2. kapitola

NEUTRÁLNÍ A INVERZNÍ PRVEK. GRUPA

Je-li v množině definována nějaká operace, může se stát, že existují v této množině prvky, které mají vzhledem k této operaci určité speciální vlastnosti.

Věta 1. Budiž M množina, v níž je definována operace $\circ$. Existují-li v množině M prvky m, n, které mají tu vlastnost, že pro každé $x \in M$ je

$$m \circ x = x, \quad x \circ n = x,$$

pak $m = n$, a takový prvek existuje v množině M jen jeden.

Důkaz. Poněvadž obě napsané rovnosti jsou splněny pro každé $x \in M$, dosaďme do první z nich $x = n$ a do druhé $x = m$. Dostaneme

$$m \circ n = n, \quad m \circ n = m$$

a odtud vyplývá, že $n = m$. Jestliže nějaký další prvek $n' \in M$ má tu vlastnost, že pro každé $x \in M$ je $x \circ n' = x$, pak podle toho, co jsme právě dokázali, je $n' = m$. Obdobně z předpokladu existence dalšího prvku $m' \in M$, který má tu vlastnost, že pro každé $x \in M$ je $m' \circ x = x$, plyne $m' = n$. Je tedy $m = n = m' = n'$; nejde tu o čtyři různé prvky, ale o jediný.

Všimněme si toho, že ve větě 1 nepředpokládáme žádnou speciální vlastnost operace $\circ$ kromě toho, že pro každé $x \in M$ existují oba prvky $m \circ x$ i $x \circ n$; zejména tedy nepředpokládáme, že operace $\circ$ je komutativní.

Definice 4. Je-li v množině M definována operace $\circ$, pak prvek $n \in$ M, který má tu vlastnost, že pro každé $x \in$ M je

$$n \circ x = x \circ n = x,$$

nazýváme *neutrální prvek operace* $\circ$.

Věta 1 říká, že v každé množině M, v níž je definována operace $\circ$, existuje nejvýše jeden (tj. jeden nebo žádný) neutrální prvek této operace.

Příklad 6. V množině N_0 všech přirozených čísel (včetně nuly) existuje neutrální prvek sčítání a je jím číslo 0, neboť pro každé $x \in N_0$ je

$$0 + x = x + 0 = x.$$

V téže množině existuje také neutrální prvek násobení, jímž je číslo 1, neboť pro každé $x \in N_0$ je

$$1 . x = x . 1 = x.$$

Táž tvrzení platí i pro množinu C všech celých čísel, pro množinu Q všech racionálních čísel, pro množinu R všech reálných čísel i pro množinu K všech komplexních čísel. Naproti tomu v žádné číselné množině M neexistuje neutrální prvek odčítání, neboť sice pro každé $x \in$ M je $x - 0 = x$, ale neexistuje žádné $n \in$ M, aby pro každé $x \in$ M bylo $n - x = x$. Na příkladu odčítání je vidět, že z existence „neutrálního prvku zprava" ($x - 0 = x$) nikterak nevyplývá existence „neutrálního prvku zleva".

Věta 2. Budiž M množina, v níž je definována operace $\circ$, která je asociativní. Existují-li k prvku $a \in$ M v množině M prvky b, c, které mají tu vlastnost, že

$$a \circ b = n, \quad c \circ a = n,$$

kde n je neutrální prvek operace $\circ$, pak $b = c$ a takový prvek existuje v množině M jen jeden.

Důkaz. Poněvadž $a \circ b = n$, $c \circ a = n$, je podle vlastnosti neutrálního prvku

$$b = n \circ b = (c \circ a) \circ b, \quad c = c \circ n = c \circ (a \circ b),$$

přičemž oba prvky $(c \circ a) \circ b$, $c \circ (a \circ b)$ v množině M existují, neboť existují prvky $n \circ b$ i $c \circ n$. Vzhledem k tomu, že operace je asociativní, je

$$(c \circ a) \circ b = c \circ (a \circ b)$$

a odtud vyplývá, že $b = c$. Jestliže nějaký další prvek $b' \in$ M má tu vlastnost, že $a \circ b' = n$, pak podle toho, co už bylo dokázáno, je $b' = c$. Obdobně z předpokladu existence dalšího prvku $c' \in$ M, pro který platí $c' \circ a = n$, vyplývá, že $c' = b$. Je tedy $b = c = b' = c'$; nejde tu o čtyři různé prvky, ale o jediný.

Tentokrát je v důkazu věty 2 podstatný předpoklad, že operace $\circ$ je asociativní; bez tohoto předpokladu věta neplatí.

Definice 5. Je-li v množině M definována operace $\circ$, pak prvky a, $\bar{a}$, které mají tu vlastnost, že

$$a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = n,$$

kde n je neutrální prvek operace $\circ$, nazýváme *navzájem inverzní prvky operace* $\circ$. O prvku $\bar{a}$ říkáme, že je *inverzní k prvku* a a o prvku a říkáme, že je *inverzní k prvku* $\bar{a}$ v operaci $\circ$.

Věta 2 říká, že v každé množině M, v níž je definována asociativní operace $\circ$, existuje ke každému prvku $a \in$ M nejvýše jeden inverzní prvek $\bar{a} \in$ M této operace.

Inverzní prvek k prvku a budeme zásadně označovat $\bar{a}$; podle toho také označíme inverzní prvek k prvku $\bar{a}$ symbolem $\bar{\bar{a}}$.

Z věty 2 vyplývá, že v asociativní operaci $\circ$ je inverzním prvkem k inverznímu prvku $\bar{a}$ původní prvek a, tj. že

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Je-li totiž $\bar{a}$ inverzním prvkem k prvku a, pak

$$a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = n.$$

Je-li dále $\bar{\bar{a}}$ inverzním prvkem k prvku $\bar{a}$, pak

$$\bar{a} \circ \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}} \circ \bar{a} = n.$$

Oba poslední vzorce však říkají, že a i $\bar{\bar{a}}$ jsou inverzní prvky k prvku $\bar{a}$, ale takový prvek je podle věty 2 nejvýše jeden. Musí tedy být $\bar{\bar{a}} = a$.

Příklad 7. V množině N_0 všech přirozených čísel (včetně nuly) existuje inverzní prvek sčítání pouze k číslu 0 a je jím zase číslo 0, neboť $0 + 0 = 0$ (neutrálním prvkem sčítání je tu číslo 0). K žádnému jinému číslu $a \in N_0$ neexistuje v této množině inverzní prvek sčítání $\bar{a}$, neboť podmínku $a + \bar{a} = 0$ lze v této množině splnit jen pro $a = \bar{a} = 0$. V téže množině existuje inverzní prvek násobení pouze k číslu 1 a je jím zase číslo 1, neboť $1 . 1 = 1$ (neutrálním prvkem násobení je číslo 1). K žádnému jinému číslu $a \in N_0$ neexistuje v této množině inverzní prvek násobení $\bar{a}$, neboť podmínku $a . \bar{a} = 1$ lze v této množině splnit jen pro $a = \bar{a} = 1$. Naproti tomu v množině C všech celých čísel existuje ke každému $a \in C$ inverzní prvek sčítání $\bar{a}$ a je jím opačné číslo $- a$, neboť

$$a + (- a) = (- a) + a = 0.$$

V množině C existuje inverzní prvek násobení pouze k číslům 1 a -1, neboť rovnost $a . \bar{a} = 1$ lze v této množině splnit jen tehdy, je-li $a = \bar{a} = 1$ nebo $a = \bar{a} = -1$. Rovněž v množině Q všech racionálních čísel, v množině R všech reálných čísel i v množině K všech komplexních čísel existuje ke každému prvku a inverzní prvek sčítání $\bar{a}$, pro který platí $\bar{a} = -a$. Ve všech těchto množinách také existuje ke každému prvku $a \neq 0$ inverzní prvek násobení $\bar{a}$, jímž je převrácené číslo $\frac{1}{a}$, neboť pro každé $a \neq 0$ je

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

V žádné číselné množině však neexistuje inverzní prvek násobení k číslu 0, neboť v žádné číselné množině neexistuje takové číslo x, aby $0 \cdot x = 1$.

Příklad 8. Budiž M množina všech přemístění roviny ϱ, jimiž se reprodukuje rovnostranný trojúhelník ABC ležící v této rovině. V této množině, která má šest prvků: $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2$, definujeme operaci $\star$ jako postupné skládání těchto přemístění — viz cvič. 4 na str. 13. Operaci $\star$ vyjadřuje následující tabulka.

$\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$	$\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{Y}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$
	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_1$
	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{R}_1$
	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{R}_2$
	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{I}$

Z ní je vidět, že neutrálním prvkem této operace je prvek $\mathfrak{I}$, neboť pro každé $\mathfrak{X} \in \mathsf{M}$ je

$$\mathfrak{X} \star \mathfrak{I} = \mathfrak{I} \star \mathfrak{X} = \mathfrak{X},$$

a že ke každému prvku $\mathfrak{X} \in \mathsf{M}$ existuje v této operaci inverzní prvek $\overline{\mathfrak{X}} \in \mathsf{M}$. Z tabulky totiž vyčteme

$$\mathfrak{I} \star \mathfrak{I} = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{R}_1 \star \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{I},$$

$$\mathfrak{S}_1 \star \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{S}_2 \star \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{S}_3 \star \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{I}$$

a to znamená, že

$$\overline{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}, \ \overline{\mathfrak{R}_1} = \mathfrak{R}_2, \ \overline{\mathfrak{R}_2} = \mathfrak{R}_1, \ \overline{\mathfrak{S}_1} = \mathfrak{S}_1, \ \overline{\mathfrak{S}_2} = \mathfrak{S}_2, \ \overline{\mathfrak{S}_3} = \mathfrak{S}_3.$$

Příklad 9. Všimněme si ještě operace $\triangle$ v množině R všech reálných čísel, která je dána vzorcem

$$x \triangle y = (x + y)(1 + xy).$$

Množinou vzorů je tu množina všech číselných dvojic $[x, y] \in \mathsf{R} \times \mathsf{R}$. Tato operace není asociativní, neboť např.

$$(1 \triangle 1) \triangle 2 = (2.2) \triangle 2 = 4 \triangle 2 = 6.9 = 54,$$

$$1 \triangle (1 \triangle 2) = 1 \triangle (3.3) = 1 \triangle 9 = 10.10 = 100.$$

Jejím neutrálním prvkem je číslo 0, neboť pro každé $x \in \mathsf{R}$ je

$$x \triangle 0 = 0 \triangle x = (x + 0)(1 + x.0) = x.1 = x.$$

Poněvadž operace $\triangle$ není asociativní, nemůžeme očekávat, že by pro ni platila věta 2 a že by ke každému číslu $x \in \mathsf{R}$ existovalo nejvýše jedno takové číslo $\bar{x} \in \mathsf{R}$, že

$$x \triangle \bar{x} = \bar{x} \triangle x = 0.$$

Pro každé číslo $x \in \mathsf{R}$, které je různé od čísel 0, 1, -1, existují v množině R taková čísla dvě a obě jsou navzájem různá: jsou to čísla $-x$ a $-\dfrac{1}{x}$, pro něž je

$$x \triangle (-x) = (x - x)(1 - x.x) = 0$$

a také

$$x \triangle \left(-\frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - x \cdot \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Pro $x = 1$ a pro $x = -1$ je ovšem $-x = -\frac{1}{x}$ a pro $x = 0$ číslo $-\frac{1}{x}$ neexistuje.

Definice 6. Množina M, v níž je definována operace $\circ$, se jmenuje *grupa vzhledem k operaci* $\circ$, má-li tyto vlastnosti:

1. Ke každému prvku $[x, y] \in M \times M$ existuje prvek $x \circ y \in M$.
2. Operace $\circ$ je asociativní.
3. V množině M existuje neutrální prvek n operace $\circ$.
4. Ke každému prvku $x \in M$ existuje inverzní prvek $\bar{x} \in M$ vzhledem k operaci $\circ$.

Operace $\circ$ se v tomto případě nazývá *grupová operace.*

V definici grupy nepředpokládáme, že je grupová operace komutativní (ale nevylučujeme to). Je-li grupová operace $\circ$ komutativní, nazývá se množina M *komutativní grupa vzhledem k operaci* $\circ$.

Z definice 6 vyplývá, že prázdná množina $\emptyset$ není grupou vzhledem k žádné operaci, neboť v každé grupě musí podle bodu 3 existovat aspoň jeden prvek, totiž neutrální prvek n grupové operace $\circ$.

Příklad 10. Množina N_0 všech přirozených čísel (včetně nuly) není grupa vzhledem ke sčítání ani vzhledem k násobení, neboť tu není splněn požadavek 4 z definice 6. Množina C všech celých čísel je komutativní grupa vzhledem ke sčítání, není to však grupa vzhledem k násobení, neboť násobení v množině C opět nesplňuje požadavek 4 z definice 6. Množina Q všech racionálních čísel, množina R všech reálných čísel i množina K všech komplexních čísel jsou komutativní grupy vzhledem ke sčítání; žádná z nich však není grupou vzhledem k násobení, neboť k číslu 0 neexistuje v žádné z těchto množin inverzní prvek násobení. Naproti tomu množina Q^+ všech kladných racionálních čísel, množina R^+ všech kladných reálných čísel, množina Q′ všech nenulových racionálních čísel i množina R′ všech nenulových reálných čísel jsou komutativní grupy vzhledem k násobení, ale žádná z nich není grupou vzhledem ke sčítání, neboť nesplňují požadavek 3 a v důsledku toho ani požadavek 4 z definice 6. Množina M všech přemístění roviny ϱ, jimiž se reprodukuje rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ϱ (viz příklad 8 na str. 19) je grupa vzhledem k operaci $\star$; není to však komutativní grupa.

Věta 3. Je-li množina M grupa vzhledem k operaci $\bigcirc$ a jsou-li a, b libovolné prvky množiny M, existuje právě jeden prvek $x \in$ M a právě jeden prvek $y \in$ M, pro něž platí

$$a \bigcirc x = b, \; y \bigcirc a = b.$$

Důkaz. a) Předpokládejme, že hledaný prvek x existuje; aplikujeme-li na rovnost $a \bigcirc x = b$ operaci $\bigcirc$ s inverzním prvkem $\bar{a}$ „zleva", dostaneme

$$\bar{a} \bigcirc (a \bigcirc x) = \bar{a} \bigcirc b.$$

Levou stranu lze na základě asociativnosti upravit takto:

$$\bar{a} \bigcirc (a \bigcirc x) = (\bar{a} \bigcirc a) \bigcirc x = n \bigcirc x = x,$$

takže

$$x = \bar{a} \bigcirc b.$$

Splňuje-li tedy nějaký prvek x danou rovnost, může to být jen právě nalezený prvek x, který je jediný, neboť k prvku a

existuje jediný inverzní prvek $\bar{a}$ vzhledem k operaci $\circ$ a výsledek operace $\circ$ je rovněž jediný. Je třeba ještě vyzkoušet, zda tento prvek danou rovnost skutečně splňuje. To však je zřejmé, neboť

$$a \circ (\bar{a} \circ b) = (a \circ \bar{a}) \circ b = n \circ b = b.$$

b) Obdobně dokážeme, že druhou rovnost splňuje jediný prvek

$$y = b \circ \bar{a};$$

při důkazu však musíme aplikovat operaci $\circ$ s inverzním prvkem $\bar{a}$ „zprava".

Jde-li o grupu, která je komutativní, je ovšem $x = y$; není-li grupa komutativní, může se stát, že $x \neq y$.

Příklad 11. Hledáme-li v grupě M všech přemístění roviny ϱ, jimiž se reprodukuje rovnostranný trojúhelník ABC, vzhledem k operaci $\star$ (viz příklad 8 na str. 19) takové prvky $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, pro něž je

$$\mathfrak{R}_1 \star \mathfrak{X} = \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{Y} \star \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2,$$

dostaneme

$$\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{R}_1} \star \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1,$$

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{R}_2 \star \overline{\mathfrak{R}_1} = \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1;$$

tu je $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$. Hledáme-li však v téže grupě prvky $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$ tak, aby

$$\mathfrak{R}_1 \star \mathfrak{Z} = \mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{U} \star \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S}_1,$$

vyjde

$$\mathfrak{Z} = \overline{\mathfrak{R}_1} \star \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_3,$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_1 \star \overline{\mathfrak{R}_1} = \mathfrak{S}_1 \star \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{S}_2;$$

v tomto případě je $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{U}$. Nalezené výsledky můžeme ovšem ověřit i přímo v tabulce operace $\star$ v příkladu 8.

V definici 6 jsme mohli místo požadavků 3 a 4 požadovat existenci takových prvků x, y, aby bylo $a \circ x = b$,

$y \circ a = b$ pro každé dva prvky a, b množiny M. To vyplývá z následující věty.

Věta 4. Nechť je v množině M definována operace $\circ$, která má tyto vlastnosti:

a) Ke každému prvku $[x, y] \in M \times M$ existuje prvek $x \circ y \in M$.

b) Operace $\circ$ je asociativní.

c) Ke každému $a \in M$ a ke každému $b \in M$ existuje (aspoň jeden) prvek $x \in M$ a (aspoň jeden) prvek $y \in M$, který splňuje rovnost $a \circ x = b$, popř. $y \circ a = b$.

Pak je množina M grupa vzhledem k operaci $\circ$.

Důkaz. Musíme ukázat, že operace $\circ$ má všecky vlastnosti z definice 6. Požadavky 1 a 2 z definice 6 jsou totožné s požadavky a) a b) naší věty. Splnění požadavku 3 dokážeme takto: Vezměme některý prvek $z \in M$ a označme n a m ty prvky množiny M, pro něž je

$$z \circ n = z, \quad m \circ z = z.$$

Takové prvky podle vlastnosti c) existují. Je-li x zcela libovolný prvek množiny M, existují podle téže vlastnosti takové prvky $u \in M$, $v \in M$, že

$$u \circ z = x, \quad z \circ v = x.$$

Pak je

$$x \circ n = (u \circ z) \circ n = u \circ (z \circ n) = u \circ z = x,$$

$$m \circ x = m \circ (z \circ v) = (m \circ z) \circ v = z \circ v = x.$$

Proto podle věty 1 je $m = n$, takže pro každé $x \in M$ je

$$x \circ n = n \circ x = x$$

a prvek n je tedy neutrálním prvkem operace $\circ$. Zbývá dokázat splnění požadavku 4. Je-li $a \in M$, pak podle bodu

c) existují takové prvky $b \in \mathsf{M}$, $c \in \mathsf{M}$, že

$$a \circ b = n, \quad c \circ a = n,$$

kde n je neutrální prvek operace $\circ$. Odtud podle věty 2 plyne, že $b = c$ a že tedy tento prvek je inverzním prvkem $\bar{a}$ k prvku a v operaci $\circ$.

Poznámka. V definici grupy nebylo třeba požadovat existenci neutrálního prvku a existenci inverzního prvku. Místo požadavků 3 a 4 z definice 6 stačí tyto poněkud slabší požadavky:

3'. Existuje takový prvek $n' \in \mathsf{M}$, že $x \circ n' = x$ pro každé $x \in \mathsf{M}$.

4'. Ke každému $a \in \mathsf{M}$ existuje prvek $a' \in \mathsf{M}$, pro nějž je $a \circ a' = n'$.

Tyto požadavky se liší od požadavků 3 a 4 tím, že požadují „neutrálnost" a „inverznost" prvků n' a a' jen „z jedné strany". Dokážeme, že také $n' \circ x = x$ pro každé $x \in \mathsf{M}$ a že $a' \circ a = n'$; tím bude dokázáno, že n' je neutrální prvek operace $\circ$ a že a' je inverzní prvek k prvku a v operaci $\circ$.

Nejprve dokážeme, že $a' \circ a = n'$. Označme a'' ten prvek množiny M, pro který platí $a' \circ a'' = n'$. Takový prvek podle bodu 4' existuje. Pak platí

$$a' \circ a = a' \circ (a \circ n') = a' \circ [a \circ (a' \circ a'')] =$$
$$= a' \circ [(a \circ a') \circ a''] = a' \circ (n' \circ a'') =$$
$$= (a' \circ n') \circ a'' = a' \circ a'' = n'.$$

Přitom jsme nejprve použili toho, že $a = a \circ n'$, pak toho, že $n' = a' \circ a''$, dále asociativnosti operace $\circ$, potom toho, že $a \circ a' = n'$, načež opět asociativnosti operace $\circ$, pak toho, že $a' \circ n' = a'$, a konečně znovu toho, že $a' \circ a'' = n'$. Tím je dokázáno, že a' je inverzní prvek k prvku a v operaci $\circ$.

Na základě toho už snadno vyjde, že také $n' \circ x = x$. Označíme-li x' ten prvek množiny M, pro který platí $x \circ x' = n'$, pak podle toho, co jsme právě dokázali, je také $x' \circ x = n'$. Proto

$$n' \circ x = (x \circ x') \circ x = x \circ (x' \circ x) = x \circ n' = x.$$

Přitom jsme nejprve použili toho, že $n' = x \circ x'$, pak asociativnosti operace $\circ$, dále toho, že $x' \circ x = n'$, a konečně toho, že $x \circ n' = x$. Je tedy skutečně n' neutrální prvek operace $\circ$.

Cvičení. 11. V množině C všech celých čísel jsou dány operace $\circ$, $\star$ vzorci $x \circ y = x + y + 1$, $x \star y = x + y - xy$. Vyšetřte, mají-li tyto operace neutrální prvky a ke kterým prvkům množiny C existují inverzní prvky těchto operací. Jak se změní výsledek, vezmete-li místo množiny C množinu R všech reálných čísel?

12. Vyšetřte, má-li operace střed v množině M všech bodů roviny ϱ (viz příklad 2 na str. 9) neutrální prvek.

13. V množině M reálných čísel (některých nebo všech) jsou dány operace max, min tak jako ve cvič. 8 na str. 14. Vyšetřte, za jakých podmínek existují neutrální prvky těchto operací a zda k některým prvkům množiny M existují inverzní prvky vzhledem k těmto operacím.

14. Budiž dána množina Z a označme M systém všech jejích podmnožin. V množině M jsou dány operace $\cup$ a $\cap$ (sjednocení a průnik). Vyšetřte, mají-li tyto operace neutrální prvek a ke kterým prvkům množiny M existují v těchto operacích inverzní prvky.

15. V množině N všech přirozených čísel (bez nuly) jsou dány operace D a n (největší společný dělitel a nejmenší společný násobek). Vyšetřte, mají-li tyto operace neutrální prvek a ke kterým prvkům množiny N existují v těchto operacích inverzní prvky.

16. Dokažte, že inverzním prvkem asociativní operace $\circ$ k prvku $a \circ b$ je prvek $\bar{b} \circ \bar{a}$, kde $\bar{a}$, $\bar{b}$ jsou inverzní prvky k prvkům a, b vzhledem k operaci $\circ$.

17. V množině $M = \{a, b, c\}$ je dána operace $\star$ touto tabulkou:

$x \star y$	$x \backslash y$	a	b	c
	a	a	b	c
	b	b	c	a
	c	c	a	b

Vyšetřte, je-li množina M grupou vzhledem k této operaci, najděte neutrální prvek této operace a ke každému prvku množiny M udejte inverzní prvek vzhledem k této operaci (pokud existuje).

18. Tutéž úlohu řešte pro množinu $M = \{a, b, c, d\}$, v níž je definována operace $\star$ tabulkou

$x \star y$	$x \backslash y$	a	b	c	d
	a	a	a	a	a
	b	a	b	c	d
	c	a	c	d	b
	d	a	d	b	c

19. a) Dokažte, že množina M všech přemístění roviny ϱ, jimiž se reprodukuje obdélník $ABCD$, je grupa vzhledem

k postupnému skládání $\star$ těchto přemístění. Najděte neutrální prvek operace $\star$ a ke každému prvku množiny M udejte inverzní prvek vzhledem k operaci $\star$. b) Úlohu opakujte pro množinu M všech přemístění roviny ϱ, jimiž se reprodukuje čtverec $ABCD$.

20. Je dána množina $\mathsf{M} = \{a, b\}$. V množině M udejte operaci $\circ$ tak, aby M byla grupou vzhledem k této operaci. Úlohu opakujte pro množinu $\mathsf{M} = \{a, b, c\}$ a pro množinu $\mathsf{M} = \{a, b, c, d\}$.