Dirichletov princíp

4. kapitola. Kódovanie

In: Lev Bukovský (author); Igor Kluvánek (author): Dirichletov princíp. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 30–38.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403703

4. kapitola

KÓDOVANIE

Príklad 21. Dané sú dve cifry (napr. 1, 2). Koľko sa dá nájsť trojciferných čísel zostavených iba z týchto cifier takých, aby sa ľubovoľné dve čísla líšili aspoň na dvoch miestach?

Riešenie. Skúšaním sa nám podarí nájsť napr. tieto štyri čísla, ktoré majú uvedenú vlastnosť 111, 122, 212, 221. Každé dve sa líšia aspoň na dvoch miestach (napr. prvé dve na druhom a treťom mieste.) Iná štvorica je 222, 211, 121, 112. I pri viacerých pokusoch sa nám nepodarí nájsť päť takých čísel. Pokúsime sa dokázať, že skutočne viac ako 4 čísla s danými vlastnosťmi nájsť nemožno.

Dvojciferné čísla, ktoré sa líšia na dvoch miestach možno zrejme nájsť iba dve, napr. 11 a 22 alebo 12 a 21. Predpokladajme, že trojciferných by bolo viac ako 4. Rozdelíme ich na dve skupiny. Do prvej dáme tie, ktoré začínajú cifrou 1, do druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Potom podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín musia byť aspoň 3 čísla. Tieto tri čísla sa medzi sebou líšia aspoň na dvoch miestach. Ale cifru na prvom mieste majú rovnakú. Ak túto prvú cifru vynecháme, dostaneme 3 dvojciferné čísla, ktoré sa líšia medzi sebou na dvoch miestach. To však nie je možné. Teda existujú najviac 4 trojciferné čísla, ktoré sa všetky medzi sebou líšia aspoň na dvoch miestach.

Úloha 42. Ukážte, že možno nájsť 8 štvorciferných (16 päťciferných) čísel zostavených z dvoch cifier tak, že ľubovoľné dve čísla sa líšia aspoň na dvoch miestach a viac než

8 štvorciferných (16 päťciferných) čísel s touto vlastnosťou neexistuje.

Úloha 43. Ukážte, že nemožno nájsť viac ako 2^{n-1} n-ciferných čísel zostavených z dvoch cifier tak, aby ľubovoľné dve z nich sa líšili aspoň na dvoch miestach. Pokúste sa dať návod na zostrojenie 2^{n-1} n-ciferných čísel s touto vlastnosťou (indukciou podľa n).

Uvedený príklad a úlohy majú zaujímavý význam. Dané dve cifry môžu znamenať dva signály, ktoré používa nejaké zariadenie na prenášanie zpráv (telegraf a pod.). Napr. 1 značí impulz + a 2 impulz —, alebo 1 značí bodku a 2 čiarku Morseovej abecedy a pod.

Pri prenášaní zpráv musíme písmená našej obyčajnej abecedy zakódovať (označiť) pomocou signálov, ktoré naše zariadenie používa, napr. *a* bude dané ako 11111, *b* ako 11112, *c* ako 11221 atď. Pritom, ako každé technické zariadenie, i náš telegraf sa môže dopustiť pri svojej činnosti chyby. Mohlo by sa stať napr., že namiesto poslednej cifry 1 v označení písmena *a* prijmeme cifru 2 a rozlúštime namiesto písmena *a* písmeno *b*. Ak by sme zakódovali písmená tak, že čísla označujúce jednotlivé písmená sa budú líšiť aspoň na dvoch miestach, potom vždy možno zbadať, ak náš telegraf urobí jednu chybu. Ak by sme zakódovali písmená tak, že sa čísla označujúce písmená budú líšiť aspoň na troch miestach, potom dokonca môžeme jednu chybu i opraviť. Ak telegraf vyšle jednu cifru chybne, kódové označenie iba jedného písmena sa bude od vyslaného čísla líšiť iba na jednom mieste.

Pri týchto úlohách je potrebné zistiť, koľko písmen možno zakódovať pomocou čísel (kódových označení) n-ciferných, kde n je dané prirodzené číslo. Ide o to, či budeme mať k dispozícii dosť čísel na zakódovanie. Nemusíme totiž kódovať (a teda prenášať) iba písmená abecedy, ale aj iné údaje alebo znaky, ktorých môže byť ľubovoľný počet.

Ďalej je zrejmé, že je nepodstatné či používame cifry a čísla, alebo iné znaky a ich skupiny.

Príklad 22. Treba dokázať, že nemožno zostrojiť viac než 4 päťciferné čísla (stále iba pomocou dvoch cifier 1, 2) tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach. Pritom štyri také čísla je možné zostrojiť, napr. 11111, 22211, 11222, 22122.

Riešenie. Predpokladajme, že máme aspoň 5 päťciferných čísel, ktoré sa líšia medzi sebou aspoň na troch miestach. Rozdelíme ich na dve skupiny. V prvej skupine budú tie, ktoré začínajú cifrou 1, v druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín budú aspoň tri čísla. Ak vynecháme z nich prvú cifru (tá je pre všetky rovnaká), dostaneme 3 štvorciferné čísla, ktoré sa líšia aspoň na troch miestach. Ukážeme, že takáto situácia nie je možná. Nech A, B, C sú tieto tri čísla. Čísla A a B sa líšia aspoň na troch miestach a čísla B, C tiež aspoň na troch miestach. Odtiaľ vyplýva, že existujú aspoň dve miesta, na ktorých sa zároveň líši A od B a B od C. Keďže sú k dispozícii iba dve cifry, toto nie je možné.

Úloha 44. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 8 šesťciferných čísel pomocou cifier 1, 2 tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach. Zostrojte 8 takých čísel!

Úloha 45. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 16 sedemciferných čísel pomocou dvoch cifier tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na troch miestach!

Príklad 23. Treba dokázať, že nemožno nájsť viac než 28 osemciferných čísel zostavených z cifier 1, 2 tak, aby sa každé dve líšili aspoň na troch miestach.

Riešenie. Predpokladajme, že takých čísel máme 29, nech sú to $A_1, A_2, \ldots, A_{28}, A_{29}$. Nech G_i je množina, ktorá pozostáva z čísla A_i a všetkých tých osemciferných čísel, ktoré sa líšia od A_i práve na jednom mieste pre $i = 1, 2, \ldots, 29$. Žiadne dve rôzne G_i nemajú spoločné prvky, pretože A_i sa od A_j $(i \neq j)$ líši aspoň na troch miestach. Všetkých osemciferných čísel je $2^8 = 256$, teda podľa (D_3) aspoň jedna množina G_i má najviac $\frac{256}{29} < 9$ prvkov. Ale zrejme všetky množiny G_i majú po 9 prvkov.

Úloha 46. Podľa vzoru príkladu 22. znovu riešte úlohu 45!

Úloha 47. Dokážte, že nemožno nájsť viac než $\left[\frac{2^n}{n+1}\right]$ n-ciferných čísel zostavených z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na troch miestach!

Príklad 24. Dokážte, že nemožno nájsť viac než 4 šesťciferné čísla zostavené z dvoch cifier tak, aby sa ľubovoľné dve líšili aspoň na štyroch miestach!

Riešenie. Predpokladajme, že máme aspoň 5 šesťciferných čísel, ktoré sa líšia medzi sebou aspoň na štyroch miestach. Rozdelíme ich na dve skupiny. V prvej skupine budú tie, ktoré začínajú cifrou 1, v druhej tie, ktoré začínajú cifrou 2. Podľa (D) aspoň v jednej z týchto skupín budú aspoň tri čísla. Ak vynecháme z nich prvú cifru (tá je pre všetky tri rovnaká), dostaneme tri päťciferné čísla, ktoré sa líšia aspoň na štyroch miestach. Ukážeme, že táto situácia nie je možná. Nech A, B, C sú tieto päťciferné čísla. Čísla A a B sa líšia aspoň na štyroch miestach a čísla B a C tiež aspoň na štyroch miestach. Odtiaľ vyplýva, že existujú aspoň tri miesta, na ktorých sa zároveň A líši od B a zároveň B od C. Ale A od C sa tiež líši aspoň na štyroch miestach. Preto musí byť aspoň jedno miesto, na ktorom sa aj A líši od B, aj B od C a zároveň A od C. Keďže sú k dispozícii iba dve cifry, toto nie je možné.

Poznámka. Všimnite si, že riešenie príkladu 24 sa temer zhoduje s riešením príkladu 22.

Úloha 48. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 8 sedemciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach! Zostrojte 8 takých čísel!

Úloha 49. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 16 osemciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach! Zostrojte 16 takých čísel!

Úloha 50. Dokážte, že nemožno zostrojiť viac než 2^{n-4} n-ciferných čísel z dvoch cifier tak, aby sa každé dve líšili aspoň na štyroch miestach!

Príklad 25. Pomocou štyroch cifier (napr. 1, 2, 3, 4) nemožno zostrojiť viac než 16 takých trojciferných čísel, aby sa každé dve líšili aspoň na dvoch miestach. Treba dokázať toto tvrdenie a ukázať, že 16 takých čísel sa dá zostrojiť.

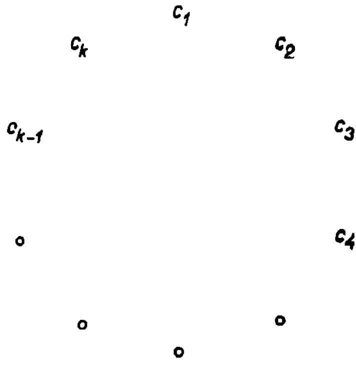
Riešenie. Pripusťme, že máme viac než 16 takých čísel. Rozdelíme ich na 4 skupiny podľa toho, aká je prvá cifra. Podľa (D) aspoň v jednej z nich bude najmenej 5 čísel. Ak z nich vyškrtneme prvú cifru, dostaneme 5 (alebo viac) dvojciferných čísel, ktoré sa líšia na obidvoch miestach. Tieto dvojciferné čísla zasa rozdelíme do 4 skupín podľa prvej cifry. Keďže ich je viac než 4, v jednej skupine by museli byť aspoň dve. Teda dve z našich čísel by mali rovnakú prvú cifru. To je spor s tým, že čísla sa líšia na oboch miestach.

Nasledujúce čísla sú trojciferné, každé dve sa líšia najmenej na dvoch miestach a sú zostrojené pomocou štyroch cifier: 111, 122, 133, 144, 221, 232, 243, 214, 331, 342, 313, 324, 441, 412, 423, 434.

V nasledujúcich úlohách budeme stále hovoriť o cifrách a n-ciferných číslach i keď cifier bude viac než 10. Môžeme mať pritom na mysli iné než dekadické (desatinné) číselné sústavy. Ešte lepšia možnosť je vidieť pod ciframi signály (znaky) a pod n-cifernými číslami n-členné skupiny signálov (zakódované zprávy) a pod.

Úloha 51. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^2 trojciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Udáme teraz návod na zostrojenie k^2 trojciferných čísiel pomocou k cifier, z ktorých ľubovoľné dve sa líšia najmenej na dvoch miestach.



Obr. 4.

Nech cifry sú $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (žiadna z cifier nie je nula, prípadne čísla tvaru 001, 023 a pod. považujeme tiež za trojciferné). Napíšme si cifry $c_1, c_2, \ldots, c_k$ do kruhu (obr. 4). Zostrojíme k skupín trojciferných čísel tak, že v každej skupine bude k čísel. Prvá skupina bude mať na prvom mieste cifru c_1. Budú ju tvoriť čísla $c_1c_1c_1$, $c_1c_2c_2$, $c_1c_3c_3$, $\ldots$, $c_1c_kc_k$. Druhá skupina bude mať na prvom mieste cifru c_2. Budú ju tvoriť čísla $c_2c_2c_1$, $c_2c_3c_2$, $c_2c_4c_3$, $c_2c_5c_4$, $\ldots$, $c_2c_kc_{k-1}$, $c_2c_1c_k$. Túto skupinu zostrojíme z prvej tak, že v i-tom čísle prvej skupiny prvú cifru (t. j. c_1) nahradíme cifrou c_2, druhú cifru nahradíme následujúcou cifrou podľa poradia na obr. 4, t. j. ak $i < k$, miesto c_i píšeme c_{i+1}, ak $i = k$, miesto c_k píšeme c_1. Cifry na tretích miestach nemeníme. Tretiu skupinu zostrojíme z druhej podobne ako druhú sme zostrojili z prvej. Na prvom mieste bude cifra c_3. Cifru na druhom mieste zase nahradíme cifrou nasledujúcou v poradí podľa obr. 4. Cifry na tretích miestach nemeníme. Teda tretiu skupinu budú tvoriť čísla $c_3c_3c_1$, $c_3c_4c_2$, $c_3c_5c_3$, $\ldots$, $c_3c_kc_{k-2}$, $c_3c_1c_{k-1}$, $c_3c_2c_k$. Podobne zostrojíme ďalšie skupiny čísel začínajúce postupne ciframi c_4, c_5, atď. až c_k. Napr. skupina k-ta bude pozostávať z cifier $c_kc_kc_1$, $c_kc_1c_2$, $c_kc_2c_3$, $\ldots$, $c_kc_{k-2}c_{k-1}$, $c_kc_{k-1}c_k$.

Overenie, že každé dve z takto zostrojených k^2 trojciferných čísel sa líšia aspoň na dvoch miestach, prenechávame čitateľovi. Ak by vám to robilo potiaže, je užitočné zostrojiť si ich pre $k = 5,6$ prípadne viac.

Úloha 52. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^3 štvorciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Úloha 53. Pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než k^{n-1} n-ciferných čísel tak, aby sa ľubovoľné dve z nich líšili aspoň na dvoch miestach. Dokážte!

Príklad 26. Treba dokázať, že nemožno pomocou k cifier zostrojiť viac než $\dfrac{k^5}{(5k-4)}$ päťciferných čísel, z ktorej každé dve by sa líšili aspoň na troch miestach.

Riešenie. Pripusťme, že máme m päťciferných čísel, z ktorých každé dve sa líšia aspoň na troch miestach, ďalej že používame iba k cifier a že $m > \dfrac{k^5}{(5k-4)}$. Nech sú to čísla $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Uvažujme o množinách $G_1, G_2, \ldots, G_m$, pričom každá množina G_i pozostáva z čísla A_i a zo všetl ých päťciferných čísel, ktoré sa od A_i líšia práve na jednom mieste. Žiadne dve z týchto množín nemajú spoločné body (lebo čísla A_i od A_j sa líšia aspoň na troch miestach). Nech l_i je počet prvkov množiny G_i. Teda $\sum\limits_{i=1}^{m} l_i \leqslant k^5$, pretože k^5 je počet všetkých päťciferných čísel.

Teda podľa (D_3) aspoň pre jedno i je $l_i \leqslant \dfrac{k^2}{m} < \dfrac{k^5}{\dfrac{k^5}{(5k-4)}} =$
$= 5k - 4.$

To však nie je možné, pretože každá množina G_i má práve $5k - 4$ členov.

Úloha 54. Dokážte, že pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než $\left[\dfrac{k^n}{(nk+1-n)}\right]$ n-ciferných čísel, z ktorých každé dve sa líšia aspoň na troch miestach!

Úloha 55. Dokážte, že pomocou k cifier nemožno zostrojiť viac než a) $\dfrac{k^n}{\left(1 + n(k-1) + \binom{n}{2}(k-1)^2\right)}$,

b) $\dfrac{k^n}{\left(1 + n(k-1) + \binom{n}{2}(k-1)^2 + \binom{n}{3}(k-1)^3\right)}$

n-ciferných čísel, z ktorých ľubovoľné dve by sa líšili a) aspoň na piatich, b) aspoň na siedmich miestach!

Zrejme odhad získaný v úlohe 54 nie je najlepší. V príklade 22 a úlohe 44 sme získali lepšie odhady. Ovšem, aj metódy boli zložitejšie.

Všeobecná úloha: koľko je maximálne n-ciferných čísiel napísaných pomocou k cifier s vlastnosťou, že každé dve sa líšia aspoň na h miestach, je pre prax (konkrétne pre kybernetiku) veľmi dôležitá. Dodnes nie je úplne vyriešená, i keď riešenie pre niektoré konkrétne (a malé) hodnoty parametrov k, n, h je známe (niektoré sme vyriešili v predchádzajúcej kapitole).