6. kapitola

NÁVOD NA RIEŠENIE NIEKTORÝCH ÚLOH

V tejto časti uvedieme riešenie niektorých úloh. Podrobnosť riešenia závisí od toho, ako sa nám zdá daná úloha obtiažna. V niektorých prípadoch uvedieme úplné riešenie a v niektorých len krátky návod.

Čísla udávajú číslo úlohy podľa číslovania v kapitolách I až V.

3. Aspoň 6. Rozdelíme ich do skupín podľa farby. Podľa d aspoň v jednej skupine budú aspoň dve, teda nájdu sa dve rovnakej farby. Keby vybral 5, mohlo by sa stať, že každá bude inej farby.

4. Všetky možné súčty sú: $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, \ldots, 6 + 6 = 12$, t. j. 11 rôznych súčtov. Stačí teda hodiť 12 krát.

5. Všetky možné súčty sú $1 + 1 + 1 = 3, 1 + 1 + 2 = 4, \ldots, 6 + 6 + 6 = 18$, t. j. 16 rôznych súčtov. Stačí hodiť 49 krát.

7. Na základe *Eulerovho vzťahu* (pozri príklad 3) má daný sedemsten $7 - 2 + 6 = 11$ hrán. Nech i-ta stena je n_i-uholník. Súčet $n_1 + n_2 + \ldots + n_7 = 22 =$ dvojnásobku počtu hrán. Podľa D aspoň jedno $n_i \geq 4$. Keďže každá stena je aspoň trojuholník, tak nutne práve jedna je štvoruholník.

9. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ dané čísla. Môžeme predpokladať $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{11} < 100$. Označme $b_i = \log a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 11$ (desiatkový logaritmus). Zrejme platí $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{11} < 2$. Rozdelíme interval $(0,2)$ na desať rovnako veľkých častí. Podľa (d) aspoň v jednej časti budú dve čísla, nech sú to b_i, b_j, $i \neq j$. Platí teda $|b_i - b_j| < \frac{2}{10}$, t. j. $\left|\log \frac{a_i}{a_j}\right| < \frac{2}{10}$ a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

10. Áno, použite (d)!

11. Rozdeľte štvorec na pravouhlé trojuholníky o stranách dĺžky 1, 2, $\sqrt{5}$!

14. Štvorec rozdelíme na 25 štvorcov o strane $\frac{1}{5}$. Aspoň v jednom sa nachádzajú tri body. Polomer kružnice opísanej štvorcu o strane $\frac{1}{5}$ je $\frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{2}{10 . \sqrt{2}} < \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

16. Uvažujte $n + 1$ čísel 1, 11, 111, ..., 11...11 a použite úlohu 15!

17. Podľa úlohy 16 existuje číslo tvaru 11...1100...00 deliteľné číslom p. Ale $11...1100...00 = 11...11 \times \times 100...00$. Druhý súčiniteľ nie je deliteľný číslom p, lebo je podľa predpokladu rôzny od 2,5.

19. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_{33}$ počet úloh, ktoré Ignác vyrieši prvý, druhý, ..., tridsiaty tretí deň. Takou istou úvahou ako v riešení príkladu 7 možno dokázať, že existuje niekoľko po sebe idúcoch dní, keď počet riešených úloh je deliteľný číslom 33. Ale 33 dní je menej ako 5 kalendárnych týždňov, teda počet riešených úloh je menší ako $5 . 13 = 65$ a teda rovná sa 33.

20. Riešenie rovnaké ako u príkladu 8.

21. Podľa úlohy 15, medzi číslami $a_i = 1 + q + q^2 + + \ldots + q^i$, $i = 1, 2, \ldots, p + 1$, existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom p. Nech sú to čísla a_i, a_j, $i < j$. Ale $a_j - a_i = q^{i+1} + \ldots + q^j = q^{i+1}(1 + q + \ldots + + q^{j-i-1})$. Keďže p a q sú nesúdeliteľné, p delí $1 + q + q^2 + \ldots + q^{j-i-1}$.

Druhé tvrdenie vyplýva z rovnosti $1 + q + q^2 + \ldots +$

$+ q^{kn+k-1} = (1 + \ldots + q^n) + q^{n+1}(1 + \ldots + q^n) + + \ldots + q^{(k-1)(n+1)}(1 + \ldots + q^n)$.

22. Uvažujme čísla $1, p, p^2, \ldots, p^{100\,000}$. Podľa úlohy 15 existujú $i < j \leqslant 100\,000$ také, že 100 000 delí číslo $p^j - p^i = p^i(p^{j-i} - 1)$. Keďže p a 100 000 sú nesúdeliteľné, potom 100 000 delí $p^{j-i} - 1$ a teda dekadický zápis tohoto čísla končí požadovanou skupinou cifier.

23. Úloha je zovšeobecnením úlohy 22.

24. Pre x prirodzené, $x \leqslant 1\,000\,000$ je $0 \leqslant [\sqrt{x} \log x] \leqslant \leqslant 6\,000$ $(0 \leqslant [\sqrt[3]{x} \log x] \leqslant 600)$. Podľa (D) existuje $k \leqslant 6\,000$ $(k \leqslant 600)$ také, že daná rovnica má aspoň 160 (1600) riešení.

25. Pozorne si prezrite riešenie príkladu 11 a poznámku!

29. Ak označíme prvočísla medzi a, b ako $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tak $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_k - p_{k-1}) \leqslant b - a$. Ak x je počet párov dvojičiek, máme $b - a \geq 2x + h + + (k - x - 2)4 = 4k - 8 + h - 2x$ a teda $x \geq [2(k-2) - - \frac{b - a - h}{2}]$.

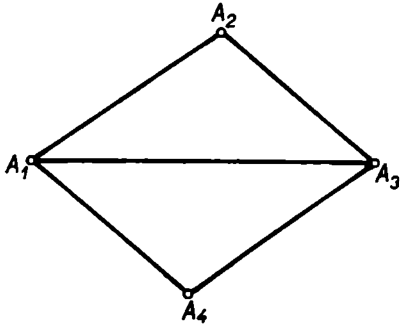
31. Rozoznávame dva prípady. Ak dané tri body ležia na priamke, tak jeden uhol nimi určený je π. Ak body neležia na priamke, potom uvažujeme vnútorné uhly trojuholníka, ktorý určujú. Keďže ich súčet je π, podľa (D_1) dostávame tvrdenie.

32. Označíme dané body $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Ak tri z nich ležia na priamke, tak je úloha riešená. Ak žiadne tri z nich neležia na priamke, budeme rozoznávať tri prípady.

a) Body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tvoria vrcholy vypuklého päťuholníka. Tvrdenie plynie podľa príkladu 13.

b) Body A_4, A_5 ležia vnútri trojuholníka $A_1A_2A_3$ (v prípade potreby body preznačíme). Keďže $\sphericalangle A_1A_4A_2 + + \sphericalangle A_2A_4A_3 + \sphericalangle A_3A_4A_1 = 2\pi$, podľa D aspoň jeden z nich je väčší alebo sa rovná $\frac{2}{3}\pi$.

c) Bod A_5 leží vnútri vypuklého štvoruholníka $A_1A_2A_3A_4$ (v prípade potreby body preznačíme). Potom bod A_5 leží vnútri práve jedného z trojuholníkov $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ (pozri obr. 7) a pokračujeme ako v časti b).



Obr. 7.

33. Ak tri z nich ležia na priamke, úloha je riešená. Ak dané body tvoria vypuklý šesťuholník, tvrdenie vyplýva podľa príkladu 13. V ostatných prípadoch nájdeme trojuholník a bod v jeho vnútri (porovnaj riešenie úlohy 32).

34. Rovnako ako úlohy 32 a 33. Diskusia je však zložitejšia.

36. Pozri nasledujúcu úlohu!

37. Predpokladajme, že máme umiestené n bodov v obdĺžniku o rozmeroch a, b tak, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch je väčšia než ε. Okolo každého bodu opíšeme kružnicu o polomere $\frac{\varepsilon}{2}$. Máme teda n kruhov, ktoré ležia vnútri obdĺžnika o rozmeroch $a + \varepsilon$, $b + \varepsilon$ a žiadne dva z nich nemajú spoločný bod. Keby $n > \frac{4(a + \varepsilon)(b + \varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$, tak aspoň jeden z uvedených kruhov by mal plošný obsah $\leqslant \frac{(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{n} < \frac{\pi\varepsilon^2(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)} = \frac{\pi\varepsilon^2}{4}$, čo je spor.

38. Rozdelíme obdĺžnik na štvorce o strane $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ a obdiaľniky o stranách nie väčších. Všetkých ich bude

$$\left(\left[\frac{\sqrt{2}a}{\varepsilon}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\sqrt{2}b}{\varepsilon}\right]+1\right)<\frac{2ab}{\varepsilon^2}+\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(a+b)+1.$$

Kružnica opísaná každému z nich má priemer nie väčší než ε.

39. Označíme šírky pásov $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Uvažujme o guľovej ploche polomeru R, ktorej stred leží v strede daného kruhu. Rovnako ako v riešení príkladu 19 utvoríme časti guľovej plochy. Plošný obsah i-tej časti bude menší alebo rovný $2\pi Rh_i$. Plošný obsah celej guľovej plochy je $4\pi R^2$, teda $\sum_{i=1}^{n} 2\pi Rh_i \geq 4\pi R^2$ a podľa (D_1) existuje i také, že $h_i \geq \frac{2R}{n}$.

40. a **41.** Rovnako, ako príklad 20.

42. Dokážeme len časť, týkajúcu sa štvorciferných čísel. Napr. nasledovných osem čísel má požadované vlastnosti: 1111, 1122, 2211, 2222, 1212, 2121, 1221, 2112. Predpokladajme, že existuje deväť štvorciferných čísel tak, že ľubovoľné dve sa líšia aspoň na dvoch miestach. Rozdelíme ich do dvoch skupín podľa toho, či začínajú cifrou 1 alebo 2. Aspoň jedna skupina obsahuje aspoň päť čísel. Vynechajme z nich prvú cifru, ktorá je u všetkých rovnaká. Dostaneme päť trojciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia aspoň na dvoch miestach. To je však spor s príkladom 21.

43. Dokazujeme matematickou indukciou. Indukčný krok sa robí podobne, ako sme previedli riešenie úlohy 42 pomocou príkladu 21.

Udáme návod na konštrukciu. Dokážeme dokonca nasledujúce silnejšie tvrdenie.

Pre každé $n \geq 2$ existujú dve skupiny A_n, B_n n-ciferných čísel, utvorených pomocou cifier 1, 2 s nasledovnými vlastnosťami:

a) každá zo skupín A_n, B_n má práve 2^{n-1} prvkov,

b) ľubovoľné dve čísla, ktoré buď obidve patria do skupiny A_n, alebo obidve patria do skupiny B_n, sa líšia aspoň na dvoch miestach,

c) ľubovoľné dve čísla, jedno zo skupiny A_n, druhé zo skupiny B_n, sa líšia aspoň na jednom mieste.

Pre $n = 2$ je tvrdenie pravdivé, nech napr. skupina A_2 obsahuje čísla 11, 22, skupina B_2 čísla 12, 21. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n. Zostrojíme skupiny A_{n+1}, B_{n+1} s uvedenými vlastnosťami.

Do skupiny A_{n+1} dáme čísla, ktoré vzniknú z čísel skupiny A_n pripísaním na koniec cifry 1 a z čísel skupiny B_n pripísaním na koniec cifry 2. Podobne, do skupiny B_{n+1} dáme čísla, ktoré vznikli pripísaním na koniec cifry 2 ku číslam skupiny A_n a cifry 1 ku číslam skupiny B_n. Teda napr. B_3 obsahuje čísla 112, 222, 121, 211. Podmienky a), b), c) sa overia bezprostredne.

44. Predpokladajme, že je možné zostrojiť 9 čísel s uvedenými vlastnosťami. Rozdelíme ich do dvoch skupín, podľa toho, či začínajú cifrou 1 alebo 2. Podľa (D) aspoň jedna skupina obsahuje aspoň 5 čísel. Vynechaním prvej cifry, ktorá je u všetkých rovnaká, dostaneme 5 päťciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia aspoň na troch miestach. To je však spor s príkladom 22.

47. Predpokladajme, že máme $k > \left[\frac{2^n}{n+1}\right]$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Označíme ich $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Nech G_i je množina všetkých tých n-ciferných čísel, ktoré sa od A_i líšia najviac na jednom mieste. Všetkých n-ciferných čísel je 2^n. Dve rôzne G_i nemajú spoločný prvok. Nech k_i je počet čísel v množine G_i. Potom $\sum_{i=1}^{k} k_i \leqslant 2^n$, teda aspoň jedno $k_i \leqslant \frac{2^n}{k} < n + 1$. Ale to je spor, lebo každá G_i má práve $n + 1$ prvkov.

48—50. Pozri úlohy 42, 43!

51. Predpokladajme, že je možné zostrojiť $k^2 + 1$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Rozdelíme ich do k skupín podľa prvej cifry. Aspoň jedna skupina obsahuje $k + 1$ čísel. Tieto všetky majú rovnakú prvú cifru. Rozdelíme ich znovu do k skupín podľa druhej cifry. Aspoň v jednej skupine budú dve čísla. Tieto čísla majú rovnakú prvú a druhú cifru, čo nie je možné, lebo podľa predpokladu sa líšia aspoň na dvoch miestach.

54. Predpokladajme, že je možné zostrojiť $h > \frac{k^n}{(nk + 1 - n)}$ čísel s uvedenými vlastnosťami. Označíme ich $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Nech G_i je množina tých čísel, ktoré sa od čísla A_i líšia najviac na jednom mieste. Ak d_i je počet prvkov množiny G_i, nutne $\sum_{i=1}^{h} d_i \leqslant k^n$. Stačí použiť ($D_3$) a fakt, že $d_i = n(k - 1) + 1$.

55. Postupujeme podobne ako v riešení úlohy 54, ale do G_i dáme tie čísla, ktoré sa od A_i líšia najviac na a) dvoch miestach, b) troch miestach.

56—57. Pozri príklad 27!

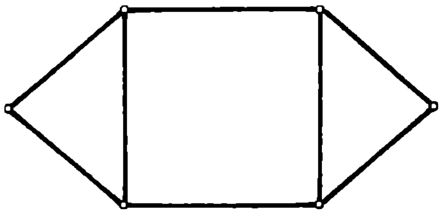
58—60. Pozri príklad 28!

62. Rovnako ako príklad 29. Nepoužijeme však úlohu 61, ale príklad 29.

63. Matematickou indukciou.

64. Na obr. 8. Vyznačená je len jedna farba.

65. a) Podľa príkladu 32 v dvojfarebnom 8-grafe existujú aspoň 4 jednofarebné trojuholníky. Aspoň dva z nich majú spoločný vrchol. Ak ho vynecháme, dostaneme dvojfarebný 7-graf, ktorý má aspoň o dva jednofarebné trojuholníky menej, ako náš 8-graf. Keďže má aspoň 4 jednofarebné trojuholníky, tak náš 8-graf má aspoň 6 jednofarebných



Obr. 8.

trojuholníkov. Tieto majú spolu 18 vrcholov, tedy aspoň jeden vrchol nášho 8-grafu je spoločný aspoň trom jednofarebným trojuholníkom. Ak ho vynecháme, dostaneme 7-graf, ktorý má aspoň o tri jednofarebné trojuholníky menej, ako 8-graf. Znovu použijeme príklad 32, tedy 8-graf má aspoň 7 jednofarebných trojuholníkov.

d) Podľa c) v 11-grafe existuje aspoň 16 jednofarebných trojuholníkov. Tieto majú spolu 48 vrcholov, teda aspoň jeden vrchol 11-grafu je spoločný piatim jednofarebným trojuholníkom. Keď ho vynecháme dostaneme 10-graf, ktorý má aspoň o 5 jednofarebných trojuholníkov menej, ako 11-graf. Postupujeme ďalej rovnako, ako v prípade a).

66. Postupujeme rovnako ako v riešení príkladu 34. Ak uvedených 6 vrcholov je spojené jednou farbou, alebo všetky hrany okrem jednej sú rovnakej farby, je úloha riešená.

Predpokladajme teda, že existujú aspoň dve hrany biele. V prípade a) stačí ku každej z bielych hrán pridať vrcholy A a B a máme dva biele 4-grafy.

Ak nastane prípad b), postupujeme nasledovne. V danom 6-grafe existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky (pozri príklad 31!). K bielemu (ak existuje) pridáme vrchol A, k čiernemu (ak existuje), pridáme vrchol B. V každom prípade máme dva jednofarebné 4-grafy.

67. Podobne ako príklad 34, ale zostrojíme tri vrcholy A, B, C.