, T_2, T_3, T_4 (těžiště jednotlivých stěn). Vrcholy čtyrstěnu přejdou po řadě do bodů A_1, B_1, C_1, D_1, které leží na tělesových výškách čtyrstěnu, a to tak, že

$$VA_1 = \frac{1}{3} VA, \; VB_1 = \frac{1}{3} VB, \; \ldots \; .$$

Při tom bod A_1 leží mezi body A, V, bod B_1 leží mezi body B, V atd.

V dané stejnolehlosti kulové ploše χ odpovídá kulová plocha χ_1, jejíž střed S_1 je v naší stejnolehlosti obrazem středu S plochy χ. Opět platí

$$VS_1 = \frac{1}{3} VS,$$

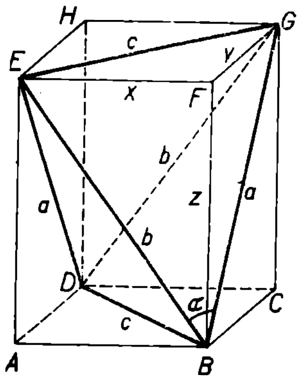
kde S_1 leží mezi body V, S. Poloměr plochy χ_1 je roven třetině poloměru plochy χ.

2. Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné

Tento čtyrstěn má několik pěkných, jednoduchých a snadno dokazatelných vlastností, z nichž si některé uvedeme. Začneme příkladem, který zdánlivě s naším čtyrstěnem nesouvisí.

Příklad 7. Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Trojúhelník, sestrojený z jeho tří různých stěnových úhlopříček (např. trojúhelník BEG), je ostroúhlý. Dokažte.

Důkaz (obr. 27) provedeme pro trojúhelník BEG, neboť



Obr. 27

ostatní trojúhelníky (sestrojené ze tří různých stěnových úhlopříček) jsou s ním shodné.

Délky hran kvádru stručně označíme

$$AB = x, \quad AD = y, \quad AE = z.$$

Potom

$$BG = a = \sqrt{y^2 + z^2},$$
$$BE = b = \sqrt{x^2 + z^2},$$
$$EG = c = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Označme ještě

$$\alpha = \sphericalangle EBG,$$

přičemž

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

V trojúhelníku *BEG* platí kosinová věta:

$$EG^2 = BE^2 + BG^2 - 2.BE.BG.\cos\alpha.$$

Po dosazení z dřívějších rovnic a po kratší úpravě dojdeme k výsledku

$$\cos\alpha = \frac{z^2}{2ab}.$$

Odtud již plyne správnost vyslovené věty, neboť

$$z^2 > 0, \quad ab > 0,$$

a tudíž i $\cos\alpha > 0$ a úhel α je ostrý.

Stejným způsobem by se prováděl důkaz pro zbývající dva úhly trojúhelníka *BEG*. Tím je také důkaz věty proveden.

Věta 2. *Rovnoběžnostěn, který je opsán čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, je kvádr. Obráceně. Čtyrstěn, vepsaný kvádru, má tu vlastnost, že jeho protější hrany jsou shodné.*

Důkaz (obr. 27). Mějme daný čtyrstěn *BDEG*, jehož protější hrany jsou shodné, tj. platí

$$BD = EG,\ BG = DE,\ BE = DG$$

a opište mu známým způsobem rovnoběžnostěn *ABCDEFGH*. Víme (str. 19), že hrany čtyrstěnu jsou stěnovými úhlopříčkami opsaného rovnoběžnostěnu. Poněvadž

$$EG = BD = FH,$$

plyne z toho, že stěny *ABCD* a *EFGH* jsou pravoúhlé rovnoběžníky. Obdobně se dá ukázat, že pravoúhlé rovnoběžníky jsou i stěny *BCGF*, *ADHE* a *ABFE*, *DCGH*.

Mějme obráceně kvádr *ABCDEFGH* a jemu vepišme čtyrstěn *BDEG*. Je snadné dokázat, že pro tento čtyrstěn platí

$$BD = EG,\ BG = DE,\ BE = DG.$$

To přenechávám píli čtenářů.

Věta 3. *Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné, je omezen ostroúhlými trojúhelníky navzájem shodnými.*

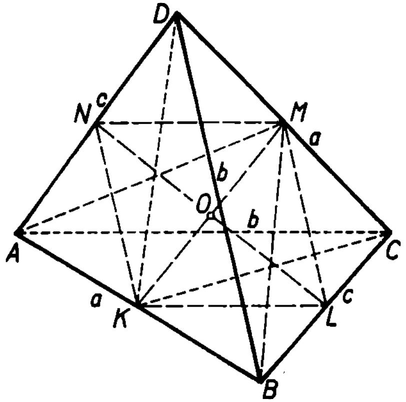
Důkaz obou částí věty je tak jednoduchý, že jej každý čtenář bez obtíží provede.

Příklad 8. Dokažte, že přímky, spojující středy protějších hran čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, jsou kolmé k těm hranám, které půlí. (Přímky, spojující středy protějších hran, se nazývají střední příčky.)

Řešení (obr. 28). Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné, označíme *ABCD*. Středy hran *AB*, *BC*, *CD*, *DA* označíme postupně *K*, *L*, *M*, *N*. Z věty *sss* o shodnosti trojúhelníků plyne, že

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD$$

a potom i sobě odpovídající těžnice jsou shodné. Tak např.



Obr. 28

$$KC = KD,$$

a tudíž trojúhelník CDK je rovnoramenný. Přímka KM je v tomto trojúhelníku osa souměrnosti a je tedy

$$KM \perp CD.$$

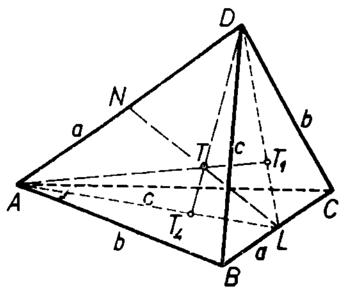
Podobně v trojúhelníku ABM platí

$$KM \perp AB.$$

Poněvadž u ostatních dvou středních příček se důkaz provádí stejně, je důkaz vyslovené věty proveden.

Příklad 9. Dokažte. Těžiště čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou navzájem shodné, splývá s průsečíkem středních příček. Všechny tělesové těžnice jsou navzájem shodné.

Důkaz (obr. 29). a) Označení ponecháme z příkladu 8. — Těžnice DL trojúhelníka BCD a těžnice AL trojúhelníka



Obr. 29

ABC určují rovinu, která obsahuje jednak těžiště T daného čtyrstěnu, jednak střední příčku LN a tudíž i průsečík O všech tří středních příček. Avšak body T, O leží v každé rovině, určené dvěma různoběžnými těžnicemi. Důsledek toho je, že oba tyto body splývají. Popsané roviny mají společný jediný bod.

b) Ze shodnosti trojúhelníků ABC, DCB plyne i shodnost stěnových těžnic

$$AL = DL.$$

Označíme-li T_1, T_4 těžiště stěn BCD, ABC, platí též

$$LT_1 = LT_4.$$

Dále je

$$\triangle\, ALT_1 \cong \triangle\, DLT_4$$

podle věty *sus*, neboť

a) $AL = DL$,

b) $LT_1 = LT_4$,

c) $\sphericalangle\, ALT_1 = \sphericalangle\, DLT_4$

(je to úhel společný oběma trojúhelníkům). Odtud pak máme

$$AT_1 = DT_4.$$

Podobně se dá ukázat, že

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = DT_4,$$

kde T_2, T_3 jsou těžiště stěn ACD, ABD. Tím je však vyslovené tvrzení dokázáno.

Příklad 10. Všechny tělesové výšky čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné, jsou shodné.

Důkaz. Tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, sestrojené z vrcholů A, B, C, D označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4. Objem V čtyrstěnu je pak

$$3\,V = (ABC)v_4 = (ABD)v_3 = (ACD)v_2 = (BCD)v_1.$$

Ale obsahy stěn si jsou rovny a tudíž

$$v_4 = v_3 = v_2 = v_1,$$

jak jsme měli dokázat.

Příklad 11. Dokažte, že střed kulové plochy opsané čtyrstěnu $ABCD$, jehož protější hrany jsou shodné, splývá se středem kulové plochy vepsané danému čtyrstěnu a je to průsečík středních příček čtyrstěnu.

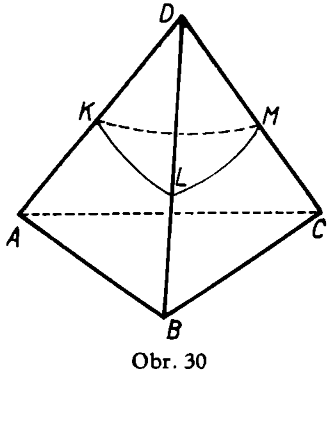
Důkaz. Víme, že těžiště T daného čtyrstěnu splývá s průsečíkem O středních příček čtyrstěnu. Tento bod, s ohledem na větu o těžišti a na výsledek příkladu 8, má ode všech stěn čtyrstěnu tutéž vzdálenost rovnou $\frac{1}{4}v$, kde v je tělesová výška čtyrstěnu. Je to tedy zároveň střed kulové plochy vepsané čtyrstěnu $ABCD$.

Všechny tělesové těžnice čtyrstěnu jsou shodné. Těžiště T má tedy od všech vrcholů čtyrstěnu tutéž vzdálenost rovnou $\frac{3}{4}$ těžnice čtyrstěnu. To znamená, že bod $O \equiv T$ je zároveň střed kulové plochy opsané danému čtyrstěnu.

3. Závěrečné poznámky

1. Tak jako trigonometrií rozumíme výpočet prvků trojúhelníku z prvků daných, tak tetraedrometrií rozumíme výpočet prvků čtyrstěnu z daných šesti prvků. Uvádíme zde číslo šest, neboť čtyrstěn je určen šesti (na sobě nezávislými) prvky. Jen pro zajímavost si uvedeme, jak se matematikové pokoušeli odvodit různé funkce přímo ze čtyrstěnu, nezávisle na goniometrických funkcích. Uveďme zde definici tzv. stranové funkce sinus.

Mějme daný čtyrstěn $ABCD$ a kolem jeho vrcholu D opišme kulovou plochu poloměru r. Ta protne hrany DA, DB, DC po řadě v bodech K, L, M (obr. 30). Potom stra-



Obr. 30

nový sinus trojhranu*) $D(ABC) = D(KLM)$ je definován jako poměr šestinásobného objemu čtyrstěnu $D(KLM)$ a objemu krychle o hraně délky r. Tak např. stranový sinus trojhranu při vrcholu pravidelného čtyrstěnu o hraně délky a je

$$6 \cdot \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} : a^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

2. Bylo by jistě zajímavé zjistit, kdy dva čtyrstěny jsou shodné. Takových vět o shodnosti, které by vyčerpaly všechny možnosti, by bylo jistě podstatně víc než vět o shodnosti dvou trojúhelníků. To dosud čeká na svého objevitele.

3. Ještě bychom se zde měli zmínit o zborceném čtyřúhelníku. Je to čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy neleží v téže rovině. Označme jej $ABCD$. Potom úsečky AB, BC, CD, AD jsou jeho strany, úsečky AC, BD jsou jeho úhlopříčky. Má řadu vlastností, které známe z rovinného čtyřúhelníka. Uveďme aspoň některé.

Označme délky stran, úhlopříček a středních příček postupně a, b, c, d, e, f, r, s. Pak platí

$$e^2 + f^2 = 2(r^2 + s^2),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 . EF^2,$$

kde E, F jsou středy úhlopříček.

Veliká pozornost byla věnována zborceným čtyřúhelníkům, jejichž strany se dotýkají kulové plochy. O délkách stran pak platí (podobně jako o délkách stran tečnového čtyřúhelníka)

$$a + c = b + d.$$

*) Definice trojhranu je na str. 65.

Cvičení

1. Je dán čtyrstěn $ABCD$, v němž $ABD \perp ABC$, $ABD \perp ACD$ a také $ABC \perp ACD$. (Stručně říkáme, že to je čtyrstěn trojnásob pravoúhlý.) Ukažte, že je ortocentrický. — Je každý pár protějších hran k sobě kolmý? Kde leží jeho ortocentrum? Je tu obdoba s pravoúhlým trojúhelníkem?

2. V ortocentrickém čtyrstěnu $ABCD$, který není trojnásob pravoúhlý, platí $AB = CD$. Ukažte, že tu jde o pravidelný čtyrstěn.

3. Čtyrstěn $ABCD$ má výšku DD_1, jejíž pata D_1 je průsečíkem výšek stěny ABC.

a) Dokažte, že tento čtyrstěn je ortocentrický.

b) Ukažte, že existují tři různé roviny, které daný čtyrstěn protínají ve čtvercích.

c) Sestrojte jeden z těchto čtverců, je-li dáno $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 8$ cm, $DD_1 = 10$ cm.

4. Nutná podmínka pro to, aby daný čtyrstěn byl pravidelný, je: Existují tři různé roviny, které daný čtyrstěn protínají ve čtvercích. Je to podmínka postačující?

5. Síť čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou navzájem shodné, je složena ze čtyř shodných ostroúhlých trojúhelníků. Dokažte.

6. Daný ostroúhlý trojúhelník rozdělte středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, které tvoří síť čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné. Dokažte. — Můžeme říci, že povrch čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, se dá do roviny rozvinout v ostroúhlý trojúhelník?

7. Dokažte: Součet vzdáleností libovolného vnitřního bodu čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, je od stěn čtyrstěnu konstantní a je roven délce tělesové výšky tohoto čtyrstěnu.

8. Pravoúhlý průmět vrcholu D čtyrstěnu $ABCD$, jehož protější hrany jsou shodné, do roviny ABC je průsečík výšek trojúhelníka, který vznikne otočením stěn ABD, ACD, BCD kolem hran (po řadě) AB, AC, BC do roviny ABC.

9. Jsou dány délky a, b, c hran čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné. Vypočtěte:

a) délky středních příček čtyrstěnu;

b) velikost úhlů protějších hran.

10. Ve čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné, mají střední příčky délky rovné nejvýše 1. Ukažte, že délky hran tohoto čtyrstěnu mají pak délky nejvýše rovné $\sqrt{2}$. (Pokyn: Opište danému čtyrstěnu kvádr.)