Dirichletov princíp

3. kapitola. Väčšinou geometria

In: Lev Bukovský (author); Igor Kluvánek (author): Dirichletov princíp. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 19–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403702

3. kapitola

VÄČŠINOU GEOMETRIA

Dirichletov princíp v tej forme, ako sme ho formulovali v I. kapitole sa týkal iba prirodzených čísel, pretože sa v ňom jednalo o počet prvkov nejakej množiny (konečnej). Niekedy je však výhodné využívať iné veličiny na meranie „*veľkosti*“ množiny, ako počet jej prvkov (napr. ak je množina nekonečná). Môže to napr. byť dĺžka plošný obsah, objem, veľkosť uhla a pod. V takých prípadoch „*veľkosť*“ nemusí byť číslo prirodzené, ale ľubovoľné reálne číslo (napr. zlomok alebo aj iracionálne číslo). Pre také prípady je výhodné formulovať *Dirichletov princíp* takto:

(D_1) Ak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ľubuvoľné reálne čísla, ktorých súčet je väčší, alebo sa rovná číslu b, potom aspoň jedno z nich je väčšie, alebo sa rovná číslu $\frac{b}{n}$.

Dôkaz tohoto tvrdenia je úplne rovnaký ako dôkaz Dirichletovho princípu v I. kapitole. Keby bolo $a_i < \frac{b}{n}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, potom by bolo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \frac{b}{n} + \frac{b}{n} + \ldots + \frac{b}{n} = b$.

Príklad 13. Treba dokázať, že aspoň jeden vnútorný uhol vypuklého n-uholníka je väčší, alebo sa rovná $\frac{n-2}{n}\pi$.

Riešenie. Súčet vnútorných uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2)\pi$, preto podľa (D_1) aspoň jeden z nich musí byť väčší, alebo sa rovná $\frac{n-2}{n}\pi$.

Príklad 14. Poldavia má rozlohu 268 138 km². Je v nej rozmiestnených 13 televíznych vysielačiek a retranslačných staníc. Nejaké miesto spĺňa normu kvality príjmu, ak nie je vzdialené od najbližšej stanice ako 80 km. Dokážte, že Poldavia ešte nie je úplne televizifikovaná, t. j. existujú v nej miesta, ktoré nespĺňajú normu kvality televízneho príjmu.

Riešenie. Nech s_i je plošný obsah tej časti Poldavie, ktorej miesta sú vzdialené od i-tej stanice nie viac, ako 80 km, $i = 1, 2, \ldots, 13$. Ak by bolo každé miesto televizifikované, potom by bolo $s_1 + s_2 + \ldots + s_{13} \geq 268\,138$, čiže podľa ($D_1$) aspoň pre jedno i by bolo $s_i \geq \frac{268\,138}{13} =$ $= 20\,626$ km². Ale $s_i \leqslant \pi . 80^2$ km² $\doteq 20\,160$ km² pre každé $i = 1, 2, \ldots, 13$. (Nemusí byť nutne $s_i = \pi . 80^2$, pretože časť kruhu o polomere 80 km, v strede ktorého je i-ta stanica, môže siahať za hranice Poldavie.)

Všimnite si, že z (D_1) ihneď vyplýva (d) aj (D).

Úloha 30. Dokážte (d) a (D) pomocou (D_1)!

Nech je daná množina M bodov. Každý uhol $\sphericalangle ABC$, kde A, B, C sú body množiny M, nazveme uhlom určeným bodmi množiny M. Pripomíname, že $\sphericalangle ABC$ znamená uhol s vrcholom B a ramenami BA, BC, pritom, ak sa nerovná π, menší z dvoch možných. Napr. vnútorné uhly vypuklého mnohouholníka sú uhly určené vrcholmi tohto mnohouholníka (ale nie každý uhol určený vrcholmi vypuklého mnohouholníka je jeho vnútorný uhol).

Úloha 31. Ak sú dané tri body v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší, alebo sa rovná $\frac{1}{3}\pi$.

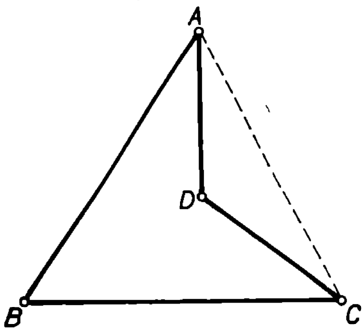
Poznámka. Všetky uhly určené vrcholmi rovnostranného trojuholníka sa rovnajú $\frac{1}{3}\pi$. Všetky uhly určené vrcholmi pravidelného štvorstena sa rovnajú tiež $\frac{1}{3}\pi$.

Príklad 15. Ak sú dané štyri rôzne body v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší, alebo sa rovná $\frac{1}{2}\pi$.

Riešenie. Ak tri z daných bodov ležia na jednej priamke, je príklad vyriešený, lebo potom jeden uhol nimi určený sa rovná π. Pripusťme preto, že žiadne tri z daných bodov neležia na jednej priamke. Uvažujme o štvoruholníku, ktorý má vrcholy v daných bodoch. Rozoznávajme dva prípady.

a) Uvažovaný štvoruholník je vypuklý. Potom všetky vnútorné uhly tohoto štvoruholníka sú uhly určené danými štyrmi bodmi. Podľa príkladu 13 aspoň jeden z nich musí byť väčší, alebo rovný $\frac{1}{2}\pi$.

b) Uvažovaný štvoruholník nie je vypuklý. Potom jeden z jeho vrcholov leží vo vnútri trojuholníka určeného ostatnými tromi. (Obr. 1.) Označíme ten bod D a ostatné vrcholy A, B, C. Uvažujme o uhloch $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle BDC$,



Obr. 1.

$\sphericalangle CDA$. Ich súčet je 2π. Teda zasa podľa Dirichletovho princípu (formulácia (D_1)) aspoň jeden je väčší, alebo sa rovná $\frac{2}{3}\pi > \frac{1}{2}\pi$.

Úloha 32. 5 bodov v rovine určuje aspoň jeden uhol väčší alebo rovný $\frac{3}{5}\pi$. Dokážte!

Úloha 33. 6 bodov v rovine určuje aspoň jeden uhol väčší alebo rovný $\frac{2}{3}\pi$. Dokážte!

Úloha 34. Ak je daných 7 bodov v rovine, potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší ako $\frac{2}{3}\pi$. Dokážte!

Problém. Úlohy 31—34 a príklad 15 vzbudzujú domnienku, že platí tvrdenie:

Ak je daných $n + 1$ bodov v rovine, ($n \geq 3$) potom aspoň jeden uhol nimi určený je väčší $\frac{n-2}{n}\pi$.

Toto tvrdenie sa autorom nepodarilo ani dokázať, ani vyvrátiť. Bolo by zaujímavé dokázať toto tvrdenie pre niektoré ďalšie hodnoty n, napr. $n = 7,8$, atď.

Analogicky ako (D_1) sa dajú dokázať nasledujúce obmeny princípu (D_1).

(D_2) Ak je dané n reálnych čísel, ktorých súčet je väčší než číslo b, potom aspoň jedno z nich je väčšie než $\frac{b}{n}$.

(D_3) Ak súčet n reálnych čísel je menší alebo sa rovná číslu b, potom aspoň jedno z nich je menšie alebo sa rovná $\frac{b}{n}$.

(D_4) Ak je súčet n reálnych čísel menší než b, potom aspoň jedno z nich je menšie než $\frac{b}{n}$.

Úloha 35. Dokážte (D_2), (D_3), (D_4) podobne, ako sme dokázali (D_1).

I keď každé z tvrdení (D_2), (D_3), (D_3) možno dokazovať podobne ako (D_1), všetky sa dajú z (D_1) odvodiť (podobne z každého tvrdenia (D_2), (D_3), (D_4) ostatné). Na ukážku urobíme dôkaz (D_2) pomocou (D_1).

Pripusťme, že $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú také čísla, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > b$. Označme $b' = a_1 + a_2 + \ldots a_n$, teda $b' > b$. Podľa D_1 existuje také a_i, že $a_i \geq \frac{b'}{n} > \frac{b}{n}$.

Príklad 16. Dokážte, že do krabice tvaru valca výšky 60 cm a priemeru základne 40 cm sa nevmestí 2630 stolnotenisových loptičiek priemeru 3,8 cm.

Riešenie. Objem krabice je 75 412,5 cm^3. Predpokladajme, že by v tejto krabici bolo umiestených 2630 loptičiek. Potom súčet ich objemov nemôže prevyšovať 75 412,5 cm^3. Podľa (D_3) objem aspoň jednej z nich by musel byť menší alebo sa rovnať $\frac{75\,412{,}5}{2630} < 28{,}69$. Ale objem každej z nich je $\frac{\pi}{6}\,(3{,}8)^3 > 28{,}7$.

Príklad 17. Treba dokázať, že v sade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 100 m krát 300 m musí byť menej než 3851 stromov, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch má byť väčšia než 4 m.

Riešenie. Postupujeme podobne ako v príklade 6. Pripusťme, že v sade je viac stromov než 3851. Sad rozdelíme na rovnaké obdĺžniky o stranách $\frac{100}{35}$ a $\frac{300}{110}$. Bude ich $35 \times 110 = 3850$. Podľa (d) aspoň v jednom z týchto obdĺžnikov sa musia nachádzať aspoň dva stromy. Keďže uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{\left(\frac{100}{35}\right)^2 + \left(\frac{300}{110}\right)^2} < 4$ vzdialenosť aspoň dvoch stromov je menšia ako 4.

Ak by sme sa pokúsili (vo funkcii hospodárneho záhradníka) rozmiestiť v sade z predošlého príkladu čím viac stromov tak, aby ich vzdialenosti boli aspoň 4 m, pri žiadnom rozmiestení sa nám nepodarí umiestiť do sadu 3000 stromov. Mali by sme sa teda pokúsiť dokázať, že sa nedá umiestiť do sadu menší počet stromov. Inými slovami, v riešení príkladu (ktoré je inak správne) sme použili pomerne slabú metódu.

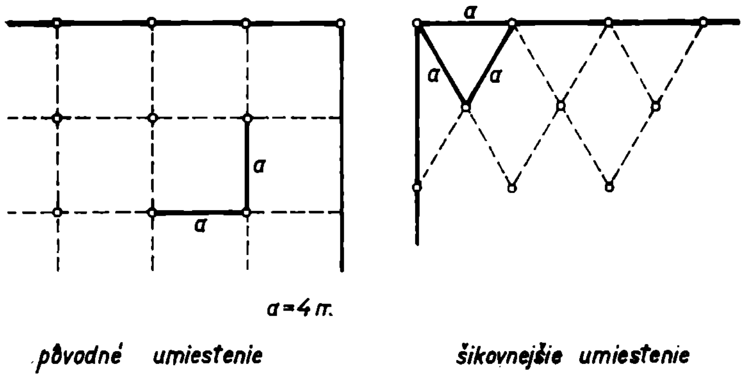
Keď použijeme vhodnejšiu, môžeme dostať lepší výsledok. Prezradíme ho v nasledujúcom príklade.

Príklad 18. V sade tvaru obdĺžnika o rozmeroch 100 m $\times$ 300 m musí byť menej než 2516 stromov, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch stromov má byť väčšia ako 4 m. Dokážte!

Riešenie. Predpokladajme, že v sade je viac než 2515 stromov a že vzdialenosť ľubovoľných dvoch je väčšia než 4 m. Uvažujme o kruhoch, ktorých stredy sú miesta, v ktorých sú zasadené stromy a ktorých polomery sú rovnaké a to 2 m. Podľa predpokladu žiadne dva z týchto kruhov nemajú spoločný bod (lebo vzdialenosť stromov je väčšia než 4 m). Všetky kruhy ležia vo vnútri obdĺžnika o rozmeroch $2 + 100 + 2$ m krát $2 + 300 + 2$ m, pretože stromy rastú v sade a teda kruh môže siahať von najviac o 2 m. Plošný obsah tohoto obdĺžnika je 31 616 m^2. Súčet plošných obsahov kruhov nemôže byť väčší než 31 616. Teda podľa (D) aspoň jeden z nich má plošný obsah nie väčší než $\frac{31\,616}{2516} < 12{,}5659$ m^2. Ale plošné obsahy týchto kruhov sú rovnaké a to $\pi . 2^2 < 12{,}5663$. To je spor.

Samozrejme, ani výsledok tohoto príkladu nebude najlepší možný. Je dobre možné, že maximálny počet stromov, ktoré sa dajú umiestiť pri zachovaní vzdialenosti 4 m do sadu, bude menší než 2515.

Na prvý pohľad je jasné, že do sadu možno umiestiť 1976 stromov. Umiestime ich tak, že sad rozdelíme na štvorce strany 4 m a do ich vrcholov nasadíme stromy. Bude ich $\left(\frac{100}{4} + 1\right) \times \left(\frac{300}{4} + 1\right) = 26 \times 76 = 1976.$



Obr. 2.

Ale pri šikovnejšom umiestení sa ich dá umiestiť viac. Dá sa umiestiť dokonca 2219 stromov. Umiestime ich podľa schémy na obr. 2 (je tam 44 radov po 26 a 43 radov po 25 stromov). Teda maximálny počet stromov, ktoré možno v sade umiestiť je niekde medzi 2219 a 2515. Každé zúženie tohto intervalu znamená nový matematický výsledok. Pritom zvýšenie dolnej hranice predpokladá umiestenie väčšieho počtu stromov do sadu a zníženie hornej hranice predpokladá dôkaz, že do sadu nemožno umiestiť viac než k stromov, pričom k je nejaké číslo menšie než 2515.

Úloha 36. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch 197 krát 94 sa nedá umiestiť 24 000 bodov tak, aby každé dva mali vzdialenosť nie menšiu než 1!

Úloha 37. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch a, b sa nedá umiestiť viac než $\frac{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$ bodov tak, aby vzdialenosť ľubovoľných dvoch bola väčšia než ε!

Úloha 38. Dokážte, že v obdĺžniku o rozmeroch a, b sa nedá umiestiť viac než $\left[\frac{2ab}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(a+b)\right] + 1$ bodov tak, aby vzdialenosť ľubovoľných dvoch bola väčšia než ε!

Príklad 19. Jama kruhového tvaru priemeru 6 m je zakrytá 15 doskami (t. j. nie je vidieť ani kúsok jamy). Dokážte, že šírka aspoň jednej dosky nie je menšia než 40 cm!

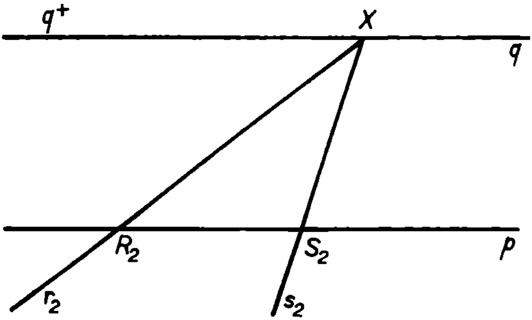
Riešenie. Zadanie úlohy možno presnejšie sformulovať takto. Daný je kruh priemeru 6 m, ktorý je pokrytý 15 rovinnými pásmi $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$. Nech šírky pásov sú $h_1, h_2, \ldots, h_{15}$. Máme dokázať, že aspoň pre jedno h_i platí $h_i \geq 40$ cm.

Uvažujme o guľovej ploche priemeru 6 m, ktorej stred leží v strede daného kruhu. Cez každé dve priamky, ohraničujúce pás p_i, veďme roviny kolmé na rovinu daného kruhu. Tieto dve roviny vyrežú z guľovej plochy časť (je to časť guľovej plochy, ohraničujúcej guľovú vrstvu alebo guľový vrchlík). Jej plošný obsah je $6\pi h_i$ alebo menší. Keďže pásy pokrývajú kruh, tieto časti guľovej plochy pokrývajú celú guľovú plochu. Plošný obsah celej guľovej plochy je 36π. Teda $\sum_{i=1}^{15} 6\pi h_i \geq 36\pi$, odkiaľ $\sum_{i=1}^{15} h_i \geq 6$.

Teda podľa (D_1) aspoň pre jednu zo šírok h_i je $h_i \geq \frac{6}{15}$ m $=$ $= 40$ cm.

Úloha 39. Kruh polomeru R je pokrytý n pásmi. Dokážte, šírku aspoň jedného pásu je väčšia alebo rovná $\frac{2\mathrm{R}}{n}$.

V nasledujúcich príkladoch a úlohách nech je v rovine daná priamka p a nech je zvolená jedna z polrovín, označme ju ϱ^+, na ktoré p delí rovinu ϱ.



Obr. 3.

Všimnime si nasledujúcu zaujímavú situáciu. Zvoľme ľubovoľne bod X v polrovine ϱ^+ neležiaci na priamke p. Na priamke p existuje 5 úsečiek u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 bez spoločných bodov s týmito vlastnosťami. Ak zostrojíme kružnice k_i so stredom S_i v ϱ^+ polomeru u_i tak, aby u_i bola jej tetivou, potom bod X leží vo vnútri každej kružnice k_i pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tieto úsečky možno zostrojiť takto (obr. 3). Bodom X vedieme rovnobežku q s priamkou p. Nech q^+ je jedna z polpriamok na ktoré delí X priamku q. Nech r_1 je polpriamka s počiatkom X pretínajúca p a zvierajúca s q^+ uhol 1°, s_1 je polpriamka s počiatkom X pretínajúca p a zvierajúca s q^+ uhol 35°, r_2 nech zviera uhol 36°, s_2 uhol 70°, r_3 uhol 71°, s_3 uhol 105°, r_4 uhol 106°, s_4 uhol 140°, r_5 uhol 141°, s_5 uhol 175° (obr. 3). Nech R_1 je priesečník r_1 s p, S_1 priesečník s_2 s p, R_2 priesečník r_2 s p, S_2 priesečník s_2 s p, atď.

Nech u_1 je úsečka R_1S_1, u_2 úsečka R_2S_2. atď. Zrejme tieto úsečky nemajú spoločný bod. Ak zostrojíme kružnicu k_i tak, že u_i je jej tetiva a kružnica k_i má polomer u_i, bod X leží nutne vo vnútri k_i. Obvodový uhol na kružnici k_i prislúchajúci tetive u_i má totiž 30°, kdežto trojuholník s vrcholom X a základňou u_i má pri vrchole X uhol 34°.

Šesť úsečiek s týmito vlastnosťami zostrojiť nie je možné.

Príklad 20. Nech je na priamke p dané 6 úsečiek u_1 až u_6 bez spoločných bodov. Nech k_i sú také kružnice so stredmi v polrovine ϱ^+ polomeru u_i, že u_i sú ich tetivy. Potom neexistuje bod, ktorý by ležal vo vnútri každej z týchto kružníc.

Riešenie. Nech X je ľubovoľný bod roviny ϱ. Dokážeme, že X neleží vnútri každej z daných kružníc, že leží mimo niektorej (t. j. aspoň jednej) z daných kružníc.

Rozoznávajme tri prípady.

a) Bod X leží na p. Bod X leží vo vnútri kružnice k_i práve vtedy, keď leží na úsečke u_i. Keďže tieto úsečky nemajú spoločný bod, X bude ležať nanajvýš vo vnútri jednej z kružníc k_i.

b) Bod X leží v polrovine ϱ^- opačnej k polrovine ϱ^+, ale nie na p. Potom X zasa leží vo vnútri nanajvýš jednej z daných kružníc, pretože časti príslušných kruhov ležiace v ϱ^- nemajú dva a dva spoločný bod.

c) Nech X leží v polrovine ϱ^+ a nie na priamke p. Pospájame bod X s koncovými bodmi úsečiek u_i. Označme α_i uhol pri vrchole X trojuholníka so základňou u_i a s vrcholom X. Keďže všetky základne ležia na jednej priamke, súčet uhlov α_i je menší než 180°, t. j. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 < 180°$. Teda podľa ($D_4$) aspoň jeden z uhlov α_i je menší než 30°. Keďže obvodový uhol na kružnici k_i zostrojený nad tetivou má 30°, bod X padne mimo tejto kružnice.

Poznámka. Riešenie sa ľahko upraví i pre prípad, že niektoré z úsečiek u_1 až u_6 majú spoločný koncový bod, ale okrem neho žiaden iný.

Úloha 40. Nech je na priamke p dané n úsečiek $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bez spoločných bodov (alebo so spoločnými iba koncovými bodmi). Nech k_i sú kružnice so stredmi ležiacimi v ϱ^+ také, že u_i sú ich tetivy a k nim prislúchajúce stredové uhly sú α (všetky rovnaké). Ak $n.\alpha \geq 360°$, potom neexistuje bod ležiaci vo vnútri týchto kružníc. Ak $n.\alpha < 360°$, tak sa úsečky $u_1, \ldots, u_n$ dajú zvoliť tak, že existuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.

Úloha 41. Nech je na priamke p dané n úsečiek $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bez spoločných bodov (alebo so spoločnými iba koncovými bodmi). Nech k_i sú kružnice so stredmi ležiacimi v ϱ^+ také, že u_i sú ich tetivy a k nim prislúchajúce stredové uhly sú α_i.

Ak $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 360°$, potom neexistuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.

Ak $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 360°$, tak sa úsečky $u_1, \ldots, u_n$ dajú zvoliť tak, že existuje bod ležiaci vo vnútri všetkých týchto kružníc.