5. kapitola

EŠTE KOMBINATORICKÁ TÉMA

Dirichletov princíp formulovaný v tvare (D) je svojou povahou kombinatorický, preto možno očakávať, že bude vhodný na riešenie úloh kombinatorického charakteru. Úlohy takého typu boli uvedené v predchádzajúcej kapitole. Ako ukážeme v nasledujúcich úlohách, (D) vedie k cieľu v mnohých prípadoch, keď nemáme k dispozícii prakticky žiadne iné prostriedky.

Príklad 27. Je dané 6 priamok v priestore, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom. Potom sa dajú nájsť tri z nich tak, že ležia v jednej rovine, alebo tri, ktoré sú navzájom mimobežné.

Riešenie. Označme dané priamky $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. Priamky p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 rozdelíme do dvoch skupín. Do prvej dáme tie, ktoré sa s priamkou p_6 pretínajú a do druhej tie, ktoré sú s p_6 mimobežné. Podľa (D) aspoň jedna z týchto skupín obsahuje tri priamky. Nech sú to napr. p_1, p_2, p_3 (na ich označení zrejme nezáleží).

Povedzme, že sú to priamky prvej skupiny. Teda p_6 pretína p_1, p_2, p_3. Ak sa žiadne dve z priamok p_1, p_2, p_3 nepretínajú máme tri priamky, ktoré sú navzájom mimobežné. Ak sa dve z nich pretínajú a pridáme k nim priamku p_6, máme tri priamky, ktoré ležia v jednej rovine (nepretínajú sa v jednom bode, to je podmienka úlohy).

Ak sú p_1, p_2, p_3 z druhej skupiny, uvažujeme podobne.

Teraz je priamka p_6 mimobežná s každou z nich. Ak sa každé dve z priamok p_1, p_2, p_3 pretínajú, máme tri priamky v jednej rovine. Ak sa dve z nich nepretínajú, pridáme k nim p_6 a máme tri priamky navzájom mimobežné.

Úloha 56. V šachovom turnaji, ktorého sa zúčastňuje 6 hráčov, sa vždy nájde trojica hráčov, ktorí medzi sebou hrali už každý s každým, alebo trojica, v ktorej žiaden so žiadnym ešte nehral. Dokážte!

Úloha 57. Máme v rovine 6 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke, pospájaných navzájom modrými alebo červenými úsečkami (t. j. niektoré dva sú spojené modrou, niektoré dva červenou úsečkou, ale každé dva sú spojené). Dokážte, že potom na tejto schéme sa dá nájsť aspoň jeden jednofarebný trojuholník, ktorého vrcholy sú niektoré z daných bodov.

Príklad 28. 17 vedcov si navzájom dopisuje (každý s každým), pritom v celej korešpondencii sa vyskytujú iba tri témy. Dokážte, že existujú traja z nich, ktorí si medzi sebou dopisujú na rovnakú tému.

Riešenie. Vyberme jedného z vedcov (ľubovoľne) a ostatných 16 rozdeľme do troch skupín tak, že do každej skupiny dáme všetkých tých, ktorí si s týmto zvoleným píšu na tú istú tému. Podľa (D) aspoň v jednej skupine sa nájdu šiesti. Teda máme šesť vedcov, ktorí si so zvoleným píšu na rovnakú tému. Nazvime ju *témou* č. 1. Ak si spomedzi týchto šiestich dvaja píšu na tému č. 1, pridáme k nim zvoleného a máme troch, ktorí si píšu na tému č. 1. V opačnom prípade máme 6 vedcov, ktorí si medzi sebou píšu iba na tému č. 2 a tému č. 3.

Medzi týmito šiestimi si zvoľme jedného. Zbývajúcich piatich rozdelíme na dve skupiny. Skupinu tých, čo si so zvoleným píšu na tému č. 2 a skupinu tých, čo si píšu na tému č. 3. Podľa (D) aspoň v jednej skupine sa nájdu traja.

Títo traja si buď všetci píšu na rovnakú tému a riešenie je hotové, alebo sa nájdu dvaja, ktorí si píšu na tému rovnakú so zvoleným. Potom máme znovu troch, ktorí si píšu na rovnakú tému.

Úloha 58. V priestore je dané 17 priamok. Dokážte, že sa medzi nimi dajú nájsť tri, ktoré sú buď všetky navzájom rovnobežné, alebo všetky navzájom rôznobežné, alebo navzájom mimobežné.

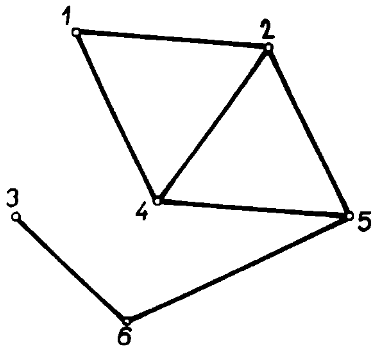
Úloha 59. V škole, ktorá má 17 tried, sa hrá futbalový medzitriedny turnaj systémom „každý s každým". Turnaj probieha počas troch dní. Dokážte, že existujú tri triedy, ktoré všetky zápasy medzi sebou zohrajú v ten istý deň.

Úloha 60. V rovine je dané 17 bodov navzájom pospájaných úsečkami farby čiernej, červenej a modrej, pritom žiadne tri neležia na jednej priamke a každé dva sú spojené. Dokážte, že v tejto schéme existuje jednofarebný trojuholník s vrcholmi vybranými spomedzi daných 17 bodov.

Skúsený riešiteľ si určite všimol, že príklad 27 a úlohy 56 a 57 sa riešia rovnako. Podobne príklad 28 a úlohy 58 až 60 znamenajú len rôzne modifikácie rovnakého problému. Takéto úlohy môžeme riešiť spoločne, t. j. všetky naraz, ak sa postavíme na dosť všeobecné, abstraktné stanovisko. V matematike sa často postupuje tak, že úlohy, ktoré majú v jadre spoločnú myšlienku, sa snažia matematici riešiť naraz. Na to zavádzajú nové abstraktné pojmy. Úlohy, o ktorých sme hovorili, možno úspešne riešiť pomocou pojmu *graf.*

Pod grafom rozumieme nejakú množinu, ktorej prvky voláme *vrcholmi grafu*, pričom niektoré dvojice vrcholov grafu sú v istom vzťahu (relácii). Napr. taký graf môže predstavovať istý okamžik šachového turnaja. Jeho vrcholy budú hráči (účastníci turnaja). Niektoré dvojice hráčov už zápas odohrali. Vzťah, o ktorý tu pôjde spočíva v tom, že dvaja hráči odohrali zápas. Ak dvojica vrcholov grafu je v danom vzťahu, hovoríme, že tie dva vrcholy sú spojené *hranou* (v tom grafe).

Graf obyčajne znázorňujeme tak, že vrcholy grafu sú body v rovine (vyznačené napr. krúžkom) a ak sú dané dva vrcholy spojené hranou (sú vo vzťahu), tak príslušné body jednoducho spojíme úsečkami alebo inými čiarami. Pritom sa môže stať, že tieto čiary sa pretínajú aj v iných bodoch, než sú vrcholy grafu. Preto treba pri náčrtoch vrcholy



Obr. 5.

starostlivo vyznačiť. Na obr. 5 je znázornený graf šachového turnaja v istom okamžiku. Z neho možno vyčítať, že hráč č. 2 a hráč č. 5 už zohrali medzi sebou zápas, kdežto hráči č. 4 a č. 6 nie.

Úplným grafom nazývame taký graf, ktorého každé dva vrcholy sú spojené hranou. Taký je napr. graf šachového turnaja po jeho skončení. Všetky zápasy sú už odohrané, teda každá dvojica hráčov už svoj zápas odohrala, t. j. každé dva body na príslušnom grafe sú spojené hranou.

V ďalšom sa budeme zaoberať väčšinou úplnými grafmi. Aby sme zachytili na úplnom grafe také prípady, ako je šachový turnaj, ktorý ešte neskončil (t. j. nie všetky zápasy sú odohrané), budeme používať dva druhy vzťahov. Dva vrcholy grafu (hráči) budú v prvom vzťahu, ak už odohrali zápas a budú v druhom vzťahu, ak ešte zápas neodohrali. Pri znázorňovaní takých grafov používame viac farieb. Napr. ak dvaja hráči zápas odohrali, tak vrcholy ktoré ich predstavujú spojíme modrou, ak neodohrali, spojíme ich červenou čiarou. Vo všeobecnosti hovoríme, že *graf* je *sfarbený dvomi farbami* (je dvojfarebný), ak v ňom vystupujú dva rôzne vzťahy.

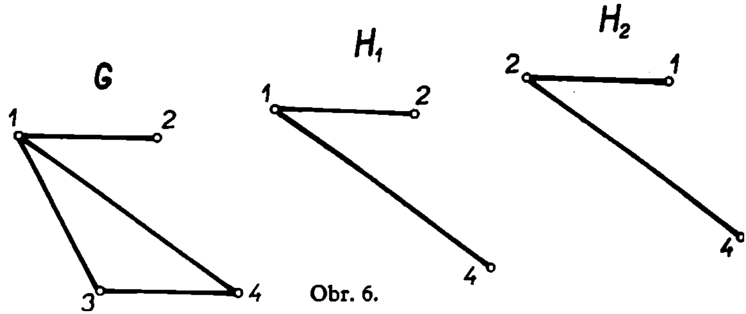
Uveďme niekoľko príkladov. Dvojfarebný graf môže byť napr. nejaká množina bodov v rovine pospájaných úsečkami dvoch farieb. V tomto príklade dva vzťahy sú naozaj dané dvomi farbami. Alebo graf znázorňujúci príklad 27. Jeho vrcholy budú predstavovať dané priamky. Dva vrcholy budú spojené červenou úsečkou, ak dané priamky sú rôznobežné a budú spojené modrou úsečkou, ak dané priamky sú mimobežné.

Je samozrejmé, že sa nemusíme obmedziť iba na dva vzťahy (dve farby). Budeme sa zaoberať i viacfarebnými grafmi. Napr. graf znázorňujúci príklad 28. je trojfarebný. Vrcholmi budú naši vedci. Dva vrcholy spojíme čiernou farbou, ak si príslušní vedci dopisujú na prvú tému, spojíme červenou, ak si píšu na druhú tému a spojíme modrou, ak si píšu na tretiu tému. Podobne úlohu 58. možno znázorniť trojfarebným grafom. Vrcholy budú dané priamky. Dva vrcholy spojíme napr. čiernou hranou, ak sú priamky rovnobežné, červenou, ak sú rôznobežné a modrou, ak sú mimobežné.

Je už iste jasné, ako vyzerajú viacfarebné grafy. Ak budeme hovoriť o *k-farebnom grafe*, budeme mať na mysli graf, v ktorom nevystupuje viac ako k farieb.

V ďalšom slovom *n-graf* budeme označovať úplný graf, ktorý má *n* vrcholov.

Aby sme mohli sformulovať naše úlohy, ešte povieme, čo je to podgraf. Graf H nazývame podgrafom grafu G, ak každý vrchol grafu H je aj vrcholom grafu G a ak dva vrcholy grafu H sú spojené hranou práve vtedy, keď sú spojené hranou v grafe G a ak sú spojené, tak hranou rovnakej farby ako v G. Napr. H_1 na obr. 6 je podgraf grafu G (príslušné rovnako označené vrcholy považujme za totožné, kreslíme ich znovu len kvôli prehľadnosti), ale H_2 nie je podgraf grafu G.



Obr. 6.

Teraz je zrejmé, že príklad 27. a úlohy 56. a 57. možno sformulovať takto:

V každom dvojfarebnom 6-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný úplný podgraf s tromi vrcholmi (krátko: existuje jednofarebný trojuholník).

Podobne abstraktná formulácia príkladu 28. a úloh 58.—60. môže znieť:

V každom trojfarebnom 17-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný trojuholník.

Úloha 61. Dokážte tieto dve tvrdenia!

Príklad 29. Dokážte, že v každom štvorfarebnom 66-grafe existuje jednofarebný trojuholník!

Riešenie. Vyberieme si jeden vrchol 66-grafu ľubovoľne. Zbývajúcich 65 vrcholov rozdelíme do štyroch skupín podľa farby hrany spájajúcej tieto vrcholy s vybraným. V aspoň jednej skupine musí podľa (D) byť 17 vrcholov. Ak sú dva z nich medzi sebou spojené hranou tej istej farby ako s vybraným vrcholom, potom máme jednofarebný trojuholník. V opačnom prípade máme 17 vrcholov pospájaných medzi sebou iba tromi farbami. Podľa úlohy 61. medzi nimi existujú tri pospájané iba jednou farbou.

Úloha 62. Dokážte, že v každom päťfarebnom 327-grafe existuje jednofarebný trojuholník!

Úloha 63. Ak v každom k-farebnom m-grafe existuje jednofarebný trojuholník, potom v každom $(k+1)$-farebnom $(km+m-k+1)$-grafe existuje jednofarebný trojuholník. Dokážte!

Je jasné, že v každom dvojfarebnom 7-grafe, 8-grafe atď. existuje jednofarebný trijuholník (z čoho to vyplýva?). Môžeme očakávať, že ich bude viac ako v 6-grafe. Nevieme však, ani koľko jednofarebných trojuholníkov minimálne musí byť v dvojfarebnom 6-grafe. Túto otázku rozriešime pomocou nasledujúceho príkladu.

Príklad 30. Ak v úplnom grafe sfarbenom dvomi farbami existuje takých 5 vrcholov A, B, C, D, E, že jednofarebný trojuholník s vrcholmi A, B, C je inej farby ako hrana spájajúca body D, E, potom v tomto grafe okrem trojuholníka A, B, C existuje ešte aspoň jeden iný jednofarebný trojuholník. Dokážte!

Riešenie. Nech je trojuholník ABC biely a hrana DE čierna. Z hrán DA, DB, DC musia byť podľa (d) aspoň dve jednej farby. Keby boli biele, už máme druhý jednofarebný trojuholník (biely). Podobne, buď dve z hrán EA, EB, EC sú čierne, alebo máme biely trojuholník.

Uvažujme prípad, keď nemáme (ďalší) biely trojuholník. Potom z uvedených hrán sú aspoň štyri čierne. Z jedného z vrcholov A, B, C podľa (d) vychádzajú teda aspoň dve čierne. Tieto dve čierne hrany spolu s hranou DE dajú čierny trojuholník.

Príklad 31. V dvojfarebnom 6-grafe existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky.

Riešenie. Vieme, že v dvojfarebnom 6-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný trojuholník. Označme vrcholy 6-grafu A, B, C, D, E, F tak, že A, B, C sú vrcholy tohoto jednofarebného trojuholníka (povedzme bieleho). Ak sú všetky hrany spájajúce body D, E, F tiež biele, máme dva biele trojuholníky v našom 6-grafe. Ak je niektorá z nich čierna, podľa príkladu 30 existuje v našom grafe ešte ďalší jednofarebný trojuholník.

Úloha 64. Zostrojte dvojfarebný 6-graf, v ktorom neexistujú tri jednofarebné trojuholníky.

Príklad 32. V každom dvojfarebnom 7-grafe existujú aspoň 4 jednofarebné trojuholníky.

Riešenie. V 7-grafe existujú aspoň dva (pozri príklad 31) jednofarebné trojuholníky. Vynecháme z daného 7-grafu vrchol jedného jednofarebného trojuholníka, i všetky hrany, ktoré vychádzajú z tohto vrchola. Dostaneme 6-graf, v ktorom podľa príkladu 31 existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky. Keď teraz vrátime vynechaný vrchol a hrany, zistíme, že v našom 7-grafe sú aspoň tri jednofarebné trojuholníky. Aspoň dva z týchto musia mať spoločný vrchol, pretože tri trojuholníky majú 9 vrcholov a na grafe máme k dispozícii iba 7 bodov. Teraz vynechajme tento vrchol a všetky hrany z neho idúce. Tým dostaneme 6-graf, ktorý má aspoň o dva jednofarebné trojuholníky menej ako daný 7-graf. Podľa príkladu 31 v ňom existujú aspoň dva jednofarebné trojuholníky, teda v pôvodnom 7-grafe sú aspoň štyri.

Úloha 65. Dokážte, že v dvojfarebnom a) 8-grafe; b) 9-grafe; c) 10-grafe; d) 11-grafe existuje aspoň a) 7; b) 11; c) 16; d) 22 jednofarebných trojuholníkov.

Príklad 33. Treba dokázať, že v dvojfarebnom n-grafe ($n \geq 10$) existuje aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ jednofarebných trojuholníkov.

Riešenie. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa n.

1) Pre $n = 10$ tvrdenie vyplýva z úlohy 65.

2) Predpokladajme, že v dvojfarebnom n-grafe je aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ jednofarebných trojuholníkov. Dokážeme, že v dvojfarebnom $(n + 1)$-grafe je najmenej $\frac{1}{2}(n + 1)^2 - \frac{19}{2}(n + 1) + 61$ jednofarebných trojuholníkov.

Vezmime ľubovoľný dvojfarebný $(n + 1)$-graf. Je v ňom aspoň toľko jednofarebných trojuholníkov, ako v dvojfarebnom n-grafe, teda podľa indukčného predpokladu aspoň $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$. Tieto majú dohromady $3\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right)$ vrcholov. Teda aspoň $\left[\frac{3}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right)\right]$ trojuholníkov musí mať podľa (D) spoločný vrchol. Pre každé n je

$$\left(n - \frac{39}{2}\right)^2 + 386 - \left(\frac{39}{2}\right)^2 > 0,$$

odkiaľ postupne

$$n^2 - 39n + 386 > 0,$$

$$3n^2 - 3.19n + 3.122 > 2n^2 - 18n - 20,$$

$$3\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right) > (n+1)(n-10),$$

a teda

$$\frac{3}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61\right) > n - 10.$$

To znamená, že aspoň n-9 trojuholníkov má spoločný vrchol. Keď tento vynecháme, dostaneme n-graf, ktorý má o n-9 trojuholníkov menej, než náš $(n+1)$-graf. Teda podľa indukčného predpokladu v $(n+1)$-grafe je aspoň

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61 + (n-9) =$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{19}{2}(n+1) + 61$$

jednofarebných trojuholníkov.

Príklad 34. Treba dokázať, že v dvojfarebnom 24-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný 4-graf.

Riešenie. Zvolíme si vrchol A na 24-grafe. Podľa (D) existuje aspoň 12 vrcholov, ktoré sú s vrcholom A spojené hranami rovnakej farby, nech je to napr. biela farba. Zpomedzi týchto 12 vrcholov zvoľme vrchol B. Tento je spojený podľa (D) aspoň so šiestimi zpomedzi týchto dvanástich hranami rovnakej farby. Táto môže byť a) biela, b) čierna.

Ak týchto 6 vrcholov je spojené navzájom hranami rovnakej farby, je príklad doriešený, lebo tam existuje dokonca jednofarebný 6-graf. Predpokladajme, že týchto 6 vrcholov nie je pospájaných hranami rovnakej farby.

Ak nastane prípad a), sme hotoví, pretože 4-graf s vrcholmi A, B, ku ktorým sú pridané dva vrcholy zpomedzi posledných 6-tich spojené bielou hranou, je jednofarebný a to biely.

Ak nastane prípad b), použijeme skutočnosť, že v dvojfarebnom 6-grafe existuje jednofarebný trojuholník. Medzi poslednými 6-timi vrcholmi existujú 3 pospájané jednou farbou. Ak je biela, pridáme k nim vrchol A a dostaneme biely 4-graf. Ak je čierna, pridáme k nim vrchol B a dostaneme čierny 4-graf.

Úloha 66. Dokážte, že v dvojfarebnom 24-grafe existujú aspoň dva jednofarebné 4-grafy!

Úloha 67. Dokážte, že v dvojfarebnom 192-grafe existuje aspoň jeden jednofarebný 5-graf!

Poznámka. Je známe, že v dvojfarebnom 18-grafe určite existuje jednofarebný 4-graf, ale v 17-grafe už nemusí existovať. Teda najmenšie číslo n také, že v dvojfarebnom n-grafe už určite existuje jednofarebný 4-graf je 18. Najmenšie číslo n také, aby v dvojfarebnom n-grafe určite existoval jednofarebný 5-graf dodnes nie je známe. Vieme, že je menšie ako 70.

Podobne nie je známe, či tvrdenie príkladu 29 možno dokázať pre 65-graf, t. j. či v každom štvorfarebnom 65-grafe existuje jednofarebný trojuholník.