Mnohostěny

1. kapitola. Čtyřstěn

In: Stanislav Horák (author): Mnohostěny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1970. pp. 3–39.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403724

1. kapitola

ČTYRSTĚN

I. Studium prostorových útvarů je podstatně složitější a těžší než studium rovinných útvarů. Je to způsobeno jednak tím, že si prostorové útvary obtížněji představujeme a znázorňujeme, i tím, že se tu předpokládá znalost planimetrie.

Nejjednodušším mnohoúhelníkem v rovině je trojúhelník. Říká se mu proto *simplex* v rovině. Nejjednodušším mnohostěnem v prostoru je čtyrstěn; je to simplex v prostoru. Jeho definice je tato:

Čtyrstěn $ABCD$, kde body A, B, C, D neleží v rovině, je průnik poloprostorů $ABCD$, $ACDB$, $ABDC$, $BCDA$.

Z definice plyne, že čtyrstěn je omezen čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Čtyrstěn má čtyři vrcholy a šest hran. Hrany jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Zvláštní důležitost mají mimoběžné hrany (budeme jim též říkat protější nebo protilehlé) a proto si hned řekneme, které to jsou. Ve čtyrstěnu $ABCD$ to jsou tyto tři dvojice hran:

$$AB,\ CD;\quad AC,\ BD;\quad AD,\ BC.$$

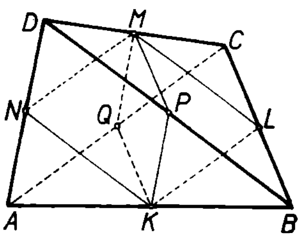
Roviny, které omezují čtyrstěn, dělí prostor na 15 částí. Jedna část je čtyrstěn sám. To je také jediná konečná část. Další části rozdělíme do tří skupin a z každé části popíšeme přesně vždy jednu.

V první skupině, která obsahuje čtyři části prostoru, je část, která je průnikem poloprostorů $ABDC$, $BCDA$, *CADB* a poloprostoru opačného k poloprostoru *ABCD*. Této části prostoru budeme stručně říkat „nad stěnou *ABC*". Podobně dostaneme části prostoru nad stěnami *ABD*, *ACD*, *BCD*. — V další skupině je šest částí prostoru a popíšeme tu opět jednu. Je to průnik poloprostorů *BCDA*, *ACDB* a poloprostorů opačných k poloprostorům *ABCD*, *ABDC*. Tuto část prostoru budeme stručně nazývat „nad hranou *AB*". Dalších pět částí je postupně nad hranami *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*. V poslední skupině jsou čtyři části prostoru, z nichž jedna je průnikem poloprostorů opačných k poloprostorům *BCDA*, *ABDC*, *ABCD*. Je to trojhran s vrcholem *B*, neobsahující daný čtyřstěn. Další tři trojhrany dostaneme podobně; mají vrcholy *A*, *C*, *D*.

Než přistoupíme k řešení příkladů, které nás blíže seznámí s vlastnostmi čtyřstěnů, řekneme si, že v jednotlivých příkladech — pokud to nebude výslovně řečeno — nebudeme předpokládat kolmost dvou stěn čtyřstěnu, nebo že jde o pravidelný čtyřstěn.

Příklad 1. Dokažte, že úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu, se vzájemně půlí.

Důkaz (obr. 1). Daný čtyřstěn je *ABCD*. Středy hran *AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD*, *CD* označme po řadě *K*, *L*, *Q*,



Obr. 1

N, P, M. Všimněme si nejdříve čtyřúhelníku $KLMN$. Mluvíme hned o čtyřúhelníku, neboť body K, L, M, N neleží v přímce. Dokonce ani tři z těchto čtyř bodů neleží v přímce. Proto jsme oprávněni mluvit o čtyřúhelníku. Zatím ovšem nevíme, zda je rovinný; může být zborcený a o takovém se zmíníme později.

O stranách čtyřúhelníku $KLMN$ platí

$$KL \parallel AC, \qquad MN \parallel AC,$$

a také

$$KL = \frac{1}{2} AC, \qquad MN = \frac{1}{2} AC,$$

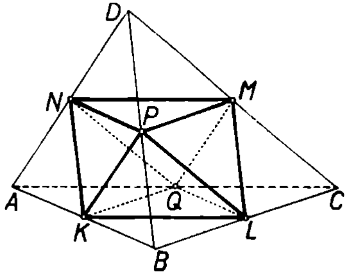
neboť to jsou střední příčky v trojúhelníku ABC resp. v trojúhelníku ADC. Čtyřúhelník $KLMN$ je tedy rovnoběžník a jeho úhlopříčky KM, LN — jež jsou vlastně spojnicemi středů dvou protějších hran čtyrstěnu — se vzájemně půlí.

Stejným způsobem se dá dokázat, že i čtyřúhelník $KPMQ$ je rovnoběžník a jeho úhlopříčky KM, PQ (jsou to opět spojnice středů dvou protějších hran čtyrstěnu) se vzájemně půlí. Avšak zmíněné dva rovnoběžníky mají úhlopříčku KM společnou a poněvadž každá úsečka má právě jeden střed, procházejí spojnice KM, LN, PQ jediným bodem, který je jejich středem, a právě to jsme měli dokázat.

Příklad 2. Body K, L, M, N, P, Q z předešlého příkladu jsou vrcholy osmistěnu, který má tyto dvě vlastnosti: a) ke každé jeho hraně existuje právě jedna hrana s ní rovnoběžná a s ní shodná, b) objem tohoto osmistěnu je roven polovině objemu daného čtyrstěnu.

D ů k a z (obr. 2). a) V důkazu 1. příkladu jsme ukázali, že

$$KL \parallel MN \parallel AC \quad \text{a zároveň} \quad KL = MN.$$



Obr. 2

Žádná další hrana osmistěnu nemůže již být s hranou AC rovnoběžná, neboť všechny další hrany jsou buď s hranou AC různoběžné, nebo mimoběžné.

Dodejme k tomu, že zmíněné body jsou skutečně vrcholy osmistěnu, neboť žádné tři z nich neleží v přímce a žádných pět v rovině. Zbývá dokázat tu část věty, která mluví o objemu.

b) Objem čtyrstěnu $ABCD$ označme V a objem osmistěnu V_8. Všimněme si, že náš osmistěn odděluje od daného čtyrstěnu čtyrstěny $AKQN$, $BLKP$, $CQLM$, $MNPD$. Objem každého tohoto odděleného čtyrstěnu je roven $\frac{1}{8}V$, neboť např. ve čtyrstěnu $AKQN$ je podstava

$$AKQ = \frac{1}{4} ABC$$

a příslušná výška z vrcholu N je rovna polovině výšky čtyrstěnu $ABCD$ z vrcholu D. Z obdobného důvodu jsou objemy dalších tří čtyrstěnů též rovny $\frac{1}{8}V$ a proto

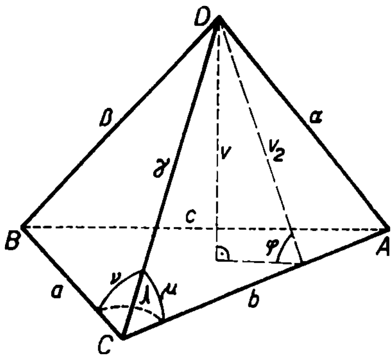
$$V_8 = V - 4 . \frac{1}{8} V = \frac{1}{2} V.$$

Příklad 3. Hrany daného čtyrstěnu $ABCD$ označme $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, a to tak, aby skupiny hran $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ byly protější. Potom objem V čtyrstěnu je dán vzorcem
a α b β γ   a, b, c (tvořily trojúhelník)

$$144\, V^2 = a^2\alpha^2(-a^2 + b^2 + c^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \\ + b^2\beta^2(a^2 - b^2 + c^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) + \\ + c^2\gamma^2(a^2 + b^2 - c^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \\ - [(a\,b\,c)^2 + (a\beta\gamma)^2 + (b\alpha\gamma)^2 + (c\alpha\beta)^2].$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 3). Vyjdeme ze známého vzorce pro objem jehlanu



Obr. 3

$$V = \frac{1}{3}(ABC)v,$$

kde v je výška daného čtyrstěnu procházející vrcholem D a (ABC) je obsah $\triangle\, ABC$. Označme ještě v_2 výšku stěny

ACD jdoucí vrcholem D a φ úhel stěn ABC, ACD, $\sphericalangle ACB = \lambda$, $\sphericalangle ACD = \mu$, $\sphericalangle BCD = \nu$. Potom

$$v = v_2 . \sin \varphi = \gamma \sin \mu \sin \varphi .$$

Poněvadž

$$(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin \lambda,$$

nabude vzorec pro objem tvaru

$$V = \frac{1}{6} ab \gamma \sin \lambda \sin \mu \sin \varphi .$$

Ze sférické geometrie je známa kosinová věta (viz např. Jiří Kůst, *Sférická trigonometrie*, str. 20, věta 2,2)

$$\cos \nu = \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \varphi ,$$

z níž plyne

$$\cos \varphi = \frac{-\cos \lambda \cos \mu + \cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 \lambda \sin^2 \mu - (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu)^2}}{\sin \lambda \sin \mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \lambda)(1 - \cos^2 \mu) - (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu)^2}}{\sin \lambda \sin \mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

Potom

$$(6\,V)^2 = a^2 b^2 \gamma^2 (1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + \\ + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu .$$

Z trojúhelníků ABC, ACD, BCD postupně dostaneme (podle kosinové věty pro rovinný trojúhelník)

$$\cos \lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos \mu = \frac{b^2 + \gamma^2 - a^2}{2b\gamma},$$

$$\cos \nu = \frac{a^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2a\gamma}.$$

Tyto výrazy dosadíme do předcházející rovnice. Po menší úpravě a po umocnění dojdeme k rovnici

$$\begin{aligned} 144\, V^2 = 4a^2b^2\gamma^2 - a^2(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 - \\ - \gamma^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 - b^2(a^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2 + \\ + (b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - \beta^2 + \gamma^2). \end{aligned}$$

To je již v podstatě náš vzorec. Jen je ještě potřeba provést naznačené početní výkony a vytknout.

Zvláštní případy. a) Jestliže $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma$, dostaneme pravidelný trojboký jehlan, jehož objem tedy je

$$V = \frac{1}{12}\, a^2 \sqrt{3\, a^2 - \alpha^2}\,.$$

b) Jestliže $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, dostáváme čtyrstěn, jehož mimoběžné hrany jsou vždy shodné. Tohoto čtyrstěnu si později všimneme podrobněji. Pro jeho objem platí

$$\begin{aligned} 72\, V^2 = a^4(- a^2 + b^2 + c^2) - \\ - (b^2 - c^2)^2 (- a^2 + b^2 + c^2) = \\ = (- a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2). \end{aligned}$$

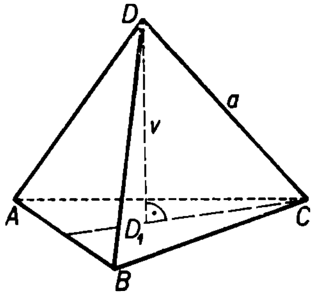
Příklad 4. Objem pravidelného čtyrstěnu vypočítejte nejdřív ze vzorce odvozeného na str. 8, v němž položíte $a = b = c = \alpha = \beta = \gamma$ a potom přímo.

Řešení. a) Hned dosazujeme

$$144\ V^2 = a^4(2a^2) + a^4(2a^2) + a^4(2a^2) - 4a^6 = 2a^6,$$

$$V = \frac{1}{12}\, a^3 \sqrt{2}\ .$$

b) V obr. 4 je znázorněn pravidelný čtyrstěn $ABCD$, jehož hrany mají délku a. Úsečka $DD_1 = v$ je jeho tělesová výška a úsečka CD_1 je rovna dvěma třetinám stěnové výšky, tedy



Obr. 4

$$CD_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}\ .$$

Na pravoúhlý trojúhelník CDD_1 použijeme Pythagorovy věty:

$$DD_1{}^2 = CD^2 - CD_1{}^2,$$

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3} . 3\right)^2,$$

$$v = a \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

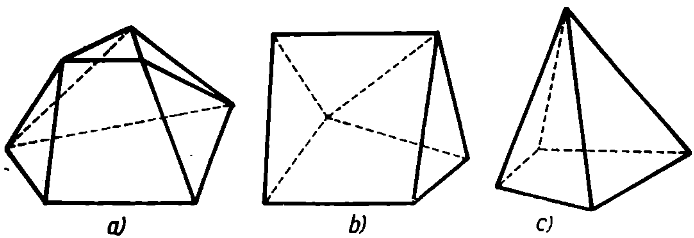
Objem pravidelného čtyrstěnu je tudíž

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,.\,a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2},$$

což souhlasí s dřívějším výsledkem.

Nechť jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky, ležící v různých rovnoběžných rovinách. Průnik všech poloprostorů, určených stranou jednoho mnohoúhelníka a jedním vrcholem druhého mnohoúhelníka — přičemž tento poloprostor obsahuje všechny vrcholy obou mnohoúhelníků — je těleso zvané prismatoid či hranolec. K prismatoidům počítáme i tělesa, kdy místo jedné podstavy volíme úsečku rovnoběžnou s rovinou druhé podstavy (ale neležící v ní) nebo bod (neležící v rovině druhé podstavy).

V obr. 5 abc jsou tři příklady na prismatoidy.



Obr. 5

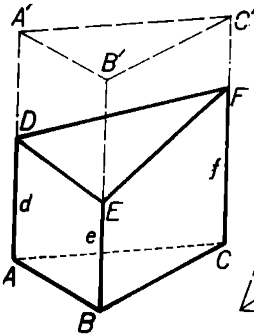
Pomocná věta 1. Jestliže podstavy prismatoidu mají obsahy P_1, P_2 a jestliže střední řez (je to řez rovinou rovnoběžnou s rovinami podstav a půlící vzdálenost v podstav) má obsah S, potom objem V prismatoidu je dán vzorcem

$$V = \frac{v}{6}(P_1 + P_2 + 4S).$$

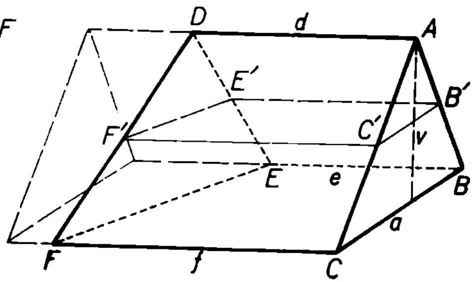
Větu nebudeme dokazovat, i když důkaz je elementární. Dodejme však, že věta platí i pro případy typu 5b), 5c), neboť stačí položit $P_2 = 0$.

Pomocná věta 2. Budiž dán přímý hranol trojboký, který je seříznut rovinou σ, neprocházející žádným vnitřním bodem ani jedné z podstav. Objem V seříznutého tělesa je pak roven jedné třetině součinu velikosti podstavy a součtu pobočných hran.

Vysvětlení. Na obr. 6 je znázorněn přímý trojboký



Obr. 6



Obr. 7

hranol $ABCA'B'C'$ a ten je seříznut rovinou σ tak, že vzniklo těleso $ABCDEF$. Označíme-li P velikost podstavy ABC a položíme-li $AD = d$, $BE = e$, $CF = f$, platí podle vyslovené věty

$$V = \frac{1}{3} P(d + e + f).$$

Důkaz pomocné věty 2 (obr. 7). Objem našeho tělesa budeme počítat jako objem prismatoidu, který je určen podstavou $BCFE$ (to je buď pravoúhlý lichoběžník, nebo obdélník) a úsečkou AD místo druhé podstavy. Výška v prismatoidu je rovna výšce stěny ABC, sestrojené z vrcholu A. Obsah středního řezu $B'C'F'E'$ označíme S. Pak platí

$$V = \frac{v}{6}(BCFE + 0 + 4\,S).$$

Ale

$$BCFE = \frac{1}{2}a(e + f),$$

$$S = \frac{1}{2}(C'F' + B'E')\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(f + d + e + d)a,$$

$$V = \frac{1}{6}av.\frac{1}{2}(e + f + f + d + e + d) =$$

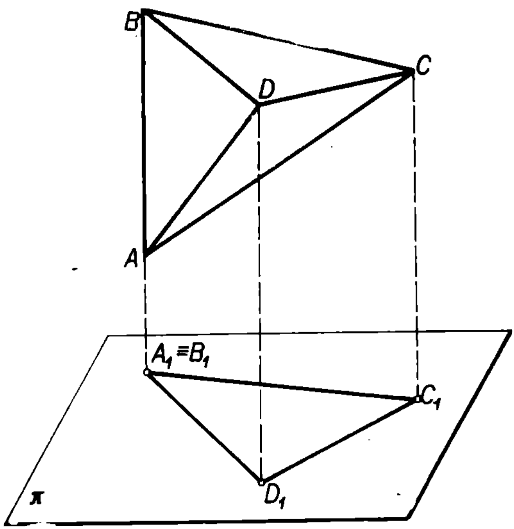
$$= \frac{1}{6}av(d + e + f) = \frac{1}{3}P(d + e + f),$$

jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Výraz $\frac{1}{3}(d + e + f)$ je — jak se dá dokázat — vzdálenost těžiště T stěny DEF od stěny ABC (od podstavy ABC). Vyslovená věta se potom dá formulovat jinak. Pokuste se o to.

Příklad 5. Je dán čtyrstěn $ABCD$ a rovina π kolmá k hraně AB. Pravoúhlým průmětem čtyrstěnu do roviny π je trojúhelník $A_1C_1D_1$, jehož obsah označíme R. Dokažte, že objem V čtyrstěnu $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3}R.AB.$$



Obr. 8

D ů k a z (obr. 8). Trojúhelník $A_1C_1D_1$ je řídicím trojúhelníkem hranolové plochy, jejíž směr je dán promítacími přímkami $AA_1 \equiv BB_1$, CC_1, DD_1. Objem V čtyrstěnu $ABCD$ je roven rozdílu objemů těles $A_1C_1D_1BCD$, $A_1C_1D_1ACD$, které dovedeme vypočítat podle pomocné věty 2. Platí tedy

$$V = \frac{1}{3} R(BB_1 + CC_1 + DD_1) - \frac{1}{3} R(AA_1 + CC_1 +$$

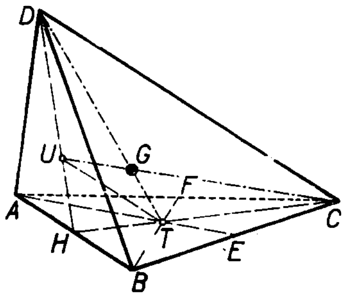
$$+ DD_1) = \frac{1}{3} R(BB_1 - AA_1) = \frac{1}{3} R.AB,$$

a tím je tvrzení dokázáno.

V geometrii trojúhelníka jste se seznámili s těžnicemi. I ve čtyrstěnu jsou přímky zvané těžnice; jsou to přímky, spojující vrchol čtyrstěnu s těžištěm protější stěny. Podle toho každý čtyrstěn má čtyři těžnice. Říkáme jim někdy tělesové těžnice na rozdíl od stěnových těžnic. Těžnicí rozumíme také někdy úsečku, omezenou vrcholem a těžištěm protější stěny. K omylu nemůže dojít, neboť z kontextu je vždy patrno, co je míněno slovem těžnice.

Příklad 6. Dokažte, že všechny těžnice čtyrstěnu procházejí jediným bodem (těžištěm čtyrstěnu), který každou těžnici dělí v poměru 3 : 1, přičemž větší díl je při vrcholu.

Důkaz (obr. 9). V daném čtyrstěnu $ABCD$ označme



Obr. 9

T, U těžiště stěn ABC, ABD. Těžnice CT stěny ABC a těžnice DU stěny ABD se protínají ve středu H hrany AB. Proto těžnice CU, DT čtyrstěnu leží v téže rovině. Jsou různoběžné; jejich společný bod označíme G. (Těžnice CU, DT nemohou být rovnoběžné. V trojúhelníku CDH je totiž bod U resp. bod T vnitřním bodem strany DH resp. strany CH. Proto úsečky CU, DT mají společný bod, který je vnitřním bodem trojúhelníka CDH.) Všimněme si přitom, že

$$\triangle HUT \sim \triangle HDC$$

a také

$$\triangle GUT \sim \triangle GCD,$$

neboť $UT \parallel DC$. Z první podobnosti dostaneme

$$HU : HD = UT : DC$$

a tedy

$$UT : DC = 1 : 3.$$

Z podobnosti druhých dvou trojúhelníků plyne

$$GT : GD = UT : DC.$$

Tudíž platí

$$GT : GD = 1 : 3.$$

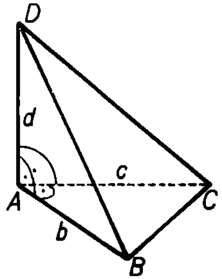
Dokázali jsme tak, že těžnice CU, DT jsou různoběžné a že jejich průsečík G dělí každou tuto těžnici v poměru 1 : 3. Avšak stejně se dá dokázat, že se těžnice CU protíná s těžnicí jdoucí vrcholem A nebo vrcholem B. Průsečík však dělí každou těžnici v poměru 1 : 3; musí to být tedy bod G, čímž je důkaz proveden.

Poznámka. Bod G je těžištěm čtyrstěnu i ve fyzikálním smyslu.

Příklad 7. Je dán čtyrstěn $ABCD$, o jehož hranách platí: $AD \perp AB$, $AD \perp AC$, $AB \perp AC$. Dokažte, že druhá mocnina obsahu stěny BCD je rovna součtu druhých mocnin obsahů zbývajících tří stěn.

Řešení (obr. 10). Označme

$$AB = b, \quad AC = c, \quad AD = d.$$



Obr. 10

Potom

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad CD = \sqrt{c^2 + d^2}, \quad BD = \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Obsahy jednotlivých stěn jsou

$$ABC = \frac{1}{2}\,bc, \quad ABD = \frac{1}{2}\,bd, \quad ACD = \frac{1}{2}\,cd$$

a odtud

$$ABC^2 + ABD^2 + ACD^2 = \frac{1}{4}\,(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2). \quad \text{(a)}$$

Zbývá vypočítat obsah stěny BCD. Označíme-li $\sphericalangle\, BDC = \delta$,

můžeme psát

$$BCD = \frac{1}{2}\,BD\,.\,CD\,.\sin\delta =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 + d^2)(c^2 + d^2)}\,.\sin\delta\,.$$

Z kosinové věty, použité na trojúhelník BCD, plyne

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2.CD.BD.\cos\delta.$$

Dosadíme a upravíme

$$b^2 + c^2 = c^2 + d^2 + b^2 + d^2 - 2.CD.BD.\cos\delta$$

$$\cos\delta = \frac{d^2}{\sqrt{(c^2 + d^2)(b^2 + d^2)}}.$$

Nyní již můžeme počítat $\sin\delta$:

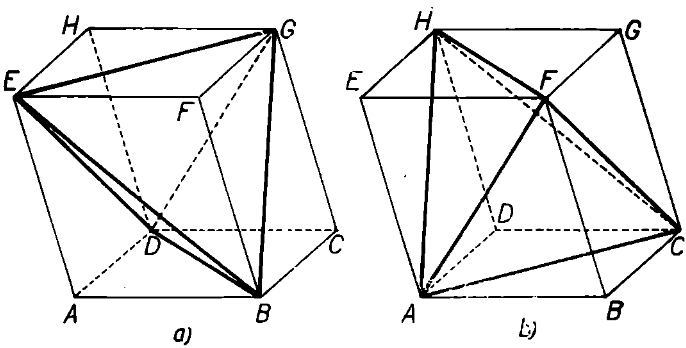
$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = \frac{b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2}{(c^2 + d^2)(b^2 + d^2)}.$$

Dosadíme-li do vzorce pro obsah trojúhelníka BCD, obdržíme

$$BCD^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2),$$

a to je výraz z rovnice (a).

V obr. 11a, b je znázorněn rovnoběžnostěn a do něho



Obr. 11

je dvěma různými způsoby vepsán čtyrstěn. Pro přehlednost je obrázek narýsován dvakrát. (Danému rovnoběžnostěnu vepsat čtyrstěn znamená sestrojit čtyrstěn tak, aby v každé stěně rovnoběžnostěnu ležela právě jedna hrana čtyrstěnu, a to tak, že každá hrana čtyrstěnu je stěnovou úhlopříčkou rovnoběžnostěnu.) Poněvadž oba čtyrstěny, které lze danému rovnoběžnostěnu vepsat, jsou shodné, můžeme se zabývat vždy pouze jedním z nich.

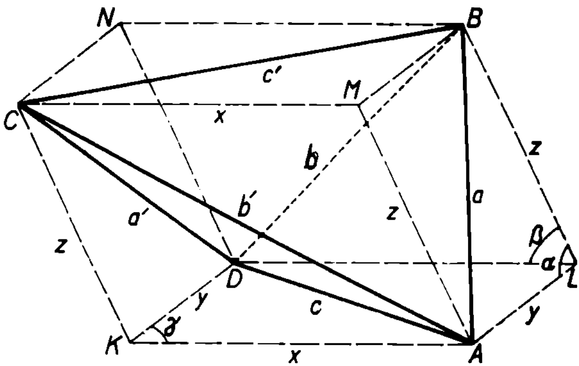
My však budeme používat obrácené cesty, tj. danému čtyrstěnu opíšeme rovnoběžnostěn a pomocí něho budeme studovat vlastnosti čtyrstěnu. To si také hned ukážeme na dvou příkladech, ale před tím uvedeme návod, jak lze danému čtyrstěnu opsat rovnoběžnostěn. Jsou tu dva způsoby.

První způsob spočívá v tom, že hranou AB daného čtyrstěnu $ABCD$ vedeme rovinu rovnoběžnou s protilehlou hranou CD a hranou CD vedeme rovinu rovnoběžnou s hranou AB. Podobně hranou AC (AD) vedeme rovinu rovnoběžnou s hranou BD (BC) a hranou BD (BC) vedeme rovinu rovnoběžnou s AC (AD). Tím dostaneme šest rovin, které omezují rovnoběžnostěn opsaný danému čtyrstěnu. Přitom hrany čtyrstěnu jsou stěnovými úhlopříčkami rovnoběžnostěnu.

Jiný způsob je tento: Středem H hrany AB vedeme rovnoběžku s hranou CD a na ni od bodu H naneseme v obou smyslech úsečku délky $\frac{1}{2} CD$. Dostaneme tak body H_1, H_2. Potom středem K hrany CD vedeme rovnoběžku s hranou AB a na ni od bodu K naneseme v obou smyslech úsečku délky $\frac{1}{2} AB$. Získané body označíme K_1, K_2. Rovnoběžníky AH_1BH_2, DK_1CK_2 jsou shodné, leží v rovinách navzájem rovnoběžných (a různých) a ke každé straně jednoho existují s ní rovnoběžné strany druhého. Oba rovnoběžníky jsou protější stěny hledaného rovnoběžnostěnu $AH_1BH_2K_1CK_2D$.

Příklad 8. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Vypočtěte vzdálenost středů protějších hran AB, CD.

Řešení (obr. 12). Danému čtyrstěnu opišme rovnoběžnostěn; označíme jej $ALDKMBNC$. Pro stručnost zavedeme toto označení:



Obr. 12

$$AB = a, \quad BD = b, \quad AD = c,$$

$$CD = a', \quad AC = b', \quad BC = c',$$

$$AK = LD = BN = MC = x,$$

$$AL = MB = CN = KD = y,$$

$$AM = LB = DN = KC = z,$$

$$\sphericalangle ALB = \alpha, \quad \sphericalangle BLD = \beta, \quad \sphericalangle AKD = \gamma.$$

Je vidět, že vzdálenost středů hran AB, CD je rovna x. Z trojúhelníků ALB, KDC postupně plyne

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz.\cos \alpha,$$
$$a'^2 = y^2 + z^2 + 2yz.\cos \alpha.$$

Odtud

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a'^2). \qquad (1)$$

Podobně dospějeme k dalším dvěma rovnicím

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1}{2}(c^2 + c'^2), \\ x^2 + z^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + b'^2). \end{aligned} \qquad (2)$$

Tím jsme dospěli k soustavě tří rovnic o třech neznámých. Jejich řešením dostaneme

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2}\,.$$

Běží tu o vzdálenost a proto při odmocnině bereme znaménko +. Kromě toho musí platit

$$b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2 > 0.$$

Tato nerovnost je skutečně splněna, jak se přesvědčíme, dosadíme-li do rovnic (1), (2).

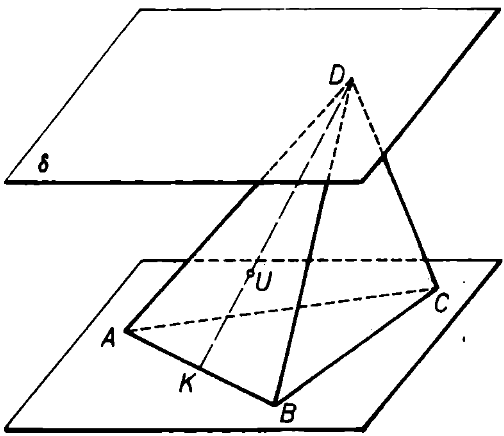
Příklad 9. Dokažte, že oba čtyrstěny, které jsou vepsány témuž rovnoběžnostěnu různými způsoby, jsou shodné.

Důkaz (obr. 11a, b). Všimněme si nejprve toho, že oba čtyrstěny nemají společný žádný vrchol. Osm vrcholů daného rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ je tedy rozděleno do dvou skupin: B, D, E, G a H, F, C, A. Body první skupiny jsou vrcholy jednoho čtyrstěnu, body druhé skupiny jsou vrcholy druhého čtyrstěnu. Zároveň vidíme, že vrcholy jednoho čtyrstěnu jsou souměrně sdružené s vrcholy druhého čtyrstěnu podle středu rovnoběžnostěnu. Oba čtyrstěny jsou podle toho přímo shodné. To znamená, že jeden z nich lze přemístit tak, aby splynul s druhým. Tím je důkaz proveden.

Příklad 10. Je dána množina všech čtyrstěnů, které mají společnou stěnu ABC a vrchol D v rovině δ rovnoběžné s rovinou ABC. Jaká je množina všech těžišť pobočné stěny ABD?

Řešení (obr. 13). Střed hrany AB označme K a těžiště stěny ABD označme U. Víme, že platí

$$KU = \frac{1}{3} KD.$$



Obr. 13

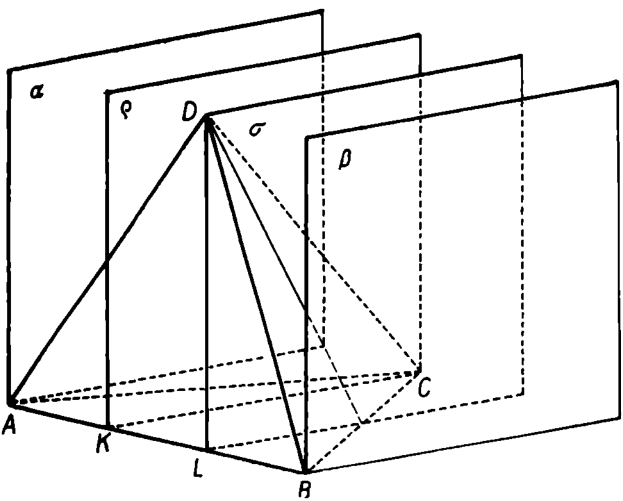
Poněvadž vrchol D se pohybuje v rovině δ, pohybuje se U v rovině μ, která je s rovinou ABC rovnoběžná a je od ní vzdálena třetinu vzdálenosti roviny δ od roviny ABC a leží mezi rovinami ABC, δ.

Mějme obráceně v rovině μ bod U'. Přímka KU' protne rovinu δ v bodě D', o němž platí

$$KD' = 3.KU'.$$

Bod U' je proto těžištěm trojúhelníka ABD', tj. je těžištěm pobočné stěny ABD' čtyrstěnu $ABCD'$. Dokázali jsme tak, že množina všech těžišť U je rovina μ.

Příklad 11. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Body A, B, C, D proložte čtyři roviny navzájem rovnoběžné tak, aby vzdálenosti každých dvou sousedních rovnoběžných rovin si byly rovny.



Obr. 14

Řešení (obr. 14). Hranu AB daného čtyrstěnu rozdělme na tři shodné části AK, KL, LB. Rovina ϱ proložená přímkou CK rovnoběžně s přímkou DL a rovina σ proložená přímkou DL rovnoběžně s přímkou CK jsou již dvě žádané roviny, procházející vrcholy C a D. Zbývající dvě roviny jsou s nimi rovnoběžné a procházejí vrcholy A, B. Tyto roviny označíme α, β.

Nalezené roviny ϱ, σ, α, β vyhovují požadavkům úlohy, neboť a) jsou navzájem rovnoběžné, b) na přímce AB, která je protíná po řadě v bodech A, K, L, B, vytínají úseky AK, KL, LB, pro něž platí

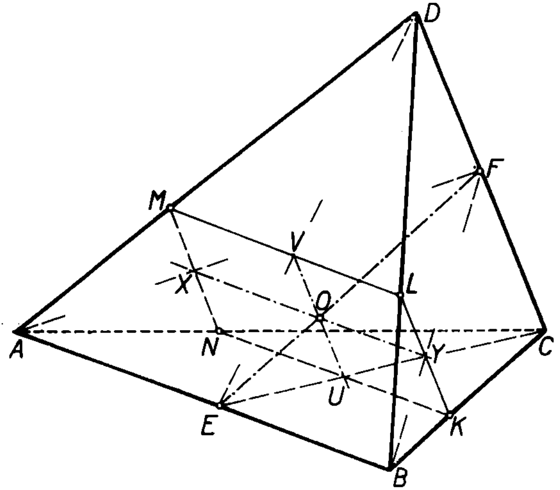
$$AK = KL = LB.$$

Tím máme zaručeno, že vzdálenosti každých dvou sousedních rovin si jsou rovny.

Mohli jsme však spojit též body C, L a D, K a pak přímkou CL vést rovinu rovnoběžnou s přímkou DK a přímkou DK vést rovinu rovnoběžnou s CL. Takovýmto způsobem bychom došli k nové čtveřici rovin, vyhovujících podmínkám úlohy. Snadno usoudíme, že úloha má dvanáct různých řešení.

Příklad 12. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Dokažte, že množina středů všech rovnoběžníků, v nichž je daný čtyrstěn proťat rovinami rovnoběžnými s hranami AB, CD, je úsečka s výjimkou jejích krajních bodů, která spojuje středy těchto dvou hran.

Důkaz (obr. 15). Střed hrany AB (CD) označme E (F). Z množiny zmíněných řezů zvolme rovnoběžník $KLMN$, kde K, L, M, N jsou po řadě vnitřní body hran BC, BD, AD, AC. Středy hran AB (CD) jsou E (F). Přímka AF protíná úsečku MN v jejím středu X, přímka BF protíná úsečku KL v jejím středu Y. Úsečka XY je střední příčka v rovnoběžníku $KLMN$. Podobně přímka CE (DE)

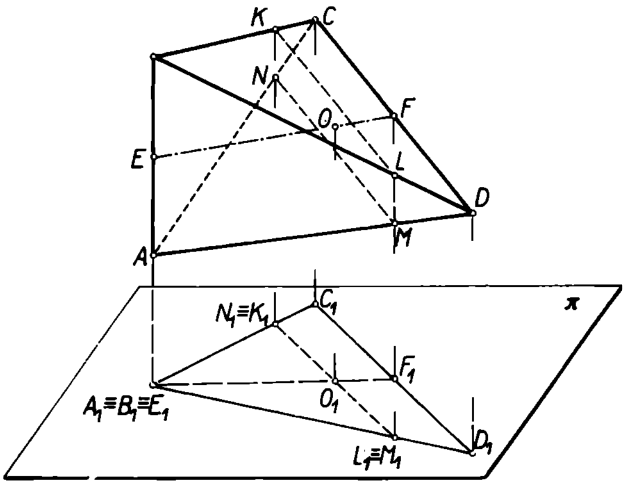


Obr. 15

půlí úsečku KN (LM) v bodě U (V). Úsečka UV je střední příčka v rovnoběžníku $KLMN$. Body A, X, F, Y, B, E leží v rovině ϱ a body C, U, E, V, D, F leží v rovině $\sigma \not\equiv \varrho$. Průsečnicí obou těchto rovin je přímka EF. Střední příčky XY, UV se protínají nutně na přímce EF v bodě O.

Obráceně. Zvolme vnitřní bod O' úsečky EF a veďme jím rovinu rovnoběžnou s hranami AB, CD. Ta protne hrany BC, BD, AD, AC postupně v bodech K', L', M', N', jež jsou vnitřními body uvedených hran a proto $K'L'M'N'$ je rovnoběžník. Podle předešlého má tento rovnoběžník svůj střed na přímce EF, ale tato přímka má s rovinou $K'L'M'N'$ pouze jeden společný bod, a to je O'. Tím je důkaz proveden.

Jiný důkaz. Právě uvedenou větu lze dokázat jednodušeji na základě vhodně zvolených průmětů. Sestrojme nejprve průmět daného čtyrstěnu tak, aby hrana AB, na níž leží bod E, se promítla do bodu $A_1 \equiv B_1 \equiv E_1$ (obr. 16a). Pak průmětem rovnoběžníka $KLMN$ je úsečka K_1L_1, kde $K_1 \equiv N_1$, $L_1 \equiv M_1$, rovnoběžná s úsečkou C_1D_1.



Obr. 16

Přitom body K_1, L_1 jsou vnitřní body úseček A_1C_1, A_1D_1. Střed O řezu se promítá do středu úsečky K_1L_1 a leží proto na té střední příčce řezu $KLMN$, v níž rovina ABF protne rovinu $KLMN$. — Promítněme po druhé daný čtyrstěn tak, aby se hrana CD promítla do bodu $C_2 \equiv D_2$. Úvahou shodnou s předešlou zjistíme, že bod O leží na té střední příčce řezu $KLMN$, v níž rovina CDE protne rovinu $KLMN$. Bod O je tedy průsečík obou středních příček, čili leží uvnitř úsečky EF.

Druhou část důkazu přenechávám čtenářům.

Příklad 13. Dokažte větu: Jestliže pata výšky, spuštěné z vrcholu D čtyrstěnu $ABCD$ na stěnu ABC, splývá se středem kružnice opsané této stěně, pak platí $AD = BD = CD$. — Dokažte, že platí i věta obrácená.

Důkaz. Patu tělesové výšky z vrcholu D označme D_1. Podle předpokladů naší úlohy platí

$$AO = BO = CO$$

a důsledek toho je, že

$$\triangle ADO \cong \triangle BDO \cong \triangle CDO,$$

neboť to jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v odvěsnách. Ale potom se sobě rovnají i přepony:

$$AD = BD = CD$$

a důkaz je proveden.

Obráceně. Nechť platí

$$AD = BD = CD.$$

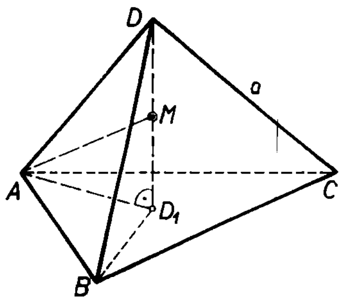
Pak trojúhelníky ADO, BDO, CDO jsou shodné, neboť jsou pravoúhlé, mají společnou odvěsnu DO a shodují se v přeponě. Podle věty *Ssu* jsou shodné a důsledek toho je, že

$$AO = BO = CO,$$

z čehož plyne, že bod O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Příklad 14. Dokažte větu: Přímky, které spojují střed tělesové výšky pravidelného čtyrstěnu s vrcholy, jimiž tato výška neprochází, jsou k sobě kolmé.

Důkaz (obr. 17). V daném pravidelném čtyrstěnu $ABCD$ proložíme výšku vrcholem D; její patu označme D_1 a střed výšky označme M. Délka hrany daného čtyr-



Obr. 17

stěnu je a. Délku tělesové výšky $DD_1 = v$ jsme vypočítali v příkl. 4:

$$DD_1 = v = a\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Tudíž

$$MD_1 = \frac{1}{2}\,v = a\sqrt{\frac{1}{6}}\,.$$

Délka úsečky AD_1 je rovna $\frac{2}{3}$ výšky rovnostranného trojúhelníka ABC, tj.

$$AD_1 = BD_1 = CD_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,.$$

Délku úsečky AM vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka AMD_1 užitím Pythagorovy věty:

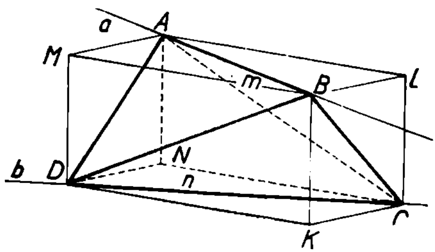
$$AM^2 = AD_1^2 + MD_1^2 = \frac{a^2}{2}\,.$$

Poněvadž $AM^2 + BM^2 = AB^2$, je trojúhelník ABM pravoúhlý. Podobně zjistíme, že i trojúhelníky BCM a ACM

jsou pravoúhlé a z toho plyne, že každá z přímek AM, BM, CM je kolmá k druhým dvěma, jak jsme měli dokázat.

Příklad 15. Jsou dány dvě mimoběžné přímky a, b a na nich jsou dány po řadě úsečky $AB = m$, $CD = n$ konstantních délek. Ukažte, že čtyrstěn $ABCD$ má stálý objem, nezávislý na poloze úseček AB, CD.

Řešení (obr. 18). Čtyrstěnu $ABCD$ opište známým způsobem (viz př. 8) rovnoběžnostěn. Jeho objem je



Obr. 18

$$V = \frac{1}{2}\,mn.\sin\omega.d,$$

kde d je výška rovnoběžnostěnu, příslušná těm stěnám, které obsahují mimoběžky a, b a ω je úhel mimoběžek a, b. Uvědomme si, že d je také vzdálenost daných dvou mimoběžek.

Opsaný rovnoběžnostěn označme $CKDNLBMA$. Odečteme-li od jeho objemu objemy čtyrstěnů $CKDB$, $ABMD$, $ABCL$, $CDNA$, dostaneme objem čtyrstěnu $ABCD$. Avšak čtyrstěny, jejichž objemy máme odečíst, mají stejné objemy, neboť mají shodné podstavy a tutéž výšku d. Objem jednoho z nich je

$$\frac{1}{2}\,mn.\sin\omega.\frac{d}{3}=\frac{1}{6}\,mnd.\sin\omega.$$

Tedy objem čtyrstěnu $ABCD$ je

$$V=mnd.\sin\omega-\frac{4}{6}\,mnd.\sin\omega=\frac{1}{3}\,mnd.\sin\omega.$$

Odtud je již patrno, že vyslovená věta je správná.

Poznámka. Při důkazu jsme použili vzorce pro obsah obecného čtyřúhelníka, který platí tím spíš pro obsah rovnoběžníka,

$$P_4=\frac{1}{2}\,mn.\sin\omega,$$

kde m, n jsou délky úhlopříček a ω je úhel jimi sevřený.

Příklad 16. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Nechť T je libovolný jeho vnitřní bod. Přímky AT, BT, CT, DT protínají protější stěny postupně v bodech A', B', C', D'. Dokažte, že platí

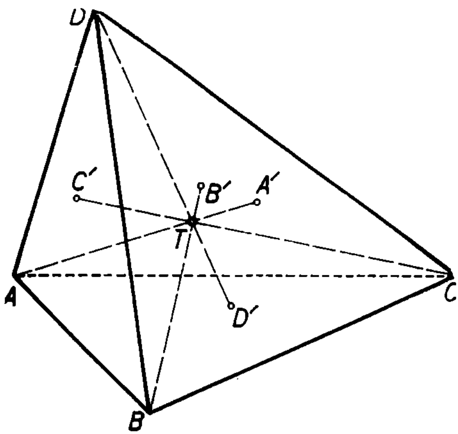
$$\frac{TA'}{AA'}+\frac{TB'}{BB'}+\frac{TC'}{CC'}+\frac{TD'}{DD'}=1.$$

Důkaz (obr. 19). Bod T je vrcholem čtyř čtyrstěnů: $TABC$, $TABD$, $TACD$, $TBCD$. Objemy těchto čtyrstěnů po řadě označíme V_4, V_3, V_2, V_1 a jejich výšky h_4, h_3, h_2, h_1. O objemech platí

$$V_1+V_2+V_3+V_4=V, \tag{1}$$

kde V je objem daného čtyrstěnu. Označíme-li ještě v_1, v_2, v_3, v_4 výšky daného čtyrstěnu, příslušné po řadě stěnám BCD, ACD, ABD, ABC, můžeme psát

$$\frac{V_1}{V}=\frac{BCD.h_1}{BCD.v_1}=\frac{h_1}{v_1}=\frac{TA'}{AA'}.$$



Obr. 19

Podobně získáme rovnice

$$\frac{V_2}{V} = \frac{TB'}{BB'}, \frac{V_3}{V} = \frac{TC'}{CC'}, \frac{V_4}{V} = \frac{TD'}{DD'}.$$

Sečtením všech čtyř vztahů a s použitím rovnice (1), obdržíme žádaný vztah.

V dalších řádcích si všimneme kulové plochy opsané danému čtyrstěnu a kulových ploch vepsaných danému čtyrstěnu.

Příklad 17. Dokažte: Existuje právě jedna kulová plocha, která prochází všemi vrcholy daného čtyrstěnu $ABCD$.

Důkaz. Existuje-li kulová plocha, která prochází všemi vrcholy daného čtyrstěnu, pak její střed leží současně v těchto rovinách: a) v rovině souměrnosti úsečky AB, b) v rovině souměrnosti úsečky BC, c) v rovině souměrnosti úsečky CD. Žádné dvě z těchto rovin nejsou rovnoběžné, neboť žádné dvě ze zmíněných hran nejsou rovnoběžné. Také uvedené tři roviny nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou, neboť hrany AB, BC, CD neleží v téže rovině ani nejsou rovnoběžné s toutéž rovinou. Naše roviny souměrnosti mají tedy společný právě jeden bod, bod S, a to je střed hledané kulové plochy.

Skutečně, bod S leží v rovině souměrnosti úsečky AB a proto

$$SA = SB.$$

Leží také v rovině souměrnosti úsečky BC, tudíž

$$SB = SC.$$

Poněvadž leží ještě v rovině souměrnosti úsečky CD, je

$$SC = SD.$$

Je tedy

$$SA = SB = SC = SD$$

a bod S je od všech vrcholů čtyrstěnu stejně vzdálen a je proto středem kulové plochy, procházející všemi vrcholy čtyrstěnu $ABCD$. Je to kulová plocha opsaná danému čtyrstěnu.

Nyní si povíme o existenci vepsaných kulových ploch. Vzpomeňte si na kružnice vepsané trojúhelníku. Víte, že existují čtyři kružnice vepsané danému trojúhelníku, z nichž jedna je vepsána uvnitř a zbývající tři jsou vepsány vně. Každá z vně vepsaných kružnic se dotýká jedné strany ve vnitřním bodě a druhých dvou stran na prodloužení. U čtyřstěnu je situace obdobná i když složitější.

Příklad 18. Existuje osm kulových ploch, které jsou vepsány danému čtyrstěnu. Jedna z nich je vepsána uvnitř (dotýká se všech stěn v jejich vnitřních bodech) a ostatních sedm je vně vepsaných. Z nich zase čtyři se dotýkají vždy jedné stěny ve vnitřním bodě a zbývajících tří stěn na prodloužení. Zbývající tři kulové plochy se dotýkají všech stěn na prodloužení. Dokažte.

Poznámka. Ukazuje se, že každá kulová plocha ze zmíněné skupiny čtyř kulových ploch je vždy v té části prostoru, které jsme říkali nad stěnou. Každá kulová plocha z druhé skupiny je v části prostoru nad hranou.

Důkaz. a) Daný čtyrstěn budiž $ABCD$. Sestrojme tu rovinu souměrnosti rovin ABC, BCD, která protíná hranu AD. Sestrojme dále tu rovinu souměrnosti rovin BCD, ACD (ABD, ACD), která protíná hranu AB (BC). Žádné dvě z uvedených tří rovin souměrnosti nejsou navzájem rovnoběžné, neboť žádné dvě z hran BC, CD, AD nejsou rovnoběžné. Sestrojené tři roviny nejsou ani rovnoběžné s toutéž přímkou, neboť hrany BC, CD, AD neleží v téže rovině, ani nejsou rovnoběžné s toutéž rovinou. Uvažované tři roviny souměrnosti mají tedy společný právě jeden bod, bod O, a to je střed kulové plochy vepsané danému čtyrstěnu.

Skutečně, bod O je především vnitřní bod čtyrstěnu $ABCD$ a poněvadž leží v sestrojených rovinách souměrnosti, platí o něm*)

$$O \dashv ABC = O \dashv BCD,$$

$$O \dashv BCD = O \dashv ACD,$$

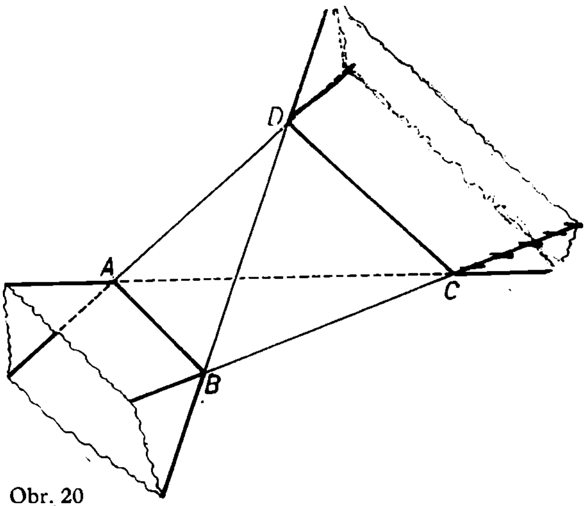
$$O \dashv ACD = O \dashv ABD.$$

*) Symbol $O \dashv ABC$ nebo $O \dashv \varrho$ znamená vzdálenost bodu O od roviny ABC nebo od roviny ϱ. Podobně vzdálenost bodu O od přímky p označujeme $O \dashv p$.

Bod O má tedy od všech stěn čtyrstěnu tutéž vzdálenost a je to tedy střed vepsané kulové plochy.

b) Rovinu souměrnosti rovin ABC, BCD a rovin BCD, ACD ponechme jako v případě a), ale z rovin souměrnosti stěn ACD, ABD vezměme tu, která je pro čtyrstěn $ABCD$ styčnou rovinou, tj. tu, která má s naším čtyrstěnem společnou právě hranu AD. I tyto tři roviny mají společný jediný bod O_3, neboť jako v případě a) žádné tři roviny souměrnosti nejsou vzájemně rovnoběžné ani nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou. Bod O_3 je tedy střed kulové plochy vně vepsané danému čtyrstěnu. Ze sestrojení plyne, že tato kulová plocha je umístěna v prostoru nad stěnou ABD.

Stejným způsobem můžeme dospět ke středům O_1, O_2, O_4 dalších tří kulových ploch.



Obr. 20

c) V obr. 20 je znázorněn čtyrstěn $ABCD$ a v něm jsou výrazněji vyznačeny části prostoru nad hranami AB, CD. Abychom sestrojili kulovou plochu vepsanou danému čtyrstěnu a současně ležící v jedné nebo ve druhé zmíněné části prostoru, sestrojíme tu rovinu souměrnosti rovin ABC, ABD, která protíná hranu CD. Pak sestrojíme tu rovinu souměrnosti rovin BCA, BCD (ADB, ADC), která je pro tento čtyrstěn rovinou styčnou. Sestrojené tři roviny souměrnosti nejsou ani spolu rovnoběžné, ani nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou. Mají tedy společný právě jeden bod O_5. Ten leží buď v té části prostoru, která je nad hranou AB, nebo v části prostoru nad hranou CD. Dá se opět ukázat, že O_5 je střed kulové plochy vně vepsané danému čtyrstěnu.

Obdobně bychom sestrojili ještě další dva středy O_6, O_7 kulových ploch vně vepsaných danému čtyrstěnu.

Příklad 19. Vypočtěte délku poloměru kulové plochy, která je uvnitř vepsána danému čtyrstěnu $ABCD$, jako funkci délek jeho hran.

Řešení. Střed O uvnitř vepsané kulové plochy spojme s vrcholy A, B, C, D daného čtyrstěnu. Tak je čtyrstěn $ABCD$ rozdělen na čtyři čtyrstěny, jejichž podstavy jsou ABC, ABD, ACD, BCD a k nim příslušné výšky jsou shodné a rovné poloměru ϱ uvažované kulové plochy. Platí

$(ABC).\varrho + (ABD).\varrho + (ACD).\varrho + (BCD).\varrho = 3V$,

kde V je objem daného čtyrstěnu. Poněvadž objem V i obsahy jednotlivých stěn dovedeme vyjádřit jako funkce délek hran, lze vypočítat ϱ jako funkci délek hran.

Cvičení

1. Je dán rovinný čtyrúhelník $ABCD$. Úsečky, spojující středy protějších stran, se vzájemně půlí. Dokažte.

2. Čtyrstěn, jehož vrcholy jsou těžiště stěn daného čtyrstěnu $ABCD$, je s daným stejnolehlý. Co je střed stejnolehlosti a jaký je koeficient stejnolehlosti?

3. Pravidelný hranol čtyrboký $ABCDEFGH$ je rovinou σ — která není s pobočnými hranami rovnoběžná, ale protíná je ve vnitřních bodech — proťat v rovnoběžníku $A'B'C'D'$. Označíme-li $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, $d = DD'$, dá se délka d úsečky DD' vyjádřit jako funkce délek a, b, c. Proveďte.

4. Vypočtěte objem tělesa $ABCDA'B'C'D'$ z předešlého cvičení.

5. Daný čtyrstěn $ABCD$ je rovinou σ proťat v trojúhelníku $A'B'C'$ tak, že body A', B', C' jsou vnitřními body po řadě hran AD, BD, CD. Součet těch vnitřních úhlů, které ve čtyřúhelnících $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ leží při vrcholech A', B', C' je konstantní, nezávislý na poloze roviny σ. Dokažte.

6. V daném čtyrstěnu $ABCD$ platí $a = b = \alpha = \beta = 1$. (Viz příklad 3.) Dokažte, že potom součet čtverců délek zbývajících dvou hran je menší než 4. (K důkazu použijte vzorce pro objem čtyrstěnu ze str. 7.)

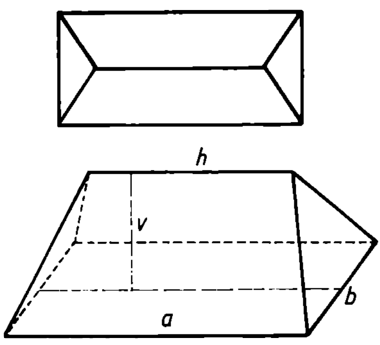
7. Vrcholem D čtyrstěnu $ABCD$ veďme přímky rovnoběžné s hranami AB, BC, AC. Dokažte, že tyto tři přímky leží v rovině.

8. a) Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Libovolný vnitřní bod jeho základny AB označme M. Ukažte, že součet vzdáleností bodu M od ramen trojúhelníka je nezávislý na poloze bodu M. b) Je dán pravidelný jehlan trojboký $VABC$. Na jeho podstavě je zvolen libovolný vnitřní bod M. Ukažte, že součet jeho vzdáleností od pobočných stěn jehlanu je nezávislý na poloze bodu M. (V 1. případě počítejte součet obsahů trojúhelníků AMC, BMC a v 2. případě součet objemů čtyrstěnů $MABD$, $MBCD$, $MACD$.)

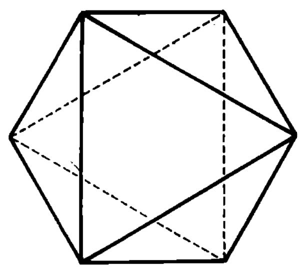
9. V daném čtyrstěnu $ABCD$ platí $AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $AD \perp CD$. Vypočtěte délku tělesové výšky daného čtyrstěnu, která prochází vrcholem D.

10. V příkl. 8. jsme počítali vzdálenosti mimoběžných hran čtyrstěnu. Výsledku se dá také použít k výpočtu úhlu mimoběžných hran. Proveďte podrobně.

11. Vzorce pro objem prismatoidu se dá použít i k výpočtu objemu těles a) znázorněného v obr. 21 svým půdorysem a názorným průmětem; b) pravidelného osmistěnu (obr. 22). Pro kontrolu vypočtěte objem pravidelného osmi-



Obr. 21



Obr. 22

stěnu jako součet objemů dvou shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů.

12. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Vrcholem D je proložena přímka d rovnoběžná s rovinou ABC a kolmá k hraně AB. Zjistěte množinu všech pat výšek, spuštěných z vrcholu C na ABD, kde vrchol D probíhá všechny body přímky d.

13. V předešlém příkladu nahraďte přímku d rovinou δ, procházející vrcholem D rovnoběžně s rovinou ABC a hledejte množinu všech pat tělesových výšek jdoucích vrcholem C, kde vrchol D probíhá všechny body roviny δ.

14. Rovina, procházející jednou hranou čtyrstěnu a půlící hranu protilehlou, dělí daný čtyrstěn na dva čtyrstěny téhož objemu. Dokažte. Lze větu rozšířit v tom smyslu, že protější hranu rozdělíme na n shodných dílů?

15. Řezem čtyrstěnu rovinou, která je rovnoběžná s dvěma protějšími hranami a která přitom protíná jednu ze zbývajících hran čtyrstěnu, je rovnoběžník. Může být tento rovnoběžník obdélníkem? Jestliže ano, kdy?

16. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku a. Z ní je odříznut čtyrstěn $ABDE$. Uvnitř trojúhelníka BDE je zvolen bod M, jehož vzdálenosti od stěn ABD, ABE, ADE jsou po řadě x, y, z. Ukažte, že součet $x + y + z$ je nezávislý na poloze bodu M.

17. Ukažte, že tělesová výška čtyrstěnu $ABDE$ z předchozího cvičení, která prochází vrcholem A, je rovna jedné třetině tělesové úhlopříčky krychle, z níž je čtyrstěn odříznut.

18. (Týká se opět čtyrstěnu $ABDE$ ze cvič. 16.) Zvolme libovolný vnitřní bod M čtyrstěnu $ABDE$. Ukažte, že součet čtverců vzdáleností bodu M od stěn BCD, CDH, EFG

zmenšený o součet čtverců vzdáleností bodu M od zbývajících tří stěn krychle je konstantní.

19. Do kulové plochy poloměru r je vepsán čtyrstěn $ABCD$ tak, že hrana AB je průměr dané kulové plochy. Dokažte, že potom pro objem čtyrstěnu platí

$$V \leqq \frac{1}{3} r^3.$$