Stavba Lobačevského planimetrie

Riešenie úloh

RIEŠENIA ÚLOH

Kapitola 1.

1. 4, 4, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 4, 3, 1, 2, 4, 1, 4, 2, 1. Pojem „neležať na“ nie je základný, ale definovaný, rovnako ako „obsahovať“.

2. Termín „nepáčiť sa“ nebol zavedený a preto nemá zmysel. Kvôli stručnosti ďalšieho vyjadrovania je vhodné ho zaviesť, pozri definíciu 1.S. V dôkaze treba slová „ktorému sa dievča a nepáči“ nahradiť slovami „že nie je pravda, že dievča a se chlapcovi A páči“.

3. Nech A, B, C sú chlapci popísaní v dôkaze vety 2.S. Nech existuje dievča x tak, že v úlohe uvedená implikácia nie je pravdivá, tz. $A \varepsilon x$, $B \varepsilon x$, $C \varepsilon x$. Potom zo vzťahov $a \equiv BC$, $x \equiv BC$ vyplýva podľa $\mathbf{S}_3$ $a \equiv x$. Vzťah $A \varepsilon x$ implikuje potom reláciu $A \varepsilon a$ čo je spor s faktom dokázaným v dôkaze vety 2.S.

4. Hľadaný X definujeme predpisom $\{X\} \equiv a \cap b$. Dievčatá a, b, XC sú navzájom rôzne a každé sa páči chlapcovi X.

5. Prvá časť úlohy je jednoduchá, druhá je dôsledkom vety 5.S.

6. Každé z písmien množiny Ch sa nachádza aspoň vo dvoch rôznych slovách množiny D.

7. V reči uvedenej tabuľky incidencie majú axiomy $\mathbf{S}_2$ — — $\mathbf{S}_5$ tento tvar:

$\mathbf{S}_2$: Ku každým dvom riadkom existuje aspoň jeden stĺpec tak, že oba riadky vo štvorčeku tohoto stĺpca majú 1.

S$_3$: Ku každým dvom riadkom existuje najviac jeden stĺpec tak, že obidva riadky vo štvorčeku tohoto stĺpca majú 1.

S$_4$: V každom stĺpci sú aspoň dve rôzne čísla 1.

S$_5$: V každom stĺpci existuje aspoň jedno číslo 0.

		D									
		Bolyai	Descartes	Dupin	Euler	Gauss	Klein	Ludolf	Newton	Study	Sylvester
Ch	*a*	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
	e	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	i	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	o	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	u	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
	y	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu S$_2$.

8. Výrok **V** je a) pravdivý, b) nepravdivý — pre $p =$ = Descartec a $P =$ písmeno u sú $q_1 =$ Study, $q_2 =$ Ludolf, $q_3 =$ Dupin, c) pravdivý, d) nepravdivý.

9. Nech Ch $= \{A, B, C, D\}$. Potom množina D podľa **S**$_2$ obsahuje 6 prvkov a to: AB, AC, AD, BC, BD, CD;

podľa S_4 D iné prvky obsahovať nemôže. Množina D je teda maximálne 6 prvková, no môže obsahovať aj menej prvkov, ak niektoré z dievčat hore uvedených budú totožné. Pretože podľa dôsledku vety 5.S je D aspoň trojprvková neexistuje dievča páčiace sa všetkým štyrom chlapcom. Uvážime dva ostávajúce prípady.

I. Nech existuje dievča a páčiace sa trom rôznym z chlapcov A, B, C, D. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že sú to B, C, D. Potom dievčence $b \equiv AB$, $c \equiv AC$, $d \equiv AD$ sú navzájom rôzne, pretože z $b \equiv c$ by vyplývalo $A \varepsilon BC \equiv a$, čo je spor s horeuvedeným faktom existencie troch rôznych dievčat.

II. Nech neexistuje dievča x páčiace sa trom rôznym z chlapcov A, B, C, D. Potom dievčence $p \equiv AB$, $q \equiv AC$, $r \equiv AD$, $s \equiv BC$, $t \equiv BD$, $u \equiv CD$ sú popár rôzne.

Existujú dva modely hľadaných vlastností. Označme ich S_6 a S_7. Ich incidenčné tabuľky pri hornom značení sú

		D			
		a	b	c	d
Ch	A	0	1	1	1
	B	1	1	0	0
	C	1	0	1	0
	D	1	0	0	1

Tabuľka incidencie modelu S_6.

		D					
		p	q	r	s	t	u
Ch	A	1	1	1	0	0	0
	B	1	0	0	1	1	0
	C	0	1	0	1	0	1
	D	0	0	1	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu S_7.

10. Nech b, c sú dve rôzne priateľky dievčaťa a pre ktoré $A \varepsilon b$ aj $A \varepsilon c$ a $A \not\varepsilon a$. Podľa axiomy $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci B, C, D, E tak, že $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon a$, $E \varepsilon a$, pričom $B \not\equiv A \not\equiv C$ a $D \not\equiv C$. Sú teda A, B, C, D, E navzájom rôzne body a preto model teórie S v ktorom je výrok **V** nepravdivý má minimálne 5 bodov. Nech teda $\mathsf{Ch} = \{A, B, C, D, E\}$. Potom D obsahuje okrem $a \equiv DE$, $b \equiv AB$, $c \equiv AC$ ešte dievčence AD, AE, BC, BD, BE, CD a CE. Spomedzi týchto desiatich dievčat môžu niektoré splynúť. Ľahko sa presvedčíme, že s dievčaťom a nemôže splynúť žiadne iné dievča; podobne s dievčatmi b, c, AD aj AE nemôže žiadne iné dievča splynúť. Môže teda byť $BC \equiv BD$ ($\equiv CD$), alebo $BC \equiv BE$ ($\equiv CE$), pričom zrejme môže nastať len jeden z prípadov. Oba prípady sa odlišujú len označením a preto ich možno počítať za jeden. Existujú preto dva modely, ktoré označíme S_8 a S_9 a zadáme tabuľkou

		D									
		a	b	c	AD	AE	BC	BD	CE	BE	CD
Ch	A	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	B	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
	C	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
	D	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	E	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Tabuľka incidencie modelu S_8.

		D							
		a	b	c	AD	AE	BC	CE	BE
Ch	A	0	1	1	1	1	0	0	0
	B	0	1	0	0	0	1	0	1
	C	0	0	1	0	0	1	1	0
	D	1	0	0	1	0	1	0	0
	E	1	0	0	0	1	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu S_9.

11. Model $\mathfrak{M}$ nie je modelom teórie $\mathfrak{S}$, lebo nespĺňa axiomu $\mathbf{S}_2$ pre body $A \not\equiv B$, pre ktoré $S \in AB$.

12. Množinu D rozšírime o všetky priamky idúce bodom S a obdržíme model S_{10}. Toto nie je jednoznačné. Mohli sme získať iný požadovaný model, keby sme ku D z $\mathfrak{M}$ pridali všetky dvojice (A, B) bodov z roviny takých, že $A \neq B$ a AB je priamka idúca bodom S.

13. Napríklad: $\mathfrak{Q}_3$: Ch množina všetkých bodov na priamke p, D množina všetkých polpriamok na p, ε je $\in$; alebo: K modelu S_2 do množiny D pridáme prvok „Lie"; $\mathfrak{Q}_5$: Ch je množina všetkých bodov na kružnici k, D obsahuje jediný prvok a to kružnicu k.

14. Z $\mathbf{S}_8$ vyplýva $\mathbf{S}_1$, teda z $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$ a $\mathbf{S}_8$ vyplýva veta 4.S, ktorá je v spore s $\mathbf{S}_8$.

15. Prvé tvrdenie vyplýva z existencie modelu S_1 či S_3, druhé z existencie modelu S_2 či S_4, alebo S_5.

16. Výrok $\neg$ **W** znie: Existujú aspoň jeden $P \in$ Ch a aspoň jedna $p \in$ D tak, že $P \notin p$ a pritom pre každé $x \in$ D platí $P \varepsilon x \Rightarrow x$ je nepriateľkou p. Výrok $\neg$ **V** znie: Existujú $P \in$ Ch, $p \in$ D, $q_1 \in$ D a $q_2 \in$ D tak, že $P \notin p$, $P \varepsilon q_1$, $P \varepsilon q_2$, $q_1 \neq q_2$ a q_1 aj q_2 sú priateľkami p.

17. Všetky štyri sústavy sú bezosporné, pretože existujú ich modely. a) S_3, alebo S_4; b) S_1, alebo S_6 (pozri úlohu 9); c) S_4, alebo S_5; d) S_3, alebo S_7 (pozri úlohu 9).

18. Podľa $\neg$ $\mathbf{S}_5$ existuje $p \in$ D tak, že pre každého chlapca X platí $X \varepsilon p$. Nech $q \in$ D. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci $A \neq B$ tak, že $A \varepsilon q$, $B \varepsilon q$. Podľa $\mathbf{S}_3$ je potom $q \equiv AB \equiv$ $\equiv p$ tz. D $\equiv \{p\}$. Dokázaná je prvá implikácia. Druhá implikácia vyplýva z logického rozboru výrokov **V** a **W** (pozri dodatok A). Obidva uvedené výroky majú štruktúru **P** $\Rightarrow$ **Q**, pričom časť **P** $=$ „dievča p sa nepáči chlapcovi P" je spoločná pre **V** aj **W**. Pretože D je jednoprvková, platí $P \varepsilon p$ pre každé $P \in$ Ch a každé (totiž ono jediné) $p \in$ D, teda **P** je nepravdivý a preto výrok **P** $\Rightarrow$ **Q** je pravdivý.

19. V úlohe 17d) bolo dokázané, že uvedená sústava výrokov je bezosporná, teda môžeme hovoriť o sústave axiom. Podáme modely $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_5$, $\mathfrak{R}_6$, $\mathfrak{R}_7$ také, že $\mathfrak{R}$

($i = 1, \ldots, 7$) vyhovuje všetkým axiomom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$, $\mathbf{V}$, W s nasledujúcimi výnimkami: v modeli $\mathfrak{R}_i$, namiesto $\mathbf{S}_i$ platí výrok $\neg\, \mathbf{S}_i$ pre $i = 1, \ldots, 5$, v modeli $\mathfrak{R}_6$ namiesto $\mathbf{V}$ platí $\neg\, \mathbf{V}$, v modeli $\mathfrak{R}_7$ namiesto $\mathbf{W}$ platí $\neg\, \mathbf{W}$. Modely sú napríklad tieto (riešení je mnoho): $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{Q}_1$ (pozri príklad 8. článku 1.6.). $\mathfrak{R}_2$: D je dvojprvková, skladá sa z dvoch rovnobežných rôznych priamok a, b a Ch je množina všetkých bodov na a, aj b; ε je $\in$. $\mathfrak{R}_3$: Ku množine D v modeli S_3 pridáme ešte jeden prvok a to množinu všetkých bodov roviny okrem jedného, pevne zvoleného; ε je $\in$. $\mathfrak{R}_4$: Model popíšeme tabuľkou incidencie

		D					
		a	b	c	u	v	w
Ch	A	1	0	0	0	1	1
	B	0	1	0	1	0	1
	C	0	0	1	1	1	0

Tabulka incidencie modelu $\mathfrak{R}_4$.

$\mathfrak{R}_5$: Množina D je jednoprvková a Ch dvojprvková, teda $D \equiv \{a\}$, $Ch \equiv \{B, C\}$, pričom $B \,\varepsilon\, a$ aj $C \,\varepsilon\, a$. $\mathfrak{R}_6 \equiv S_4$. $\mathfrak{R}_7 \equiv S_1$.

Kapitola 3

1. $\neg$ **E**: Existuje aspoň jeden bod P a aspoň jedna priamka p tak, že $P \notin p$ a množina priamok x nepretínajúcich p

a prechádzajúcich bodom P je buď prázdna, alebo aspoň dvojprvková.

$\neg$ **L**: Existuje aspoň jeden bod P a aspoň jedna priamka p tak, že $P \notin p$ a horeuvedená množina priamok x je buď prázdna, alebo jednoprvková.

$\neg$ **U**$_2$: Žiadny štvoruholník nemá všetky štyri uhly pravé.

2. Tvrdenie a) je pravdivé, tvrdenie b) nie je pravdivé, pretože v prípade existencie bodu P a priamky p tak, že $P \notin p$ a množina priamok x (z úlohy 1) je prázdna, je $\neg$ **L** pravdivý a **E** nepravdivý.

3. Obidve teórie $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{S}'$ sú ekvivalentné. Odlišujú sa len v jazyku, ktorým hovoria; každé tvrdenie **T** teórie $\mathfrak{S}$ sa dá preložiť podľa (s) do tvrdenia **T**$'$ teórie $\mathfrak{S}'$, a pritom **T**$'$ je pravdivé práve vtedy, keď aj **T** je pravdivé. Medzi výrokmi **E**, **V**$'$ a **W**$'$ platí ekvivalencia: **E** $\Leftrightarrow$ (**V**$'$ a **W**$'$).

4. a) **V**$'$ $\Rightarrow \neg$ **L** tz. **L** $\Rightarrow \neg$ **V**$'$; b) $\neg$ **W**$'$ $\Rightarrow \neg$ **L** tz. **L** $\Rightarrow$ **W**$'$.

5. Výrok **E** je pravdivý len v modeloch S'_3, S'_7. Výrok **L** je pravdivý len v modeli S'_8.

6. Pravdivosť **L** overíme ľahko, ostatok podľa úlohy 2.

7. a) R, Q, X; b) M, R, Q, X, Y, Z; c) M, Y, Z; d) a, b, c; e) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, u.

8. C_1C_2, QZ, ZQ, C_1Z, c.

9. Symbol „XY" značí „l-priamka XY". Symbol „e-priamka XY" má zmysel vždy, lebo podľa predpokladu je $X \not\equiv Y$. Symbol „XY" má zmysel práve vtedy, ak e-priamka XY je sečnicou e-kružnice h.

10. a) Z; b) a'; c) symbol nemá zmysel, lebo ani symbol MZ nemá zmysel; d) $\emptyset$ tj. množina prázdna.

11. Označme $q' \equiv \{Q_1, Q_2\}$. Potom hľadané l-priamky sú $p_1 \equiv PQ_1$ a $p_2 \equiv PQ_2$.

12. Množina $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$ má naviac $2n$ prvkov. Nech U, V sú také dva jej prvky tz. a-body, že jeden z oblúkov

$\widehat{UV}$ e-kružnice h neobsahuje žiadne iné a-body množiny $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$. Potom napríklad $x \equiv UV$.

13. Nech $A \in a'$ a $B \in b'$ sú rôzne; potom napríklad $p \equiv AB$.

14. Nech A, B, C, sú tri navzájom rôzne a-body. Potom napríklad $a \equiv BC$, $b \equiv AC$, $c \equiv AB$. Dôkaz ďalej pomocou vety Paschovej.

15. Označme $a' = \{A_1, A_2\}$, $b' = \{B_1, B_2\}$. Budeme uvažovať dva prípady. Nech najprv a, b sú súbežky a nech napríklad $A_1 \equiv B_1$. Potom M je množina l-bodov ležiacich vnútri e- polroviny $B_1B_2A_2$. Za l-priamku x možno voliť buď XB_2, alebo takú l-priamku, pre ktorú $\bar{x}$ je e-rovnobežné s b. Ak naopak $X \in x$, kde x je l-rôznobežka s a a l-rovnobežka s b, potom e-úsečka x leží vnútri e-polroviny $B_1B_2A_2$ a teda aj l-bod X tu leží. Nech sú ďalej a, b rozbežky, tz. a-body A_1, A_2, B_1, B_2 sú navzájom rôzne. Vhodnou voľbou indexov dosiahneme, aby A_1B_2 a A_2B_1 boli l-rôznobežky a spoločný l-bod označíme Q. Potom M je zjednotenie množín vnútorných l-bodov e-polroviny B_1QA_1 a vnútorných l-bodov e-polroviny B_2QA_2. Dôkaz sa dá previesť podobne ako v predchádzajúcom prípade.

16. Nad e-úsečkou BC ako priemerom zostrojíme e-kružnicu k. Nech $U \in k \cap h$. Potom e-uhol BUC je pravý a preto a-body V a W, $V \not\equiv U \not\equiv W$ v ktorých e-priamky UC a UB pretnú e-kružnicu h sú diametrálne v h. Teda $a \equiv VW$, $b \equiv UW$, $c \equiv UV$. Riešenia sú dve, jedno, žiadne práve keď množina $k \cap h$ je dvojprvková, jednoprvková, prázdna.

17. Vzájomná poloha je devätnástoraká, ak neprizeráme ku symetrii. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme B a D považovať za a-body. Nech je p l-priamka AB a q l-priamka CD a p_1 resp. q_1 l-polpriamka AB resp. CD. Uvážime štyri prípady:

1. $p \equiv q$. Nastáva týchto päť prípadov pre vzájomnú polo-

hu l-polpriamok AB, CD: 1. $AB \subset CD$, 2. $CD \subset AB$, 3. $B \not\equiv D$, $A \equiv C$, tz. $AB \cap CD \equiv \{A\}$, 4. $AB \cap CD$ je l-úsečka AC, $A \not\equiv C$, 5. $AB \cap CD$ je prázdna množina.
2. p, q sú súbežky so spoločným a-bodom U. Potom nastávajú štyri prípady: 1. $B \equiv D \equiv U$, 2. $B \equiv U \not\equiv D$, 3. $B \not\equiv U \equiv D$, 4. $B \not\equiv U \not\equiv D$.
3. p, q sú rozbežky. Potom nastáva jediný prípad.
4. p, q sú rôznobežky. Potom nastáva deväť prípadov: 1. $p_1 \cap q \equiv q_1 \cap p \equiv \emptyset$, 2. $p_1 \cap q \equiv \emptyset$, $q_1 \cap p \equiv \{C\}$. 3. $q_1 \cap p \equiv \emptyset$, $p_1 \cap q \equiv \{A\}$, 4. $p_1 \cap q \equiv \emptyset$, $C \notin q_1 \cap p \not\equiv \emptyset$, 5. $q_1 \cap p \equiv \emptyset$, $A \notin p_1 \cap q \not\equiv \emptyset$, 6. $p_1 \cap q_1 \equiv \{A\} \not\equiv \{C\}$, 7. $p_1 \cap q_1 \equiv \{C\} \not\equiv \{A\}$, 8. $A \equiv C$, 9. $p_1 \cap q_1 \not\equiv \emptyset$, $A \notin p_1 \cap q_1$, $C \notin p_1 \cap q_1$. Prípady symetrické sú, podľa našeho číslovania: 1.1 a 1.2, 2.2 a 2.3, 4.2 a 4.3, 4.4 a 4.5, 4.6 a 4.7. Po odčítaní symetrických prípadov ostáva 14 rôznych vzájomných polôh dvoch rôznych l-polpriamok.

18. Pozri obrázok 4. na ktorom je M vyšrafovaná. Do M patria otvorené l-úsečky AB_1 a AB_2 aj l-bod A, nie však l-polpriamky B_1Q a B_2Q. Pre $X \notin$ M je buď XP_1, alebo XP_2 l-priamka nepretínajúca ani p, ani l-polpriamku $q_1 \equiv AQ$. Ak naopak $X \in$ M a napríklad X je l-bod l-polroviny AQB_1, potom každá e-priamka x idúca l-bodom X a nepretínajúca l-polpriamku q_1 pretne, podľa Paschovej vety aj e-úsečku QB_1, aj l-úsečku B_1A, túto však nie v bode A. Preto e-priamka x pretne aj e-úsečku P_1P_2 v jej vnútornom bode.

19. Jednoznačnosť zobrazenia p je zrejmá. Nech $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$. Potom 1. pre $x \not\equiv \{s\}$ idúcu bodom S existuje jediný smer $X \in s$ kolmý na x, 2. pre $x \equiv \{s\}$ existuje v $\dot{\pi} \cup s$ jediný prvok X (a to bod S) pre ktorý $p(X) \equiv x$, 3. pre $x \not\equiv \{s\}$ neidúcu bodom S označme Y pätu kolmice vedenej z S ku x. Na polpriamke SY existuje jediný bod X spĺňajúci rovnicu $\varepsilon(SX)\ \varepsilon(SY) = r^2$.

20. Prvé tvrdenie vyplýva zo súmernosti podľa priamky XS (aj v tom prípade keď X je smer). Druhé tvrdenie je zrejmé, ak uvážime tri prípady podľa definície 5.

21. Pretože $X \in h \Leftrightarrow \varepsilon^2(XS) = r^2$, je prvé tvrdenie zrejmé. Druhé tvrdenie je dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia.

22. Označme $N \equiv M_1M_2 \cap SM$ (obrázok 5). Z pravouhlého trojuholníka SM_1M podľa euklidovej vety vyplýva $\varepsilon(SN).\varepsilon(SM) = \varepsilon^2(SM_1) = r^2$, lebo $M_1N \perp SM$.

23. Diskutujme jednotlivé prípady. Ak $X \equiv S$, potom $S \in y \Rightarrow \mathrm{P}(y) \in s \in \mathrm{p}(S)$. Ak $X \not\equiv S$ a $y \equiv XS$, potom $\mathrm{P}(y)$ je smer kolmý na y a $\mathrm{p}(X)$ priamka (podľa úlohy 20) kolmá na y. Teda $\mathrm{P}(y) \in \mathrm{p}(X)$. Ak konečne je $S \not\equiv X \in h$, $S \in y$, potom pre body V a W (definované, ako v dôkaze vety 2) platí $\varepsilon(SV).\varepsilon(SW) = \varepsilon^2(SX) = r^2$, lebo buď je $X \equiv V \equiv W$, alebo je SXW pravouhlý trojuholník, v ktorom sme užili euklidovu vetu.

24. Nech M leží vnútri h. Nech $x \not\equiv y$ sú priamky idúce bodom M. Potom x, y pretínajú h a vieme konštruovať body $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(y)$. Z vety 2. vyplýva $\mathrm{p}(M) \equiv \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)$. Obdobne (obr. 7) ak m je priamka pre ktorú $m \cap h \equiv \emptyset$, zvolíme $X \not\equiv Y$ na m. Znovu podľa úlohy 22. zostrojíme priamky $\mathrm{p}(X)$ a $\mathrm{p}(Y)$, potom z vety 2. vyplýva $\mathrm{P}(m) \equiv$ $\equiv \mathrm{p}(X) \cap \mathrm{p}(Y)$. Na obrázku 7 je volené Y na $\mathrm{p}(X)$, kvôli stručnosti konštrukcie.

25. Z $m \top n$ je podľa definície $\mathrm{P}(\bar{n}) \in \bar{m}$, $\mathrm{P}(\bar{n})$ je i-bod a preto existujú e-dotyčnice z $\mathrm{P}(\bar{n})$ ku h; dotykové a-body U, V ležia v opačných polrovinách vyťatých e-priamkou $\bar{m}$, preto m a n sa pretnú v l-bode.

26. Jedinú, ak m je rozbežné s n, inak žiadnu. Z požiadavky $m \top x \top n$ totiž vyplýva $x \equiv \mathrm{P}(m)\mathrm{P}(n)$, ak toto má zmysel.

27. Dokážeme sporom. Ak $ABCD$ je l-štvoruholník pre ktorý $AB \top BC \top CD \top DA \top AB$, potom rozbežky

AB a CD majú dve spoločné rôzne l-kolmice a to AD a BC, čo je v spore s tvrdením predchádzajúcej úlohy.

28. e-Tetivy p, q sú e-rovnobežné, pretože podľa predchádzajúceho príkladu z $S \in m$, $p \top m \top q$ vyplýva $p \perp m \perp q$, teda $p \parallel q$.

29. a, b sú rozbežky, lebo a, b majú spoločný i-bod resp. smer P(q).

30. Nech U je a-bod. Na l-polpriamke SU nájdeme všetky l-body X hľadanej množiny. Označme $x = \varepsilon(SX)$, potom $\varepsilon(SU) = \varepsilon(SV) = r$ a $\varepsilon(XU) = r - x$, $\varepsilon(XV) = r + x$, kde $V \not\equiv U$ je a-bod l-priamky SU. Podľa (8) je

$$a = \lambda(SX) = log \frac{r\,(r + x)}{r\,(r - x)},$$

odkiaľ

$$2^a = \frac{r + x}{r - x}, \text{ tj. } x = r\,\frac{2^a - 1}{2^a + 1} < r.$$

Na l-polpriamke SU existuje a to jediný l-bod X hľadanej množiny. Ak teda U prebehne celé h, potom X prebehne všetky body e-kružnice so stredom S a polomerom x. Hľadaná množina je teda e-kružnicou.

l-Bod M pre ktorý $2\,\varepsilon(SM) = r$ leží na horepopísanej e-kružnici práve vtedy, keď je $x = \frac{r}{2}$ tj. keď platí

$$\frac{2^a - 1}{2^a + 1} = \frac{1}{2}, \text{ čiže } 2^a = 3, \text{ čiže } a = log\,3.$$

31. Označme $V \not\equiv U$ a-bod l-priamky AU a $\varepsilon\,(AU) = u$, $\varepsilon\,(AV) = v$, $\varepsilon\,(AX) = x$, potom

$$1 = \lambda\,(AX) = log\,\frac{u\,(v + x)}{v\,(u - x)},\; 2 = \frac{u\,(v + x)}{v\,(u - x)}$$

teda

$$0 < x = \frac{uv}{u + 2v} < u.$$

Odtiaľ vyplýva existencia a jednoznačnosť l-bodu X.

Konštrukciu l-bodu X prevedieme napr. pomocou vety o mocnosti bodu ku kružnici — pozri dodatok D. Zostrojíme pomocný e-bod W neležiaci na e-priamke AU tak, aby $\varepsilon(AW) = u + 2v$. Nech Y je e-priesečník e-priamky AW s e-kružnicou k opísanou e-trojuholníku UVW. Z mocnosti A ku k je

$$\varepsilon(AU) . \varepsilon(AV) = \varepsilon(AW) . \varepsilon(AY), \text{ čiže } \varepsilon(AY) = \frac{uv}{u + 2v}.$$

e-Dĺžku $\varepsilon(AY)$ prenesieme na l-polpriamku AU. Poznámenajme, že vo vhodnom prípade môžeme e-kružnicu h použiť v úlohe e-kružnice k.

32. Existenciu l-bodu M dokážeme, ak dokážeme platnosť vzťahov

$$0 < \frac{\sqrt{av}}{v - u}(\sqrt{ub} - \sqrt{av}) < u - a.$$

Označme $\varepsilon(UV) = d$ tj. $d = a + v = b + u$. Zo zrejmej nerovnosti $d < u + v$ za predpokladu $u - v > 0$ vyplýva $d(u - v) < u^2 - v^2$, čiže $ub = u(d - u) < v(d - v) = va$, alebo $\sqrt{ub} - \sqrt{av} < 0$. Podobne zo vzťahu $u - v < 0$ dokážeme $\sqrt{ub} - \sqrt{av} > 0$, teda prvá z požadovaných nerovností je dokázaná. Z dokázaného vzťahu $\sqrt{bu} < \sqrt{av}$ (stále za predpokladu $v < u$) dostávame postupne

$$d - u < \sqrt{ab}\sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$v + a < u + \sqrt{ab}\sqrt{\frac{v}{u}}$$
$$uv + au < \sqrt{abuv} + u^2$$

z čoho vyplýva aj druhá z požadovaných nerovností. Analogicky pre prípad $u < v$.

33. Rovnosť $x = \sqrt{av}\,\dfrac{\sqrt{bu} - \sqrt{av}}{v - u}$ budeme postupne upravovať. Rozšírime zlomok číslom d. Čitateľa môžeme upraviť nasledovne

$$d\,(\sqrt{bu} - \sqrt{av}) = \sqrt{bu}\,(a + v) - \sqrt{av}\,(u + b) =$$
$$= (\sqrt{uv} - \sqrt{ab})\,(\sqrt{bv} - \sqrt{au}).$$

Menovateľa upravíme takto

$$d\,(v - u) = (\sqrt{bv} + \sqrt{au})\,(\sqrt{bv} - \sqrt{au}).$$

Potom takto upravenej rovnosti možno dať tvar (ak $\sqrt{au} \neq$ $\neq \sqrt{bv}$)

$$x\,(\sqrt{bv} + \sqrt{au}) = v\sqrt{au} - a\sqrt{bv}$$

a ďalej

$$(a + x)\sqrt{bv} = (v - x)\sqrt{au}.$$

Po umocnení poslednej rovnosti prídeme ku vzťahu

$$\frac{v\,(a + x)}{a\,(v - x)} = \frac{u\,(v - x)}{b\,(a + x)}.$$

Logaritmovaním poslednej rovnosti dôjdeme konečne ku vzťahu

$$\lambda\,(AM) = \lambda\,(BM).$$

34. Nech $\varepsilon\,(ZS) : \varepsilon\,(ZM) = c$. Z e-rovnoľahlosti podľa stredu Z a koeficientu c vyplýva $\varepsilon\,(SP_1) = \varepsilon\,(SP_2) =$

$= c.\varepsilon(MQ_1) = c.\varepsilon(MQ_2)$, $\varepsilon(RP_1) = c.\varepsilon(NQ_1)$, $\varepsilon(RP_2) = c.\varepsilon(NQ_2)$. Vyjadríme $\lambda(SR)$ a $\lambda(MN)$ podľa (8) a použijeme horných vzťahov.

35. Stačí nájsť jediný konkrétny prípad pre ktorý uvedená veta neplatí. Volíme preto p prechádzajúcu l-bodom S a l-priemety A', B', C' l-bodov v poradí A, B, C do p tak, aby $S \equiv B'$ a tento l-bod bol l-stredom l-úsečky $A'C'$. Podľa predošlej úlohy je $\varepsilon(AA') = \varepsilon(CC') - \varepsilon(BB')$, no podľa príkladu 1. je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \perp p$, teda l-body A, B, C neležia na l-priamke. Poznamenajme, že uvedená veta je nepravdivá pre ľubovoľnú voľbu objektov p, A, B, C.

36. Nech V resp. W je a-bod l-priamky p resp. q rôzny od U (pozri obr. 10). Ak $A \equiv B$ potom $X \equiv C$ je jediné riešenie. Nech $A \not\equiv B$. Označme $G \equiv \overline{AC} \cap \overline{VW}$, $F \equiv \overline{BC} \cap \overline{VW}$, potom podľa Pappovej vety sú $X_1 \equiv q \cap AF$, $X_2 \equiv q \cap BG$ hľadané l-body. V prípade, že $AC \parallel VW$ bude e-bod G nahradený e-smerom VW, čiže AC. Podobne, pre $BC \parallel VW$.

37. Ak p, q sú súbežky je to úloha 36. V opačnom prípade zostrojíme pomocnú l-priamku r súbežnú s p a q a na nej ľubovoľný l-bod R. Dvojnásobným použitím úlohy 36 dostaneme najprv l-body Y_1, Y_2 na r a konečne X_1, X_2 na q tak, že $\lambda(AB) = \lambda(RY_1) = \lambda(RY_2) = \lambda(CX_1) = \lambda(CX_2)$.

38. l-Úsečku AB prenesieme na pomocnú súbežku q s l-priamkou p a použijeme úlohy 36.

39. Nech $U \not\equiv V$ sú a-body hľadanej l-priamky AB, C je l-stred l-úsečky AB, $Q \not\equiv P$ je a-bod l-priamky PS. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať e-polomer r e-kružnice h rovný 1. Nech $\varepsilon(SA) = d$, $0 < d < 1$. Pretože zrejme $\varepsilon(SB) = d$ je C e-stred e-úsečky AB, tiež $\varepsilon(AU) = \varepsilon(BV)$, $\varepsilon(AV) = \varepsilon(BU)$. Podľa vzťahu (8) je teda

$$\lambda(SA) = \log \frac{\varepsilon(PS).\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(AP).\varepsilon(SQ)} = \log \frac{1+d}{1-d},$$

$$\lambda(AB) = \log \frac{\varepsilon(BU).\varepsilon(AV)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} = \log \left(\frac{a + d \sin a}{a - d \sin a}\right)^2,$$

kde

$$a = \varepsilon(UC) = \sqrt{\varepsilon^2(US) - \varepsilon^2(CS)} = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 a}.$$

Po dosadení horných výrazov do žiadanej rovnosti $\lambda(SA) = \lambda(AB)$ dostaneme

$$\frac{1+d}{1-d} = \frac{1 - d^2 \cos 2a + 2ad \sin a}{1 - d^2 \cos 2a - 2ad \sin a},$$

čo možno upraviť na tvar

$$d^4 \cos^2 2a + 2d^2(1 - 2\cos^4 a) - 3 + 4\cos^2 a = 0. \quad (*)$$

V tejto kvadratickej — vzhľadom na d^2 rovnici, určíme najprv diskriminant

$$\frac{1}{4} D = (2\cos^4 a - 1)^2 - \cos^2 2a.(4\cos^2 a - 3) =$$
$$= 4(\cos^8 a - 4\cos^6 a + 6\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1) =$$
$$= 4(\cos^2 a - 1)^4 = 4\sin^8 a.$$

Potom je (predpokladáme $\cos 2a \neq 0$)

$$(d^2)_{1,2} = \frac{2\cos^4 a - 1 - 2\sin^4 a}{\cos^2 2a}.$$

Ukážeme, že znamienko $+$ v uvedenom zlomku nemôže byť. Je totiž

$$\frac{2\cos^4 a - 1 + 2\sin^4 a}{\cos^2 2a} =$$

$$= \frac{2(\cos^2 a + \sin^2 a) - 4\cos^2 a \sin^2 a - 1}{\cos^2 2a} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 2a}{\cos^2 2a} = 1,$$

čo odporuje predpokladu $0 < d < 1$ tj. $d^2 < 1$. Je preto nutne

$$d^2 = \frac{2(\cos^4 a - \sin^4 a) - 1}{\cos^2 2a} = \frac{2\cos 2a - 1}{\cos^2 2a}.$$

Ostáva určiť podmienky riešiteľnosti, tj. zistiť pre ktoré a je $0 < d^2 < 1$, čiže

$$0 < \frac{2\cos 2a - 1}{\cos^2 2a} < 1.$$

Ekvivalentnou úpravou poslednej relácie nachádzame

$$1 < 2\cos 2a < \cos^2 2a + 1.$$

Ľavá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{2} < \cos 2a \text{ tj. } 2a < \frac{\pi}{3},$$

pravá nerovnosť zase s nerovnosťou

$0 < \cos^2 2a - 2\cos 2a + 1 = (\cos 2a - 1)^2$ tj. $2a \neq 0$.
K úplnému riešeniu treba ešte vyšetriť prípad $\cos 2a = 0$. Vtedy $2a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{4}$ a rovnica (*), z ktorej určujeme d má tvar $d^2 - 1 = 0$, čo je v spore s predpokladom $0 < d < 1$.
Odpoveď. Úloha má riešenie a to jediné práve keď je

$$0 < 2a < \frac{\pi}{3}.$$

l-Body A, B sú dané vzťahmi

$$\lambda(SA) = \lambda(SB) = \log\frac{1+d}{1-d}, \quad d = \frac{\sqrt{2\cos 2\alpha - 1}}{\cos 2\alpha}.$$

40. Z konštrukcie a-bodu Q' vyplýva, že e-uhol $\sphericalangle PQQ'$ má mieru 2α a preto $\varepsilon(QQ') = \varepsilon(QP)\cos 2\alpha = 2r\cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha$. Podľa Euklidovej vety je $\varepsilon^2(SK) = \varepsilon(SL).\varepsilon(SQ) = [\varepsilon(QQ') - r]\,r = 2\cos 2\alpha - 1$ a teda $\varepsilon(SM) = \sqrt{2\cos 2\alpha - 1}$. Konečne z e-trojuholníka AMS vyplýva $\varepsilon(SM) = \varepsilon(AS)\cos 2\alpha$ tj. $\sqrt{2\cos 2\alpha - 1} = d\cos 2\alpha$, čiže

$$d = \frac{\sqrt{2\cos 2\alpha - 1}}{\cos 2\alpha},$$

čo sme mali dokázať.

41. Nech o je e-os e-úsečky XY. Ak je $o \parallel h^*$, $o \not\equiv h^*$, potom $x \equiv XY$ je l-priamka druhého druhu a to jediná; ak je $o \cap h^*$ jediný bod, potom je to $S(x)$ a x je znovu jediná. Ak $o \equiv h^*$, potom existuje nekonečne mnoho hľadaných l-priamok x. V B modeli x nemusí existovať.

42. a) $\{B\}$, b) $\{B, B_1\}$, kde B_1 je e-bod súmerne združený s B podľa h^*; c) nemá zmysel; d) l-priamku prvého druhu, ktorá je časťou e-kružnice o e-priemere $S(a)S(c)$.

43. Dvojprvková. $H \in p'$ práve keď p je druhého druhu tj. $\bar{p}$ je e-priamka.

44. Platí. Platí.

45. 12. Nech RS je uzavretá e-úsečka na h^* neobsahujúca žiaden z a-bodov $a'_1 \cup \ldots \cup a'_n$. Potom l-priamka x je daná napr. reláciou $x' = \{R, S\}$. 13. a 14. riešime rovnako ako v modeli B.

46. Ak sú a, b súbežky, potom n je nekonečne veľké, inak je $n = 4$.

47. a) Tri druhy l-polpriamok.
b) Tri druhy l-polrovín.

48. a) l-Polrovina na pravom, či ľavom obrázku 13b; b) l-polrovina na strednom obrázku 13b; c) e-obdĺžnik ležiaci celý v λ; d) dvojica rôznych l-bodov.

49. Je to l-uhol $\sphericalangle BAC$.

50. Ak je m e-kolmá na $h^\star$, potom $m \cap \lambda$ je l-priamka druhého druhu a tá je l-konvexná. Teda l-K$(m \cap \lambda) \equiv m \cap \lambda$. Ak je $m \parallel h^\star$ tj. $m \cap \lambda$, potom l-K$(m \cap \lambda) \equiv$ l-K(m) je tá uzavretá e-polrovina vyťatá e-priamkou m, ktorá celá náleží do λ. Nech konečne $m \cap h^\star \equiv \{M\}$ a l-priamka $p \equiv MH$ nie je časťou m, tj. m nie je e-kolmé na $h^\star$ (obrázok). Potom l-K$(m \cap \lambda)$ je množina obsahujúca všetky vnútorné l-body e-uhla s vrcholom M a ramenami p, $m \cap \lambda$ a tiež všetky l-body $m \cap \lambda$. Posledné tvrdenie dokážeme. Nech X je l-bod ležiaci vnútri e-uhla s ramenami p, $m \cap \lambda$. Nech $Y \in m$ je l-bod v ktorom l-priamka XH pretne m. Nech $R \in m$ je l-bod vnútrajšku e-úsečky YM. Potom l-priamka $x \equiv RX$ pretína m okrem l-bodu R ešte v istom l-bode Q a X je l-bod l-úsečky RQ. Zvyšok je zrejmý. Obrázok 15.

51. Nech $q_1 \nparallel q_2$ sú súbežky vedené l-bodom Q ku p. Potom M sa skladá z dvoch l-uhlov α, β takto definovaných: Ak $P \in p$ je l-bod, potom α je prienikom l-polrovín q_1P a opačnej ku q_2P a β je prienikom l-polrovín q_2P a opačnej ku $q_1 P$. Dôkaz ľahko prevedieme v reči geometrie $\mathfrak{E}$. Poznamenajme, že l-uhly α, β budeme aj v modeli $\mathfrak{p}$ menovať vrcholovými. Množina M zrejme nie je l-konvexná v žiadnom prípade. Obrázok 16.

52. Nech je daný l-uhol $\sphericalangle AVB$. l-Polpriamku VM nazveme l-*osou* l-*uhla* $\sphericalangle AVB$ práve keď $\lambda(\sphericalangle AVM) = \lambda(\sphericalangle MVB)$. Nech a, b sú l-rôznobežky s priesečníkom V. l-Priamku $o \equiv VM$ nazveme l-*osou* l-*rôznobežiek* a, b

práve keď $\lambda(\sphericalangle a, o) = \lambda(\sphericalangle b, o)$. Z euklidovskej planimetrie tak vieme, že oba termíny existujú, že prvý je jednoznačný, druhý dvojznačný.

53. Z e-geometrie vyplýva, že $\lambda(\sphericalangle o_1, o_2) = \frac{\pi}{2}$, podobne ako v teórii $\mathfrak{E}$.

54. Číslo musí byť menšie ako 180^0.

55. $174°$, $18'$; $\lambda(\sphericalangle \alpha) = 45°$, $\lambda(\sphericalangle \beta) = 69°,18'$, $\lambda(\sphericalangle$
$\sphericalangle \gamma) = 60°$.

56. e-Stred e-kružnice označme O a označme ďalej $V \equiv S(AB)$ a W ten priesečník $k \cap h^*$, ktorý je rôzny od U. Pretože VB je kolmé na dotyčnicu v B ku $\widehat{BA}$, je $\lambda(\sphericalangle \beta) = \varepsilon(\sphericalangle BVU)$. Podobne ukážeme, že $\lambda(\sphericalangle \alpha) =$
$= \varepsilon(\sphericalangle VAU)$. Pri označení obrázku 19. je E e-stred toho e-kruhového oblúka $\widehat{AB}$ na k, ktorý neobsahuje e-bod U. e-Body E a F e-diametrálne voči k ležia v rôznych e-polrovinách vyťatých e-priamkou BW. Pretože e-body U a E ležia v tej istej e-polrovine a $O \in BW$, je otvorená e-polpriamka OF celá zvonku e-polroviny BWE a teda e-bod V, ležiaci na e-polpriamke OF neleží v e-polrovine BWU a teda neleží ani na e-úsečke WU. Preto je e-bod V vonkajším e-bodom e-kružnice k. e-Body U, V a F ležia v tej istej e-polrovine ABO a preto je $\varepsilon(\sphericalangle BUA) = \varepsilon(\sphericalangle$
$\sphericalangle BFA) > \varepsilon(\sphericalangle BVA)$. Z e-trojuholníka VAU vyplýva $90° = \varepsilon(\sphericalangle VAU) + \varepsilon(\sphericalangle AVU) + \varepsilon(\sphericalangle AUB) > \varepsilon(\sphericalangle$
$\sphericalangle \alpha) + \varepsilon(\sphericalangle AVU) + \varepsilon(\sphericalangle AVB) = \varepsilon(\sphericalangle \alpha) + \varepsilon(\sphericalangle \beta)$.

57. Nech W je a-bod e-priamky $\overline{AC} \equiv \bar{b}$ a U resp. V e-stredy kružníc $\overline{BC} \equiv \bar{a}$, $\overline{AB} \equiv \bar{c}$ a u, v ich e-polomery. a-Body U, V, W sú očividne navzájom rôzne a naviac W leží medzi U a V. Keby ležal napríklad a-bod U medzi W a V, bolo by nutne $\lambda(\sphericalangle \gamma) > 90° > \lambda(\sphericalangle \alpha)$ a teda

$\lambda(\sphericalangle\, \alpha) \neq \lambda(\sphericalangle\, \gamma)$ v spore s predpokladom. Uvážme teraz reláciu

$$\varepsilon(UV) = \varepsilon(UW) + \varepsilon(VW) = u \cos\varphi + v \cos\varphi = \\ = (u + v) \cos\varphi.$$

Kosinova veta v e-trojuholníku UBV dá vzťah

$$(u + v)^2 \cos^2\varphi = u^2 + v^2 - 2\,uv \cos\varphi,$$

odkiaľ

$$(\cos\varphi)_{1,2} = \frac{-uv \pm (u^2 + uv + v^2)}{(u + v)^2} = \begin{cases} \dfrac{u^2 + v^2}{(u + v)^2} \\ -1 \end{cases}.$$

Druhý prípad, $\cos\varphi = -1$, vedie k evidentne nemožnému faktu $\varphi = 180°$ a ostáva preto

$$\cos\varphi = \frac{u^2 + v^2}{(u + v)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(u - v)^2}{2\,(u + v)^2} \geqq \frac{1}{2},$$

čiže $\varphi \leqq 60°$.
Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $u = v$ tj. $A \equiv C$, lebo $\varepsilon(AW) = v \sin\varphi$ a $\varepsilon(CW) = u \sin\varphi$. Pretože je tento prípad nemožný, je $\varphi < 60°$, čo sme chceli dokázať.

58. Pri značení obrázku 19. označme ešte $u = \varepsilon(AU)$, $v = \varepsilon(AV) = \varepsilon(BV)$, $w = \varepsilon(UV)$. Z e-trojuholníka VUB vyplýva $\cos\lambda(\sphericalangle\, \beta) = \cos\varepsilon(\sphericalangle\, BVU) = \dfrac{w}{v}$ tj. $\sin^2\lambda(\sphericalangle\, \beta) = \dfrac{v^2 - w^2}{v^2}$. Podľa kosínovej vety aplikovanej na e-trojuholník VAU obdržíme $\cos\lambda(\sphericalangle\, \alpha) = \cos\varepsilon(\sphericalangle\, VAU) = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2\,uv}$ tj. $\sin^2\lambda(\sphericalangle\, \alpha) =$

$= \dfrac{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}{4u^2v^2}$. Pretože $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) < 90° \Leftrightarrow \cos[\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta)] > 0 \Leftrightarrow \cos\lambda(\sphericalangle \alpha)\cos\lambda(\sphericalangle \beta) - \sin(\sphericalangle \alpha)\sin(\sphericalangle \beta) > 0$, stačí dokázať posledný z uvedených výrokov. Zo vzťahu $A \not\equiv C$ vyplýva $v^2 \neq u^2 + w^2$ tj. $(u^2 - v^2 + w^2)^2 > 0$, odkiaľ postupne obdržíme: $u^4 - 2u^2(v^2 - w^2) + (v^2 - w^2)^2 > 0$, $u^4 + 2u^2(v^2 - w^2) + (v^2 - w^2)^2 > 4u^2(v^2 - w^2)$, $0 > 4u^2v^2 - 4u^2w^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2$, $w^2(u^2 + v^2 - w^2)^2 > (v^2 - w^2)[4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2]$, $\left(\dfrac{w}{v}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}\right)^2 > \dfrac{v^2 - w^2}{v^2} \cdot \dfrac{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}{4u^2v^2}$, $\cos^2\lambda(\sphericalangle \beta)\cos^2\lambda(\sphericalangle \alpha) > \sin^2\lambda(\sphericalangle \beta)\sin^2\lambda(\sphericalangle \alpha)$. Pretože je $\cos\lambda(\sphericalangle \alpha) > 0$ aj $\cos\lambda(\sphericalangle \beta) > 0$, môžeme rovnicu odmocniť a tým je dôkaz prevedený.

59. Pri označení obrázku budeme druhý a-bod e-kružnice $\overline{AD}$ označovať W. Teda VW sú e-diametrálne e-body v e-kružnici $\overline{AD}$ a preto $\varepsilon(\sphericalangle VDW) = 90°$. Zrejme je $\lambda(\sphericalangle \delta) = \varepsilon(\sphericalangle UDV) < \varepsilon(\sphericalangle VDW) = 90°$, čo sme chceli dokázať.

60. Pretože zo zadania vyplýva, že e-trojuholníky $U_iA_{i+1}U_{i+1}$ pre $i = 1, 2, 3, 4$, sú rovnostranné a $S(A_1A_6) \equiv U_3$, môžeme pre trojuholník $U_3A_6U_5$ písať

$$(2u)^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\varphi,$$

kde $v = \varepsilon(U_3A_6)$. Pre v platí $\varepsilon(U_3A_5) < v < \varepsilon(U_3U_5) + u$ tj. $u\sqrt{3} - v < 3u$, lebo $\varepsilon(\sphericalangle U_3A_5U_5) = 90°$ a teda $\varepsilon^2(U_3A_5) = \varepsilon^2(U_3U_5) - \varepsilon^2(U_5A_5)$.
Dostávame

$$\cos\varphi = \frac{v^2 - 3u^2}{2uv}, \text{ kde } u\sqrt{3} < v < 3u,$$

alebo po označení $\frac{v}{u} = x$ je

$$\cos\varphi = \frac{x^2 - 3}{2x}, \text{ kde } \sqrt{3} < x < 3.$$

Posledná funkcia je na intervale $x > 0$ rastúca, lebo sa dá písať ako súčet rastúcich funkcií $\frac{x}{2}$ a $-\frac{3}{2x}$. Extrémnych hodnôt nadobúda $\cos\varphi$ v koncových bodoch, preto

$$0 = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{2\sqrt{3}} < \cos\varphi < \frac{3^2 - 3}{2.3} = 1,$$

tj.

$$0° < \varphi < 90°.$$

61. Predovšetkým je $\varepsilon(U_iU_{i+1}) = u\sqrt{2}$ pre $i = 1, 2, 3, 4$. $\varepsilon(U_1W) = (2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})\,u$ a $\varepsilon(WA_4) = \frac{u}{2}\sqrt{2}$, kde W je e-stred e-úsečky U_3U_4. Podľa Pytagorovej vety je potom $\varepsilon^2(U_1A_4) = \varepsilon^2(U_1W) + \varepsilon^2(WA_4) = 13u^2$ a tiež $\varepsilon(U_1V) = 3\sqrt{2}\,u + u$. Nakoľko $\varepsilon(U_1A_4) < \varepsilon(U_1A_5) < \varepsilon(U_1V)$ je po dosadení $13u^2 < v^2 < (3\sqrt{2} + 1)^2 u^2$. V e-trojuholníku $U_1A_5U_4$ použijeme kosinovu vetu:

$$(3\sqrt{2}\,u)^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\lambda(\sphericalangle\varphi),$$

lebo $\lambda(\sphericalangle\varphi) = \varepsilon(\sphericalangle U_1A_5U_4)$. Označme ešte $\frac{v}{u} = x$. Potom $18 = 1 + x^2 - 2x\cos\lambda(\sphericalangle\varphi)$, kde $13 < x^2 < (3\sqrt{2} +$

$+ 1)^2 = 19 + 6\sqrt{2}$. Teda číslo $\lambda(\sphericalangle\varphi)$ môže nadobúdať práve tie hodnoty, pre ktoré

$$\cos\lambda(\sphericalangle\varphi) = \frac{x^2 - 17}{2x}, \text{ kde } \sqrt{13} < x < 1 + 3\sqrt{2}.$$

Pre $x > 0$ je funkcia $\cos\lambda(\sphericalangle\varphi)$ rastúca, pretože sa dá písať ako polovičný súčet dvoch rastúcich (na intervale $x > 0$) funkcií: x a $-\dfrac{17}{x}$. Teda

$$-\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{13 - 17}{2\sqrt{13}} < \frac{x^2 - 17}{2x} < \frac{19 + 6\sqrt{2} - 17}{2(1 + 3\sqrt{2})} = 1,$$

alebo

$$-\frac{2}{\sqrt{13}} < \cos\lambda(\sphericalangle\varphi) < 1,$$

teda

$$0 < \lambda(\sphericalangle\varphi) < 123°, 41'$$

s presnosťou na $1'$.
V e-rovine neexistuje šesťuholník s piatimi pravými uhlami.
Útvar je l-konvexný.

62. Pretože p, q sú l-rôznobežky, môže najviac jedna z nich byť druhého druhu. Uvážime dva prípady: (Obr. 23).

A. je druhého druhu, tj. $a' \ni H$ a preto je buď $U \equiv H$, alebo $V \equiv H$. Bez ujmy na všeobecnosti voľme druhý prípad. Potom nutne je q druhého a p prvého druhu. Označme $\lambda(\sphericalangle UAR) = \psi$, $\lambda(\sphericalangle HAR) = \varphi$, $M = S(p)$. Pretože je $\varepsilon(UM) = \varepsilon(AM)$, je tiež $\varepsilon(\sphericalangle AUM) = \varepsilon(\sphericalangle UAM)$ a preto $\varphi = \psi$.

B. a je prvého druhu a nech p je druhého druhu. Označme N a-bod l-priamky q rôzny od V a dokážeme, že $S(r) \equiv N$. e-Trojuholník VAN je e-pravouhlý a platia v ňom euklidove vety, špeciálne $\varepsilon^2(NA) = \varepsilon(NU) . \varepsilon(NV)$. Posledný výraz je mocnosťou e-bodu N ku e-kružnici a, preto $\varepsilon(NA)$ je dotyková e-vzdialenosť e-bodu N od e-kružnice $\bar{a}$. Teda e-kružnica $k_1\,[N, \varepsilon(NA)]$ je e-kolmá na e-kružnicu $\bar{a}$, $R \in k_1$ a preto $k_1 \cap \lambda \equiv r$. Z e-rovnoramenného trojuholníka $ANS(q)$ vyplýva $\lambda(\sphericalangle UAR) = \varepsilon(\sphericalangle ANS(q)) = \varepsilon(\sphericalangle NAS(q)) = \lambda(\sphericalangle VAR)$, čo sme chceli dokázať.

63. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $M \in h$. Označme $P \equiv AM \cap h^*$ a uvážme dva možné prípady:

1. $M \equiv H$,
2. $M \equiv P$.

V prvom z nich je výraz $log \dfrac{\varepsilon(XP)}{\varepsilon(AP)}$ nezáporný a v druhom nekladný. Rovnica $c = \lambda(AX)$ má potom podľa (12) v oboch prípadoch jediné riešenie x a to:

1. $\varepsilon(XP) = 2^c \cdot \varepsilon(AP)$,
2. $\varepsilon(XP) = 2^{-c} \cdot \varepsilon(AP)$.

64. Označme $P \in p'$, $P \not\equiv H$. Podľa (12) je potom

$$1 = \lambda(AX) = \left| log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} \right|$$

teda

$$log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} = 2^{\pm 1}.$$

Hľadaná množina je dvojprvková a skladá sa z l-bodov X_1, X_2 charakterizovaných vzťahmi $\varepsilon(AP) = 2 \cdot \varepsilon(X_1P)$ a $2 \cdot \varepsilon(AP) = \varepsilon(X_2P)$. Inak povedané X_1 je e-stred e-úsečky AP, A je e-stred e-úsečky PX_2.

65. Hľadaná l-mierka je patrná z obrázku 25. Platí $\varepsilon(A_2P) = 2\,\varepsilon(A_1P) = 4 . \varepsilon(AP) = 8\varepsilon(A_{-1}P) = 16\,\varepsilon(A_{-2}P)$.

Všeobecne $\varepsilon(PA_i) = 2^{i-j}\,\varepsilon(PA_j)$ pre ľubovoľné celé i, j, ak A_i je l-bod prislúchajúci hodnote i na l-mierke. Dodajme, že existujú dve orientácie. Zámena $A_i \to A_{-i}$ charakterizuje prechod od jednej ku druhej.

66. Riešenie patrné z priloženého obrázku je založené na konštrukcii l-stredu — pozri príklad 3.

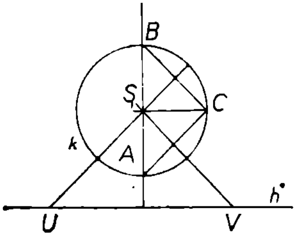
67. Obidve konštrukcie sú patrné z obrázku 28. Označme $P \in p'$, $Q \in q'$, $P \not\equiv H \not\equiv Q$; U resp. V je priesečník h^* a e-priamky AC resp. BC. Potom podľa úlohy 64 existujú práva dva rôzne l-body D_1, D_2 a práve jeden l-bod E, pričom a) D_1 je priesečník e-priamok UB a $\bar{q}$, D_2 je priesečník e-priamok AV a $\bar{q}$, b) Ak A leží medzi B a P potom E je priesečník e-priamok UD_2 a p. Dôkaz tvrdenia je jednoduchý. Z e-rovnobežnosti e-priamok $\bar{p}$, $\bar{q}$ vyplýva $\varepsilon(CQ) : \varepsilon(D_1Q) = \varepsilon(AP) : \varepsilon(BP) = \varepsilon(D_2Q) : \varepsilon(CQ) = \varepsilon(EP) : \varepsilon(AP)$ a vzhľadom na (12) potom $\lambda(CD_1) = \lambda(AB) = \lambda(CD_2) = \lambda(AE)$, čím je dôkaz prevedený. Dodajme, že v prípade e-rovnobežnosti e-priamok h^* a AC resp. h^* a BC bude s h^* e-rovnobežná aj BD_1 aj ED_2 resp. AD_2. Nepresne povedané, a-bod U resp. V „unikne do nekonečna“.

68. Nech q je l-priamka druhého druhu idúca l-bodom A. Nech $p' \equiv \{U, V\}$. Priesečník e-priamky UB s l-priamkou q označme C. Ak Y je l-stred l-úsečky AC (príklad 3), potom hľadané l-body X_1, X_2 sú priesečníky l-priamky p s e-priamkami UY a VY.

69. Podľa príkladu 4 (obrázok 29) je $\lambda(SA) = \lambda(SM) = \lambda(SB)$.

70. a) Zostrojíme e-kružnicu idúcu danými troma bodmi. b) Nech p je l-priamka druhého druhu idúca l-bodom S. Ak $X \in p$, zistrojíme l-bod $Y \in p$ tak, že $X \not\equiv Y$, $\lambda(XS) = \lambda(YS)$. V opačnom prípade vedieme l-priamku q bodmi S a X (tá je nutne prvého druhu) a pomocou a-bodov U, $V \in q'$ konštruujeme l-body A, B ako na obrázku 30.

71. V situácii nakreslenej na obrázku 31 je l-bod C volený tak, že e-priamka S_1C je e-rovnobežná s $h^\star$, S_1 je e-stred kružnice k. Označme l-priamky $AC \equiv b$ a $BC \equiv a$ (sú určite prvého druhu) a označme ešte $U \equiv S(a)$,

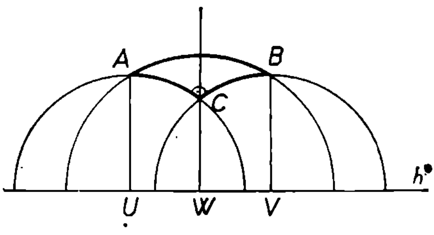


Obr. 31

$V \equiv S(b)$. Potom $\varepsilon(\sphericalangle US_1V) = 90^0$ a preto je $\varepsilon(\sphericalangle UCV) < 90°$ a preto tiež $\lambda(\sphericalangle ACB) = \varepsilon(\sphericalangle UCV) < 90°$. AB je zrejme l-priemer kružnice k.

72. Pri označení $\varepsilon(UA) = \varepsilon(UC) = \varepsilon(VC) = \varepsilon(VB) = u$ a $\varepsilon(WA) = \varepsilon(WB) = v$ je $\varepsilon(UW) = \frac{u}{\sqrt{2}}$ a $\varepsilon^2(AW) = \varepsilon^2(AU) + \varepsilon^2(UW)$ tj. $v^2 = u^2 + \frac{u^2}{2} = \frac{3}{2}u^2$, odkiaľ $v = u\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ďalej je $\cos\varepsilon(\sphericalangle AUV) = 0$; $\cos\varepsilon(\sphericalangle CUV) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\varepsilon(\sphericalangle BWV) = -\cos\varepsilon(\sphericalangle AWV) = \frac{u}{\sqrt{2}} : v = 1 : \sqrt{3}$. Podľa (14) a známeho vzťahu $tg\,\frac{x}{2} =$

$= \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ potom je $\lambda(AC) = |\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle AUV) - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle CUV)| = |\log 1 - \log(\sqrt{2} - 1)| = \log(\sqrt{2} + 1)$, $\lambda(AB) = |\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle AWV) - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle BWV)| = \left| \log \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \log \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} \right| = \log \dfrac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = \log(2 + \sqrt{3})$ a teda $\lambda^2(AC) + \lambda^2(BC) = 2 \log^2(\sqrt{2} + 1)$ a tiež $\lambda^2(AB) = \log^2(2 + 3)$. Požadovaná rôznosť $\lambda^2(AC) + \lambda^2(BC) \neq \lambda^2(AB)$ vyplýva z nerovnosti $2 \log^2(\sqrt{2} + .1) < \log^2(2 + \sqrt{3})$, ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}} < 2 + \sqrt{3}$. Trpezlivým výpočtom (binomický rozvoj dokážeme $(\sqrt{2} + 1)^{10} < (2 + \sqrt{3})^7$, odkiaľ vzhľadom na vzťah $\sqrt{2} < \frac{10}{7}$ je $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}} (< \sqrt{2} + 1)^{\frac{10}{7}} < 2 + \sqrt{3}$ a teda $\sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1) < \log(2 + \sqrt{3})$ čo sme chceli dokázať.



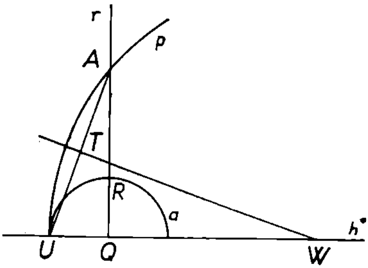
Obr. 32

73. l-priamku AU označme p, $S(p) \equiv W$ a $\bar{r} \cap h^* \equiv Q$; obr. 33. Nech A je zvonka $\bar{a}$ tj. $\varepsilon(AQ) > \varepsilon(RQ)$. Nech T je e-stred e-úsečky AU. Potom WT je e-výška v e-trojuholníku AUW a e-trojuholníky AQU a WTU sú podobné, lebo $\varepsilon(\sphericalangle AQU) = \varepsilon(\sphericalangle WTU) = 90°$ a $\varepsilon(\sphericalangle AUQ) = \varepsilon(\sphericalangle TUW)$. Preto je $\varepsilon(\sphericalangle UAQ) = \varepsilon(\sphericalangle UWT) = \frac{1}{2}\varepsilon(\sphericalangle UWA) = \frac{1}{2}\lambda(\sphericalangle UAR) = \frac{\varphi}{2}$. Z e-trojuholníka AQU vyplýva

$$cotg \frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(UQ)} = \frac{\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(RQ)},$$

odkiaľ

$$d = \left| log\, cotg \frac{\varphi}{2} \right|.$$



Obr. 33

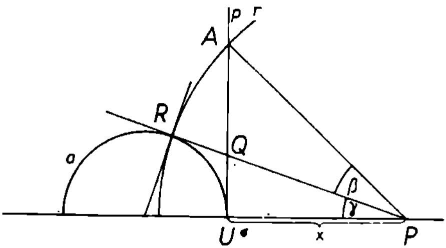
Skoro rovnakým spôsobom dokážeme tento vzťah aj v prípade, že A je vnútri $\bar{a}$ tj. $\varepsilon(AQ) < \varepsilon(RQ)$.

74. Situácia bola popísaná v úlohe 62 (prípad A). Podľa (14) je

$$d = \lambda(AR) = \left| \log \frac{tg \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle MUR)}{tg \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle MUA)} \right| =$$

$$= \left| \log \frac{1}{tg \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \log \cotg \frac{\varphi}{2} \right| .$$

75. Označme $S(r) \equiv P$, $\varepsilon(\sphericalangle APR) = \beta$, $\varepsilon(\sphericalangle RPU) = \gamma$ a priesečník e-priamok AU a PR nech je Q. Pretože e-priamky RQ, UQ sú dotyčnice e-kružnice $\bar{a}$, je $\varepsilon(RQ) = \varepsilon(QU)$ a teda (obr. 34)



Obr. 34

$$tg\, \gamma = \frac{\varepsilon(QU)}{\varepsilon(UP)} = \frac{1}{\cos(\beta + \gamma)} - \frac{1}{\cos \gamma}$$

lebo

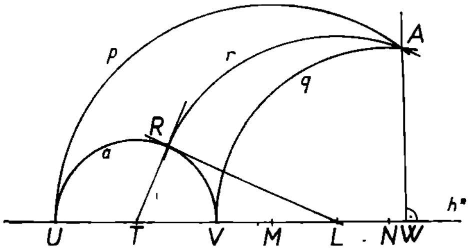
$$\varepsilon(QU) = \varepsilon(RQ) = \varepsilon(RP) - \varepsilon(QP) = \varepsilon(AP) - \varepsilon(QP) =$$
$$= \frac{\varepsilon(UP)}{\cos(\beta + \gamma)} - \frac{\varepsilon(UP)}{\cos \gamma}.$$

Potom platí

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}$$

a preto

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{1-\cos(\beta+\gamma)}{1+\cos(\beta+\gamma)} = \frac{1-\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}}{1+\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$



Obr. 35

čiže

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Podľa (14), vzhľadom na rovnosť $\lambda(\sphericalangle RAQ) = \varepsilon(\sphericalangle APU)$ je

$$\lambda(AR) = \left| \log \frac{tg\,\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{tg\,\dfrac{\gamma}{2}} \right| = \left| \log cotg\,\frac{\beta+\gamma}{2} \right| =$$

$$= \left| \log cotg\,\frac{\varphi}{2} \right|.$$