## 4. kapitola. Vnější operace

In: Karel Hruša (author): Polynomy v moderní algebře. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1970. pp. 55–62.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403715

4. kapitola

# VNĚJŠÍ OPERACE

Dosud jsme se zabývali operacemi v množině $M$, tj. operacemi, jichž se zúčastnily pouze prvky množiny $M$. Označíme-li takovou operaci např. symbolem $\circ$, jde tu o tři prvky množiny $M$: $x \in M$, $y \in M$, $x \circ y \in M$. Tyto operace budeme nazývat *vnitřní*. Jsou však možné i operace *vnější*, tj. operace, jichž se zúčastní jednak prvky množiny $M$, jednak prvky jiné množiny $N$, která nemusí mít s množinou $M$ vůbec nic společného. Jde tu vlastně o operaci v množině $M \cup N$. Uvedeme příklad jedné takové operace.

---

Definice 14. Budiž $M$ množina, v níž je definována operace $\circ$, která má neutrální prvek $n$. Budiž dále $N_0$ množina všech přirozených čísel (včetně nuly). V množině $M \cup N_0$ definujeme operaci $\square$ takto:

Je-li $x \in M$, $r \in N_0$, pak $x \square r \in M$ a platí

1. $x \square 0 = n$,
2. $x \square (r + 1) = (x \square r) \circ x$

za předpokladu, že prvek $(x \square r) \circ x \in M$ existuje pro každé $r \in N_0$.

---

Přitom nevylučujeme, že $N_0 \subset M$.

Operace $\square$ je v definici 14 definována indukcí: V bodu 1 je vysloveno, co máme rozumět symbolem $x \square 0$, a bod 2 udává rekurentním vzorcem, jak se vypočítá prvek $x \square \square (r + 1)$ na základě (už známého) prvku $x \square r$.

Rozepíšeme-li podle definice 14 prvky $x \square r$ pro několik malých čísel, $r$, dostaneme:

$$x \square 0 = n,$$
$$x \square 1 = (x \square 0) \circ x = n \circ x = x,$$
$$x \square 2 = (x \square 1) \circ x = x \circ x,$$
$$x \square 3 = (x \square 2) \circ x = (x \circ x) \circ x,$$
$$x \square 4 = (x \square 3) \circ x = [(x \circ x) \circ x] \circ x$$

atd. Je-li operace $\circ$ asociativní, můžeme v konečných výsledcích závorky vynechat, neboť na jejich umístění nezáleží. Pak je

$$x \square 0 = n, \quad x \square 1 = x, \quad x \square 2 = x \circ x,$$
$$x \square 3 = x \circ x \circ x, \quad x \square 4 = x \circ x \circ x \circ x$$

atd., takže se prvek $x \square r$ pro $r \geqq 2$ jeví jako výsledek operace $\circ$ aplikované postupně na $r$ prvků vesměs rovných prvku $x$.

Příklad 21. Vnější operaci $\square$, která byla zavedena v definici 14, dobře známe ze školy i z praxe. Je-li $M$ číselný polookruh a vezmeme-li za operaci $\circ$ násobení v tomto polookruhu, dají se podmínky 1 a 2 z definice 14 přepsat v tvaru

$$1.\ x \square 0 = 1,$$
$$2.\ x \square (r + 1) = (x \square r).x,$$

neboť neutrálním prvkem násobení je číslo 1. Je však zřejmé, že číslo $x \square r \in M$ není nic jiného než *mocnina* $x^r \in M$, jejímž exponentem je přirozené číslo $r \in N_0$, neboť mocniny s přirozeným exponentem se definují rekurentně takto:

$$1.\ x^0 = 1,$$
$$2.\ x^{r+1} = x^r.x,$$

ale to je totéž jako předcházející vzorce. Poněvadž je náso-

bení asociativní operace, můžeme několik mocnin s nejmenšími přirozenými exponenty rozepsat takto:

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^2 = x.x, \quad x^3 = x.x.x, \quad x^4 = x.x.x.x$$

atd., jak je dobře známo ze školy. Uvedené vzorce platí pro každé (komplexní) číslo $x$.

Příklad 22. Jiný neméně dobře známý příklad vnější operace $\square$ je tvoření tzv. *přirozených násobků*, které vzniknou tak, že v číselném polookruhu $\mathsf{M}$ vezmeme za operaci $\circ$ sčítání a za prvek $n$ neutrální prvek sčítání, tj. číslo 0. Dostaneme vzorce

$$1.\ x \square 0 = 0,$$
$$2.\ x \square (r + 1) = (x \square r) + x.$$

Je-li $\mathsf{N}_0 \subset \mathsf{M}$, můžeme položit $x \square r = xr$ a máme dobře známé vzorce

$$1.\ x.0 = 0,$$
$$2.\ x(r + 1) = xr + x,$$

z nichž vyplývá, že

$$x.0 = 0, \quad x.1 = x, \quad x.2 = x + x,$$
$$x.3 = x + x + x, \quad x.4 = x + x + x + x$$

atd. Také tyto vzorce platí pro každé (komplexní) číslo $x$.

Příklad 23. Jako další příklad vezmeme množinu $\mathsf{M}$ všech přemístění roviny $\varrho$, jimiž se reprodukuje rovnostranný trojúhelník $ABC$, s operací $\star$, jíž je postupné skládání těchto přemístění (viz příklad 8 na str. 19). Poněvadž je operace $\star$ asociativní a má neutrální prvek $\mathfrak{I}$, dostaneme pro každé $\mathfrak{X} \in \mathsf{M}$ postupně

$$\mathfrak{X} \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{X} \square 1 = \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \square 2 = \mathfrak{X} \star \mathfrak{X}, \mathfrak{X} \square 3 = \mathfrak{X} \star \mathfrak{X} \star \mathfrak{X}$$

atd. Speciálně je

$$\mathfrak{I} \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{I} \square 1 = \mathfrak{I}, \mathfrak{I} \square 2 = \mathfrak{I} \star \mathfrak{I} = \mathfrak{I};$$

matematickou indukcí se dá dokázat, že pro každé $r \in \mathsf{N}_0$ je $\mathfrak{I} \square r = \mathfrak{I}$. Dále je

$$\mathfrak{S}_1 \square 0 = \mathfrak{I}, \mathfrak{S}_1 \square 1 = \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1 \square 2 = \mathfrak{S}_1 * \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{I}$$

a odtud opět matematickou indukcí plyne, že pro každé sudé $r \in \mathsf{N}_0$ je $\mathfrak{S}_1 \square r = \mathfrak{I}$ a pro každé liché $r \in \mathsf{N}_0$ je $\mathfrak{S}_1 \square r = \mathfrak{S}_1$. Obdobná tvrzení platí i pro $\mathfrak{S}_2$ a $\mathfrak{S}_3$. Konečně

$$\mathfrak{R}_1 \square 0 = \mathfrak{I}, \ \mathfrak{R}_1 \square 1 = \mathfrak{R}_1, \ \mathfrak{R}_1 \square 2 = \mathfrak{R}_1 * \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2,$$
$$\mathfrak{R}_1 \square 3 = \mathfrak{R}_2 \square \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{I}$$

a pro každé $r = 3k$, kde $k \in \mathsf{N}_0$, je $\mathfrak{R}_1 \square r = \mathfrak{I}$, pro každé $r = 3k + 1$ je $\mathfrak{R}_1 \square r = \mathfrak{R}_1$ a pro každé $r = 3k + 2$ je $\mathfrak{R}_1 \square r = \mathfrak{R}_2$. Obdobně pro každé $r = 3k$ je $\mathfrak{R}_2 \square r = \mathfrak{I}$, pro každé $r = 3k + 1$ je $\mathfrak{R}_2 \square r = \mathfrak{R}_2$ a pro každé $r = 3k + 2$ je $\mathfrak{R}_2 \square r = \mathfrak{R}_1$.

---

**Věta 8.** Je-li operace $\circ$ v množině $\mathsf{M}$ asociativní, splňuje operace $\square$, která k ní přísluší podle definice 14, tyto vzorce:

a) $(x \square r) \circ (x \square s) = x \square (r + s)$,

b) $(x \square r) \square s = x \square (rs)$

pro každé $r \in \mathsf{N}_0$ a pro každé $s \in \mathsf{N}_0$; je-li nadto operace $\circ$ také komutativní, pak

c) $(x \square r) \circ (y \square r) = (x \circ y) \square r$

pro každé $r \in \mathsf{N}_0$.

---

**Důkaz.** Všechny tři vzorce dokážeme matematickou indukcí.

a) Zvolme libovolné přirozené číslo $r \in \mathsf{N}_0$.

I. Podle bodu 1 z definice 14 a podle vlastnosti neutrálního prvku $n$ je

$$(x \square r) \circ (x \square 0) = (x \square r) \circ n = x \square r = x \square (r + 0).$$

II. Jestliže pro nějaké $s \in \mathsf{N}_0$ platí

$$(x \square r) \circ (x \square s) = x \square (r + s),$$

pak

$$(x \square r) \circ [x \square (s + 1)] = (x \square r) \circ [(x \square s) \circ x] =$$
$$= [(x \square r) \circ (x \square s)] \circ x = [x \square (r + s)] \circ x =$$
$$= x \square (r + s + 1).$$

Nejprve jsme použili bodu 2 z definice 14, potom asociovanosti operace $\circ$, dále předpokladu uvedeného na počátku bodu II a nakonec opět bodu 2 z definice 14.

Z bodů I a II vyplývá na základě principu matematické indukce, že vzorec a) platí pro každé libovolně zvolené $r \in \mathsf{N}_0$ a pro každé $s \in \mathsf{N}_0$.

b) Zvolme opět libovolné přirozené číslo $r \in \mathsf{N}_0$.

I. Podle bodu 1 z definice 14 je

$$(x \square r) \square 0 = n = x \square 0 = x \square (r.0).$$

II. Jestliže pro nějaké $s \in \mathsf{N}_0$ platí

$$(x \square r) \square s = x \square (rs),$$

pak

$$(x \square r) \square (s + 1) = [(x \square r) \square s] \circ (x \square r) =$$
$$= [x \square (rs)] \circ (x \square r) = x \square (rs + r) = x \square [r (s + 1)].$$

Nejprve jsme použili bodu 2 z definice 14, dále předpokladu uvedeného na počátku bodu II, potom vzorce a) a nakonec toho, že $rs + r = r (s + 1)$.

Z bodů I a II vyplývá na základě principu matematické indukce, že vzorec b) platí pro každé libovolně zvolené $r \in \mathsf{N}_0$ a pro každé $s \in \mathsf{N}_0$.

c) I. Podle bodu 1 z definice 14 a podle vlastností neutrálního prvku $n$ je

$$(x \square 0) \circ (y \square 0) = n \circ n = n = (x \circ y) \square 0.$$

II. Jestliže pro nějaké $r \in \mathsf{N}_0$ platí

$$(x \square r) \circ (y \square r) = (x \circ y) \square r,$$

pak

$$[x \square (r+1)] \circ [y \square (r+1)] = [(x \square r) \circ x] \circ [(y \square r) \circ y] =$$
$$= \{[(x \square r) \circ x] \circ (y \square r)\} \circ y = \{(x \square r) \circ [x \circ (y \square r)]\} \circ$$
$$\circ y = \{(x \square r) \circ [(y \square r) \circ x]\} \circ y = \{[(x \square r) \circ (y \square r)] \circ$$
$$\circ x\} \circ y = [(x \square r) \circ (y \square r)] \circ (x \circ y) = [(x \circ y) \square r] \circ$$
$$\circ (x \circ y) = (x \circ y) \square (r+1).$$

Přitom jsme použili nejprve bodu 2 z definice 14, potom asociativnosti operace $\circ$, pak ještě jednou asociativnosti operace $\circ$, dále komutativnosti operace $\circ$, načež opět asociativnosti operace $\circ$ a potom ještě jednou asociativnosti operace $\circ$, dále předpokladu uvedeného na počátku bodu II a nakonec opět bodu 2 z definice 14.

Z bodů I a II vyplývá na základě principu matematické indukce, že vzorec c) platí pro každé $r \in \mathsf{N}_0$.

Příklad 24. Pro mocniny s přirozeným mocnitelem (viz příklad 21 na str. 56) dává věta 8 známé vzorce

$$\text{a)}\ x^r.x^s = x^{r+s},$$
$$\text{b)}\ (x^r)^s = x^{rs},$$
$$\text{c)}\ x^r.y^r = (xy)^r,$$

které platí vzhledem k tomu, že násobení je operace asociativní a komutativní. Z obdobného důvodu platí pro přirozené násobky (viz příklad 22 na str. 57) vzorce

$$\text{a)}\ xr + xs = x(r+s),$$
$$\text{b)}\ (xr)s = x(rs),$$
$$\text{c)}\ xr + yr = (x+y)r.$$

Naproti tomu pro operaci $\square$ vznikající opakovaným použitím operace $\star$ v množině M všech přemístění roviny $\varrho$,

která reprodukují rovnostranný trojúhelník $ABC$ (viz příklad 23 na str. 57), platí jen vzorce

$$\text{a)}\quad (\mathfrak{X} \square r) \star (\mathfrak{X} \square s) = \mathfrak{X} \square (r + s),$$
$$\text{b)}\quad (\mathfrak{X} \square r) \square s = \mathfrak{X} \square (rs),$$

neboť operace $\star$ je asociativní. Tato operace však není komutativní, a proto neplatí vzorec c), jak je vidno například z toho, že

$$(\mathfrak{R}_1 \square 2) \star (\mathfrak{S}_1 \square 2) = \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{I} = \mathfrak{R}_2,$$

ale

$$(\mathfrak{R}_1 \star \mathfrak{S}_1) \square 2 = \mathfrak{S}_2 \square 2 = \mathfrak{I}.$$

Poznámka. V definici 14 jsme předpokládali, že operace $\circ$ má neutrální prvek $n$. Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možné použít definice 14 k definování prvku $x \square 0$. Mohli bychom to obejít například tak, že bychom položili $x \square 0 = y$, kde $y$ je nějaký vhodný prvek množiny M. Pro takto definovanou operaci $\square$ ovšem neplatí věta 8, neboť při jejím důkazu bylo podstatné, že $x \square 0 = n$.

Druhá možnost, jak lze neexistenci neutrálního prvku operace $\circ$ obejít, je ta, že v definici 14 nahradíme bod 1 podmínkou $x \square 1 = x$. Pak však máme definovány prvky $x \square r$ jen pro taková $r \in \mathsf{N}_0$, pro něž platí $r \geqq 1$. V tomto případě věta 8 platí; v důkazu jejích vzorců je však třeba změnit bod I takto:

$$\text{a)}\quad (x \square r) \circ (x \square 1) = (x \square r) \circ x = x \square (r + 1),$$
$$\text{b)}\quad (x \square r) \square 1 = x \square r = x \square (r.1),$$
$$\text{c)}\quad (x \square 1) \circ (y \square 1) = x \circ y = (x \circ y) \square 1.$$

Cvičení. Ve cvič. 41—48 znamená symbol $\square$ vnější operaci podle definice 14, popř. podle předcházející poznámky.

41. Operace $\circ$ v množině $\mathsf{R}_0^+$ všech nezáporných (reálných) čísel, která je dána vzorcem $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$ (viz cvič. 2 b) na str. 12), má neutrální prvek 0. Ukažte, že

pro každé $r \in \mathsf{N}_0$ je $x \square r = x \sqrt[r]{\ }$ a ověřte, že pro takto definovanou operaci $\square$ platí všechny vzorce z věty 8.

42. Operace $\circ$ v množině $\mathsf{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel, která je dána vzorcem $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$ (viz cvič. 2a) na str. 12), nemá neutrální prvek. Ukažte, že tato operace vede k vnější operaci $x \square r = \frac{x}{r}$ a vyšetřete, splňuje-li tato vnější operace vzorce z věty 8.

43. Prostudujte vnější operaci $\square$ v číselném tělese $\mathsf{T}$, která vznikne tak, že v definici 14 vezmete za operaci $\circ$ dělení a položíte $x \square 0 = 1$.

44. Řešte obdobnou úlohu s tím rozdílem, že za operaci $\circ$ vezmete odčítání a položíte $x \square 0 = 0$.

45. V tělese $\mathsf{C}_5$ zbytkových tříd podle modulu 5 vyšetřete všechny přirozené násobky a všechny mocniny s přirozeným exponentem všech prvků tělesa $\mathsf{C}_5$.

46. Tutéž úlohu řešte v okruhu $\mathsf{C}_6$ zbytkových tříd podle modulu 6.

47. Ukažte, že v okruhu $\mathsf{C}_m$ zbytkových tříd podle modulu $m$ je $\{m-1\}^{2k} = \{1\}$ a $\{m-1\}^{2k+1} = \{m-1\}$ pro všechna $k \in \mathsf{N}_0$.

48. Vyšetřte všecky prvky $\mathfrak{X} \square r$ v množině $\mathsf{M}$ všech přemístění roviny $\varrho$, jimiž se reprodukuje a) obdélník $ABCD$ b) čtverec $ABCD$ s operací $\star$ (viz cvič. 19 na str. 27).