3. kapitola

MODELY LOBAČEVSKÉHO PLANIMETRIE

3.1. Spôsob štúdia Lobačevského planimetrie

V tejto kapitole začneme vlastné štúdium Lobačevského planimetrie. Posledným termínom označujeme abstraktnú geometrickú teóriu obdobnú tej s ktorou sa čitateľ oboznámil na strednej škole pod názvom rovinná geometria, či planimetria. Aby sme predišli nedorozumeniu, budeme tej planimetrii, ktorá sa učí na strednej škole odteraz hovoriť Euklidovská planimetria. Hlavný rozdiel medzi oboma abstraktnými teóriami — Lobačevského planimetriou, ktorú označíme $\mathfrak{L}$ a Euklidovskou planimetriou, ktorú označíme $\mathfrak{E}$ je v tom, že v teórii $\mathfrak{L}$ platí výrok **L** a v teórii $\mathfrak{E}$ platí výrok **E**.

L: Ak P je bod neležiaci na priamke q, potom existujú aspoň dve rôzne priamky p_1 a p_2 idúce bodom P a nepretínajúce priamku q.

E: Ak P je bod neležiaci na priamke q, potom existuje jedna a len jedna priamka p idúca bodom P a nepretínajúca priamku q.

Podľa toho čo sme povedali v prvej kapitole, mal by náš postup budovania teórie $\mathfrak{L}$ začať vymenovaním základných pojmov a úplnej sústavy axiom. Potom by sme logickými úvahami tj. deduktívne mali vyvodzovať stále zložitejšie tvrdenia teórie $\mathfrak{L}$.

Existujú dva vážne dôvody, pre ktoré nebudeme postupovať uvedeným spôsobom. Axiomatická stavba vyžaduje jednak ďaleko viac miesta, ako dáva tenká brožúrka a ďalej (z hľadiska metodického) nutne predpokladá, že čitateľ bol už aspoň čiastočne oboznámený s axiomatickou stavbou teórie $\mathfrak{E}$. Nakoľko však axiomatizácia teórie $\mathfrak{E}$ sa, kvôli náročnosti látky, na strednej škole neučí môžeme predpokladať, že čitateľova znalosť teórie $\mathfrak{E}$ je len intuitívna. To znamená, že čitateľ pozná všetky základné vzťahy teórie $\mathfrak{E}$, no nepozná jej systém axiom. Pri intuitívnom štúdiu (akejkoľvek) abstraktnej teórie, úlohu sústavy axiom preberá nie celkom jasne vymedzený súbor faktov, ktoré príjmame za „evidentné“ „à priorné“, čiže „samozrejmé“. Tak napríklad v prípade teórie $\mathfrak{E}$ za takéto evidentne pravdivé tvrdenia považujeme výroky:

$\mathbf{U}_1$: Dvoma rôznymi bodmi prechádza jedna a len jedna priamka.

$\mathbf{U}_2$: Existuje štvoruholník majúci všetky štyri uhly pravé (napr. štvorec).

Na základe takýchto evidentných (avšak výslovne nevymenovaných) tvrdení odvodzujeme ďalšie, menej zrejmé tvrdenia teórie $\mathfrak{E}$ — vetu Talesovu, Pytagorovu, sinovu,...

Opísané intuitívne budovanie teórie $\mathfrak{E}$ sa silno opiera o názornosť (skúsenosť) a preto sa nám zdá prirodzeným. Základné tvrdenie $\mathbf{L}$ teórie $\mathfrak{L}$ nielen že nie je názorné, ale našim geometrickým skúsenostiam priam odporuje. Preto je nemožné budovať teóriu $\mathfrak{L}$ intuitívne. Nevedeli by sme totiž, ktoré fakty považovať za evidentné. Napríklad z horeuvedených výrokov $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ evidentne pravdivých v teórii $\mathfrak{E}$ je v teórii $\mathfrak{L}$ pravdivý výrok $\mathbf{U}_1$ a výrok $\mathbf{U}_2$ je nepravdivý. Vidíme, že v tejto brožúrke teóriu $\mathfrak{L}$ nemôžeme budovať ani axiomaticky, ani intuitívne. Ostáva jediná možnosť — použiť modelov. Tento spôsob nám síce nedá abstraktnú teóriu $\mathfrak{L}$, ale aj model teórie $\mathfrak{L}$ nám poskytne veľmi dobrý obraz tejto teórie. Aby naše nové skúsenosti boli bohatšie, oboznámime čitateľa dokonca s dvoma modelmi o ktorých sme sa zmienili už v kapitole prvej. Obidva modely budú realizované v rámci teórie $\mathfrak{E}$ tj. v euklidovskej rovine. Prvý z modelov označíme $\mathcal{B}$, jeho autormi sú Klein a Beltrami, druhý označíme $\mathfrak{p}$, jeho autorom je Poincaré. $\mathcal{B}$ a $\mathfrak{p}$ sú najznámejšie modely teórie $\mathfrak{L}$. Model $\mathcal{B}$ je názornejší, ale na modeli $\mathfrak{p}$ je možné lepšie ilustrovať meranie uhlov a úsečiek.

Úloha 1. Napíšte výroky $\neg\, \mathbf{E}$, $\neg\, \mathbf{L}$ a $\neg\, \mathbf{U}_2$.

Úloha 2. Overte platnosť tvrdenia a) $\mathbf{E} \Rightarrow \neg\, \mathbf{L}$, b) $\neg\, \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{E}$.

Úloha 3. V axiomach $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$ teórie $\mathfrak{S}$ z príkladu 2. kapitoly 1. nahradíme všetky termíny podľa slovníka

↓	chlapec	dievča	priateľky	nepriateľky ↓ (s)
	bod	priamka	rovnobežky	rôznobežky

a novoutvorené axiomy označíme $\mathbf{S}'_1$, $\mathbf{S}'_2$, $\mathbf{S}'_3$, $\mathbf{S}'_4$, $\mathbf{S}'_5$, vzniklú teóriu $\mathfrak{S}'$. Podobne z výrokov $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ (úloha 1.8. a úloha 1.16.) vzniknú výroky $\mathbf{V}'$ a $\mathbf{W}'$. Aký je vzťah medzi teóriami $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{S}'$? Aký je vzťah medzi výrokmi $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}'$ a $\mathbf{W}'$?

Úloha 4. Nájdite závislosť medzi výrokmi a) $\mathbf{L}$ a $\mathbf{V}'$, b) $\mathbf{L}$ a $\mathbf{W}'$.

Úloha 5. Zistite, ktorý z výrokov $\mathbf{E}$, $\mathbf{L}$ je pravdivý v ktorom z modelov: $\mathcal{S}'_1$, $\mathcal{S}'_2$, $\mathcal{S}'_3$, $\mathcal{S}'_6$, $\mathcal{S}'_7$, $\mathcal{S}'_8$ a $\mathcal{S}'_9$. Čiarka má význam popísaný v úlohe 3.

Úloha 6. Dokážte, že v modeloch $\mathcal{S}'_4$ a $\mathcal{S}'_5$ platí $\mathbf{L}$ a $\neg\, \mathbf{E}$.

3.2. Model $\mathcal{B}$ (Beltrami — Klein)

V ďalšom texte budeme pracovať v euklidovskej rovine tj. v teórii $\mathfrak{E}$ a budeme tu modelovať teóriu $\mathfrak{L}$. Tak väčšina geometrických pojmov nadobudne dva rôzne významy, pretože sa vyskytnú ako v teórii $\mathfrak{E}$, tak aj v modeli teórie $\mathfrak{L}$. Napríklad body v zmysle $\mathfrak{L}$ budú len niektoré z bodov v zmysle $\mathfrak{E}$. Bolo by zdĺhavé písať „bod v zmysle $\mathfrak{L}$“, „kolmica v zmysle $\mathfrak{E}$“ a pod., preto budeme písať stručne „l-bod“, „e-kolmica“ a pod. Termín, ktorého význam je ten istý v zmysle $\mathfrak{L}$, ako v zmysle $\mathfrak{E}$ budeme písať ako doteraz bez predsymbolu l-, či e-. Napríklad „l-medzi“ a „e-medzi“ je to isté, preto píšeme proste „medzi“.

Podáme popis modelu B (pozri model S_2 z príkladu 1.2.). Všetky úvahy sú prevádzané v e-rovine.

Dohovor 1. Nech je v e-rovine daná e-kružnica h. Označme symbolom λ množinu všetkých vnútorných a symbolom μ množinu všetkých jej vonkajších e-bodov. Táto symbolika je záväzná pre celý článok 3.2., 3.3. a 3.4.

Definícia 1. e-Bod X nazveme

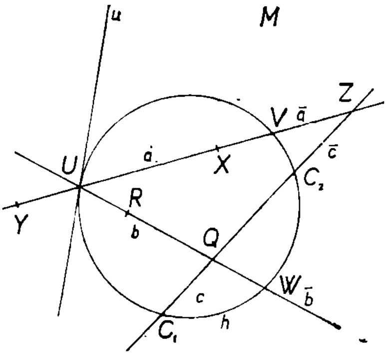
$$\left.\begin{array}{r}\text{l-}\textit{bodom}\\ \text{a-}\textit{bodom}\\ \text{i-}\textit{bodom}\end{array}\right\}\ \text{práve keď je}\ \left\{\begin{array}{l}X \in \lambda\\ X \in h\\ X \in \mu.\end{array}\right.$$

Množinu λ všetkých l-bodov nazveme l-*rovinou*, množinu všetkých a-bodov resp. i-bodov nazveme *absolutom* resp. *ideálom* l-*roviny* λ.

Poznámka 1. V definícii 1. sme zaviedli 6 pojmov. Ku pojmom l-bod a l-rovina, ktoré majú analogické pojmy v $\mathfrak{E}$ teórii pristupujú pojmy a-bod, i-bod, absolut a ideál l-roviny. Posledné štyri pojmy v $\mathfrak{E}$ teórii nemajú obdobu a aj my by sme sa bez nich vedeli zaobísť. Zavedenie uvedených pojmov nám značne uľahčí vyjadrovanie.

Definícia 2. Nech $U \neq V$ sú dva ľubovoľné a-body. Potom otvorenú e-úsečku UV nazveme l-priamkou. Okrem l-priamok takto popísaných žiadne iné neexistujú.

Dohovor 2. l-Priamky budeme označovať dvojakým spôsobom a to alebo malým latinským písmenom a, b, c, x, ... (tak značíme aj e-priamky), alebo dvojicou veľkých latinských písmien AB, UX, YZ, ... pokiaľ tieto písmená označujú dva rôzne e-body, ktorých e-spojnica pretína e-kružnicu h. Napríklad podľa obrázku 3. je otvorená e-úsečka UV zároveň l-priamkou a jej zápis je UV,



Obr. 3

alebo XU, alebo XY, alebo ZV, alebo a a pod. Ak x je l-priamka, potom symbolom $\bar{x}$ označíme e-priamku, pre ktorú $x \subset \bar{x}$ a symbolom x' množinu $\bar{x} \cap h$.

Úloha 7. Pozrite na obrázok 3. a napíšte všetky tam nakreslené a) l-body, b) e-body, ktoré nie sú a-bodmi, c) i-body, d) l-priamky, e) e-priamky.

Úloha 8. Dajte aspoň štyri rôzne zápisy l-priamky $\bar{c} \cap \lambda$ z obrázku 3.

Úloha 9. Nech $X \not\equiv Y$ sú e-body. Aký je rozdiel medzi symbolom „e-priamka XY" a „XY"? Majú obidva symboly vždy zmysel?

Úloha 10. Zapíšte stručnejšie výrazy z obrázku 3.: a) $\overline{XU} \cap \bar{c}$, b) $\{U, V\}$, c) $\overline{MZ}$, d) $\bar{a} \cap QR$.

Úloha 11. Dokážte, že v modeli $\mathcal{B}$ je výrok **L** z 3.1. pravdivý.

V teórii $\mathfrak{E}$ sú dve rôzne priamky buď rovnoběžné, alebo rôznobežné. Ukážeme, že v teórii $\mathfrak{L}$ sa rovnobežnosť dá ešte ďalej klasifikovať.

Veta 1. Nech x, y sú dve rôzne l-priamky. Potom nastáva jeden a len jeden z nasledujúcich troch prípadov:

1. $x \cap y \not\equiv \emptyset$, 2. $x \cap y \equiv \emptyset$ a $x' \cap y' \not\equiv \emptyset$,
3. $x \cap y \equiv \emptyset$ a $x' \cap y' \equiv \emptyset$.

Dôkaz. Namiesto l- priamok x, y uvažujme e-priamky $\bar{x}, \bar{y}$. Ak $\bar{x}, \bar{y}$ sú e-rovnobežné, alebo ak $\bar{x} \cap \bar{y}$ je i-bod, potom nastáva prípad 3. Prípad 1. resp. 2. nastáva práve keď $\bar{x} \cap \bar{y}$ je l-bod resp. a-bod. Poznamenajme, že pre $x \not\equiv y$ je množina $x' \cap y'$ buď prázdna, alebo jednoprvková.

Definícia 3. l-Priamky sa nazývajú: l-*rôznobežné*, či l-*rôznobežky* práve keď $x \cap y \not\equiv \emptyset$, l-*rovnobežné*, či l- *rovnobežky* práve keď $x \cap y \not\equiv \emptyset$. l-Rovnobežky x, y sa nazývajú *rozbežky* resp. *súbežky* práve keď $x' \cap y' \equiv \emptyset$ resp. $x' \cap y' \not\equiv \emptyset$.

Poznámka 2. Pretože termín e-rozbežky neexistuje, stačí písať rozbežky namiesto l-rozbežky. Rovnako pre súbežky. Symbol $\|$ bude značiť výlučne e-rovnobežnosť.

Nasledujúce úlohy 12 až 15 sú venované niektorým faktom platným v teórii $\mathfrak{L}$, nie však v teórii $\mathfrak{E}$.

Úloha 12. Nech je daných n navzájom rôznych l-priamok $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Potom vždy existuje l-priamka x-rovnobežná s každou z priamok $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Úloha 13. Nech a, b sú l-rovnobežky. Potom vždy existuje l-priamka p l-rovnobežná s a a l-rovnobežná s b.

Úloha 14. Existujú tri l-rovnobežky a, b, c tak, že žiadna l-priamka nepretína všetky tri.

Úloha 15. Nech a, b sú l-rovnobežky. Určite množinu **M** l-bodov X, ktorými možno viesť l-priamku x l-rovnobežnú s b a l-rôznobežnú s a.

Úloha 16. (Konštrukčná.) Nech A, B, C sú rôzne l-body, pričom A je e-stred e-kružnice h. Konštruujte l-priamky a, b, c tak, aby každé dve z nich boli súbežky a naviac $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Preveďte diskusiu. Riešenie je založené na istom vtipe.

Zavedieme ďalšie pojmy modelu B: polpriamka, polrovina, úsečka, uhol, trojuholník. Pripomeňme, že v teórii $\mathfrak{E}$ sa pod pojmom „polpriamka" rozumie „uzavretá polpriamka" tj. polpriamka včítane jej začiatku. Rovnako aj polrovina, úsečka a uhol sa v teórii $\mathfrak{E}$ berú uzavreté.

Definícia 4. Nech A, B sú dva rôzne l-body l-priamky p pre ktorú $p' \equiv \{U, V\}$. Nech l-bod B leží medzi A a U. Množinu, ktorá sa skladá z l-bodu A a všetkých l-bodov X ležiacich medzi A a U nazveme l-*polpriamkou* AU, alebo AB. Prienik l-polpriamok AB a BA nazveme l-*úsečkou* AB. Ak naviac l-bod $C \notin p$, potom množinu všetkých bodov X pre ktoré platí: vnútro l-úsečky XC nemá s l-priamkou p žiaden spoločný l-bod sa nazýva l-*polrovinou* ABC, alebo pC. Prienik l-polrovín ABC a ACB nazveme l-*uhlom* a označíme $\sphericalangle BAC$ či $\sphericalangle CAB$. l-Polpriamku MP nazývame tiež *nulový* l-*uhol*, l-polrovinu tiež l-*priamy uhol*. Pojmy *vnútrajšok*, *otvorenosť* či *uzavretosť* l-polpriamky, l-úsečky, l-polroviny a l-uhla sú použité ako v teórii $\mathfrak{E}$. Tieto útvary sa predpokladajú uzavreté, pokiaľ nie je výslovne povedaný opak.

Dohovor 3. O l-polpriamke AB budeme hovoriť aj vtedy, keď je B a-bodom, prípadne i-bodom. e-Bod A musí nutne byť l-bodom. Podobne o l-polrovine ABC hovoríme aj v prípade, že A, B, C sú ľubovoľné e-body neležiace na e-priamke, ak len e-priamka AB pretne h. O l-uhle BAC hovoríme aj v prípade, že B, C sú ľubovoľné e-body rôzne od l-bodu A. Dokonca e-body B, C môžu s l-bodom A ležať na e-priamke — potom je l-uhol BAC buď nulový, alebo priamy. Pojem *opačnej* l-*polroviny* používame, ako v teórii $\mathfrak{E}$.

O l-úsečke AB budeme hovoriť aj v prípade $A \equiv B$ — nazveme ju nulovou.

Znovu pár úloh na precvičenie látky.

Úloha 17. Koľkoraká je vzájomná poloha dvoch rôznych l-polpriamok AB a CD? Nájdite aspoň 10 prípadov.

Úloha 18. Nech p, q sú dve l-rôznobežky a $q_1 \subset q$ l-polpriamka nepretínajúca l-priamku p. Narysujte množinu M tých l-bodov X pre ktoré platí: každá l-priamka x idúca l-bodom X a nepretínajúca l-priamku p nutne pretne l-polpriamku q_1.

3.3. Kolmosť v modeli B

Odteraz až do odvolania predpokladáme, že všetky objekty sú euklidovské a preto upúšťame od písania predsymbolov e- či l-; symboly S resp. r v ďalšom značia stred resp. polomer kružnice h.

Trochu neobvyklým spôsobom budeme definovať množinu s, ktorej prvky značíme veľkými latinskými písmenami — ako body. Symbolmi $\bar{\pi}$ resp. $\dot{\pi}$ označíme množinu všetkých priamok resp. bodov. O zobrazení hovoríme v dodatku A.

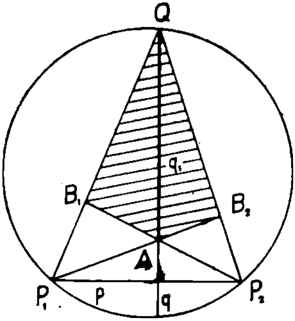
Definícia 5. Nech s je množina daná zobrazením $\sigma : \bar{\pi} \rightarrow \mathsf{s}$ s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

(a) ku každému $X \in \mathsf{s}$ existuje aspoň jedna priamka $y \in \bar{\pi}$ tak, že $\sigma(y) = X$,

(b) pre ľubovoľné priamky $x \not\equiv y$ platí $\sigma(x) \equiv \sigma(y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \parallel y$. Potom množinu s nazývame *množina smerov* a jej prvky nazývame *smery*. Smer $\sigma(x)$ pre $x \in \bar{\pi}$ nazývame *smerom priamky* x, alebo *smerom incidentným s priamkou* x.

Nepresne, ale názorne sa pod pojmom smer rozumie „nekonečný bod priamky“ či „priesečník dvoch rôznych rovnobežiek“.

Dohovor 4. Nech je $x \in \bar{\pi}$; namiesto $\sigma(x)$ píšeme tiež $x \cap \mathrm{s}$, namiesto vzťahu $X = \sigma(x)$ píšeme vzťah $X \in x$. Pre $A \in \dot{\pi}$ a $X \not\equiv Y \in \mathrm{s}$ označíme symbolom AX tú priamku $p \in \bar{\pi}$, pre ktorú $A \in p$ aj $X \in p$ a symbolom XY označí-



Obr. 4

me množinu s. Pre každý $A \in \dot{\pi}$ definitoricky prehlásime $A \notin \mathrm{s}$. Konečne vzdialenosť (tj. e-vzdialenosť) bodov A, B značíme $\varepsilon(AB)$.

Podáme definíciu dvoch zobrazení polarity:

$$\mathrm{p}: \dot{\pi} \cup \mathrm{s} \to \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\} \text{ a } \mathrm{P}: \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\} \to \dot{\pi} \cup \mathrm{s}.$$

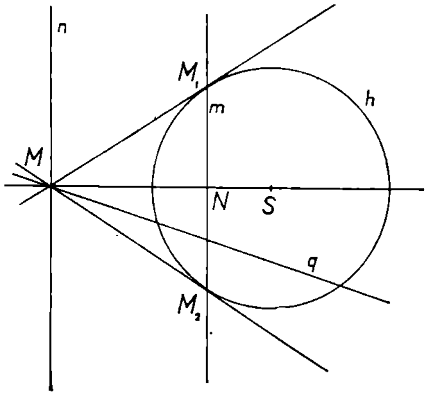
Uvedomíme si, že medzi symbolmi s a $\{\mathrm{s}\}$ je rozdiel — pozri dodatok A.

Definícia 6a. Zobrazenie $\mathrm{p}: \dot{\pi} \cup \mathrm{s} \to \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\}$, ktoré každému prvku $X \in \dot{\pi} \cup \mathrm{s}$ priradí prvok $\mathrm{p}(X) \in \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\}$ nazveme *polárnym zobrazením bodov ak*

1. pre $X \in \mathrm{s}$ je $\mathrm{p}(X)$ priamka idúca bodom S kolmo na X,
2. $\mathrm{p}(S) = \{\mathrm{s}\}$,
3. pre $X \in \dot{\pi}$, $X \not\equiv S$ je $\mathrm{p}(X)$ priamka kolmá na SX idúca tým bodom Y polpriamky SX, pre ktorý

$$\varepsilon(SY).\varepsilon(SX) = r^2. \qquad (7)$$

Úloha 19. Dokážte, že zobrazenie p je bijektívne tj. že každému prvku X množiny $\dot{\pi} \cup$ s priradí jediný prvok p(X) množiny $\bar{\pi} \subset \{s\}$ a ku každému prvku x množiny



Obr. 5

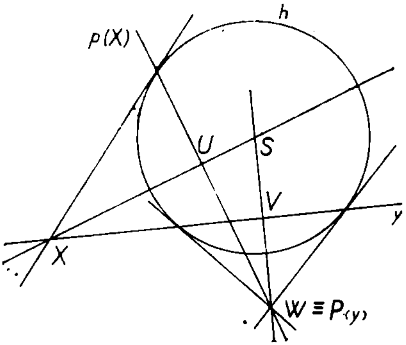
$\bar{\pi} \cup \{s\}$ existuje a pritom jediný prvok $X \in \dot{\pi} \cup$ s tak, že p(X) $\equiv x$.

Tvrdenie dokázané v úlohe 19. nás oprávňuje hovoriť o zobrazení inverznom ku p tj. o takom zobrazení P: $\bar{\pi} \cup \{s\} \to \dot{\pi} \cup$ s, pre ktoré $\mathrm{p}[\mathrm{P}(x)] \equiv x$ pre všetky $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$ a $\mathrm{P}[\mathrm{p}(X)] \equiv X$ pre všetky $X \in \dot{\pi} \cup$ s. Podáme presnú definíciu.

Definícia 6b. Zobrazenie P: $\bar{\pi} \cup \{s\} \to \dot{\pi} \cup$ s dané predpisom $\mathrm{P}(x) \equiv X \Leftrightarrow \mathrm{p}(X) \equiv x$ pre všetky $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$ nazveme *polárnym zobrazením priamok.*

Zobrazenia P a p majú dosť negeometrickú formu, pretože sú popísané predovšetkým rovnicou (7). Nájdeme ich geometrickejšie vyjadrenie.

Úloha 20. Pre každý bod $X \not\equiv S$ je $\mathrm{p}(X) \perp XS$. Dokážte. $X \in h$ práve keď $X \in \mathrm{p}(X)$. Dokážte.



Obr. 6

Úloha 21. Nech $X \in h$, potom $\mathrm{p}(X)$ je dotyčnica ku h v bode X. Nech x je dotyčnica ku h, potom $\mathrm{P}(x)$ je dotykový bod x a h. Dokážte.

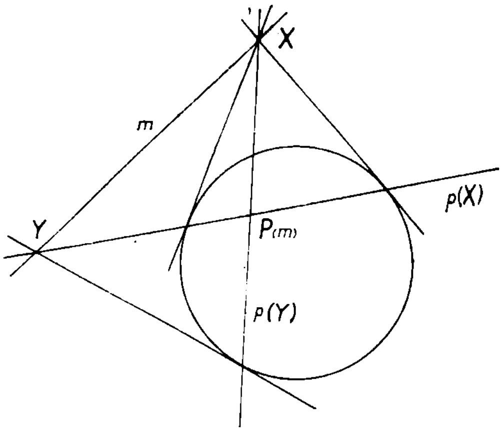
Úloha 22. Nech M je vonkajší bod kružnice h a nech M_1, M_2 sú dotykové body dotyčníc vedených z bodu M ku h. Potom $\mathrm{p}(M) = M_1M_2$. Dokážte.

Konštrukčne vieme už veľmi dobre nájsť $\mathrm{p}(X)$ resp. $\mathrm{P}(x)$ pre X neležiace vo vnútri h resp. pre x majúce s h aspoň jeden bod spoločný. Úlohu doriešime úplne, najprv však dokážeme dôležitú vetu.

Veta 2. *(Základná vlastnosť polarity).* Nech X je bod resp. smer a y priamka. Potom platí

$$X \in y \Leftrightarrow \mathrm{P}(y) \in \mathrm{p}(X).$$

Dôkaz. Nech napred $S \not\equiv X \notin h$, $S \notin y$, $X \notin s$ (obr. 6.). Označme $U \equiv XS \cap p(X)$, V resp. W priesečník kolmice vedenej z bodu S na y s y resp. $p(X)$. Existencia týchto bodov vyplýva z úlohy 20. a horných predpokladov. Pretože



Obr. 7

$X \notin h$, je tiež (úloha 20.) $X \notin p(X)$ a preto $X \not\equiv W$. Z Tálesovej vety vyplývá, že body U, V ležia na kružnici k opísanej nad úsečkou XW ako priemerom. Podľa vety o mocnosti bodu ku kružnici (dodatok D) a definície 6a. je $r^2 = \varepsilon(SU).\varepsilon(SX) = \varepsilon(SV).\varepsilon(SW)$, tiež $y \perp SW$. Preto je $p(W) \equiv y$, teda $W \equiv P(y)$, čiže $P(y) \in p(X)$. Implikáciu $X \in y \Rightarrow P(y) \in p(x)$ sme dokázali pre „všeobecný" prípad. „Špeciálne" prípady prenecháme čitateľovi — nasledujúca úloha. Dokážeme ešte opačnú implikáciu. Ak totiž platí $X \in y \Rightarrow P(y) \in p(X)$, potom je tiež $P(y) \in p(X) \Rightarrow P[p(X)] \in p[P(y)]$ tj. $X \in y$.

Úloha 23. Dokončite dôkaz vety 2.

Úloha 24. Pomocou vety 2. je možné podať konštrukciu poláry p(M) aj v prípade, že M leží vo vnútri h a konštrukciu pólu P(m) priamky m pre ktorú $h \cap m \equiv \emptyset$. Nájdite túto konštrukciu.

Dokončili sme prípravné práce. Odteraz budeme písať zase predsymboly e- a l-. Symbol $\perp$ značí výlučne e-kolmosť.

Definícia 7. l-Priamky m, n nazveme l-*kolmé* práve keď P($\bar{m}$) $\in \bar{n}$, alebo (čo je s týmto vzťahom ekvivalentné) P($\bar{n}$) $\in \bar{m}$. Značíme $m \top n$. Povieme že veľkosť l-uhla l-priamok m, n je $\frac{\pi}{2}$.

Úloha 25. Nech $m \top n$ sú l-priamky. Potom, m n sú rôznobežky. Dokážte.

Úloha 26. Koľko spoločných l-kolmíc majú dve l-priamky $m \not\equiv n$?

Úloha 27. Dokážte, že neexistuje l-štvoruholník, ktorého všetky štyri l-uhly majú veľkosť $\frac{\pi}{2}$. (Pozri výrok $\mathbf{U}_2$ z článku 3.1.).

Príklad 1. Pre l-priamky $p \top q$ platí $p \perp q$ práve keď aspoň jedna z nich prechádza l-bodom S. Dokážte.

Riešenie. Nech p je l-priamka neidúca l-bodom S. Z podmienky $p \top q$ vyplýva P($\bar{p}$) $\in \bar{q}$. Zo všetkých e-priamok x idúcich bodom P($\bar{p}$) jedine jedna je e-kolmá na p a to tá, ktorá prechádza S, teda z $p \perp q$, $S \notin p$ vyplýva $S \in q$. Nech naopak $S \in q$ potom P(q) $\in p$ tj. $p \perp q$.

Úloha 28. Čo vieme povedať z euklidovského hľadiska o l-priamkách p, q, ak ich jediná spoločná l-kolmica prechádza bodom S.

Úloha 29. Nech m, n sú súbežky, pričom každá z nich je rozbežná s l-priamkou q. Zistite vzájomnú polohu l-priamok a, b definovaných vzťahmi $m \top a \top q \top b \top n$.

3.4. Miera úsečky v modeli B

l-Mieru (l-dĺžku) l-úsečky AB budeme definovať spôsobom s ktorým sa čitateľ doteraz pravdepodobne nestretol. Táto definícia však nie je vymyslená, ale zákonite odvodená spôsobom s ktorým čitateľa oboznámiť nemôžeme. Vyžaduje hlbšie vedomosti z geometrie. Začneme definíciou.

Definícia 8. Nech AB je l-úsečka a U, V a-body l-priamky AB. Číslo

$$\lambda(AB) = \left| \log_2 \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} \right| \tag{8}$$

kde $\varepsilon(XY)$ je e-miera (e-dĺžka) e-úsečky XY, nazveme *l-mierou* (*l-dĺžkou*) *l-úsečka* AB.

Poznámka 3. Pretože A je l-bod a V je a-bod je nutne $A \not\equiv V$, teda $\varepsilon(AV)$ je kladné. Rovnako čísla $\varepsilon(BU)$, $\varepsilon(AU)$, $\varepsilon(BV)$ sú kladné, preto výraz (8) má zmysel. Fakt, že použitý logaritmus má základ 2 je nepodstatný. Tento základ volíme hlavne kvôli zjednodušeniu niktorých konštrukcií. Vo väčšine literatúry sa vo vzorci (8) berie tzv. prirodzený logaritmus, ktorého základ je číslo e = 2,71. ... Význam tejto voľby vystúpi pri hlbšom, hlavne analytickom štúdiu l-geometrie.

Dohovor 5. V ďalšom texte symbol log značí vždy $\log_2$.

Veta 3. Nech A, B, C sú l-body ležiace na l-priamke p, potom platí:

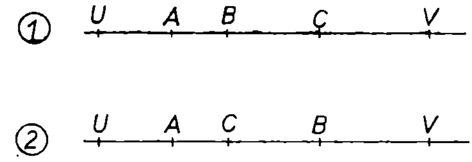
I. $\lambda(AB) \geqq 0$ pričom $\lambda(AB) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$,

II. $\lambda(AB) = \lambda(BA)$,

III. $\lambda(AB) + \lambda(BC) \geqq \lambda(AC)$, pričom rovnosť nastáva práve keď l-bod B patrí l-úsečke AC. (Obr. 8.)

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia I. je evidentná. Rovnosť $\lambda(AB) = 0$ platí práve vtedy, ak výraz v (8) z ktorého sa berie logaritmus je rovný 1 tj.

$$\varepsilon(AV).\varepsilon(BU) = \varepsilon(AU).\varepsilon(BV).$$



Obr. 8

Je zrejmé, že posledná rovnosť je splnená práve keď $A \equiv B$. Tým je dokázané tvrdenie I. Zámenou l-bodov A, B v (8) zmení sa výraz stojaci v absolutnej hodnote len čo do znamienka, teda II. platí. K dôkazu III. vyšetríme dva prípady: 1. l-Bod B leží medzi l-bodmi A a C, 2. l-Bod C leží medzi l-bodmi A a B. Prípad splynutia ktorýchkoľvek z l-bodov A, B, C je triviálny. V oboch prípadoch môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že l-bod A leží medzi U a B. V prípade 1. je

$$\lambda(AB) + \lambda(BC) = \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} +$$

$$+ \log \frac{\varepsilon(BV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(BU).\varepsilon(CV)} = \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU).\varepsilon(BV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV).\varepsilon(BU).\varepsilon(CV)} =$$

$$= \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(CV)} = \lambda(AC).$$

(Boli sme oprávnení vypustiť absolutné hodnoty ?)
V prípade 2. použijeme už dokázaného vzťahu pri vymene-

ných l-bodoch B, C, teda $\lambda(AC) + \lambda(CB) = \lambda(AB)$, odkiaľ $\lambda(AB) + \lambda(BC) = \lambda(AC) + \lambda(CB) + \lambda(BC) < < \lambda(AC)$, lebo $\lambda(CB) = \lambda(BC) > 0$ podľa I., II.

Úloha 30. Určite množinu l-bodov X, pre ktoré platí $\lambda(SX) = a$. Ako treba voliť číslo a, aby do tejto množiny patril aspoň jeden l-bod M pre ktorý $2\,\varepsilon(SM) = r$; r je l-polomer e-kružnice h.

Úloha 31. Nech A je l-bod, U je a-bod. Na l-polpriamke AU nájdite l-bod X tak, aby $\lambda(AX) = 1$. Dokážte existenciu a jednoznačnosť l-bodu X a popíšte jeho euklidovskú konštrukciu.

Úloha 32. Nech $A \neq B$ sú l-body a U, V a-body l-priamky AB volené tak, že A leží medzi U a B. Označme $\varepsilon(AU) = a$, $\varepsilon(BV) = b$, $\varepsilon(AV) = v$, $\varepsilon(BU) = u$. Nech $u \neq v$ a M je l-bod l-úsečky AB pre ktorý $x = \varepsilon(AM) = = \frac{\sqrt{a\,v}}{v-u} \cdot (\sqrt{ub} - \sqrt{av})$. Dokážte, že M existuje.

Úloha 33. Dokážte, že l-bod M z úlohy 32. je l-stred l-úsečky AB tj. $\lambda(AM) = \lambda(BM)$.

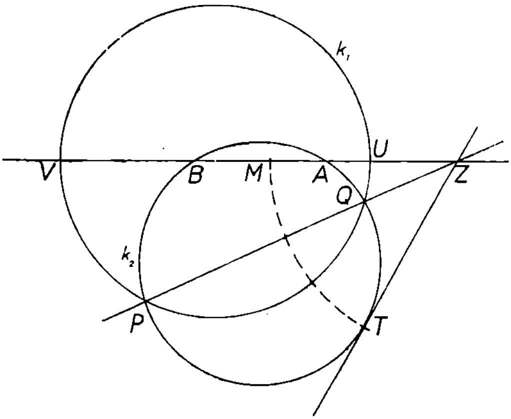
Veta 4. Nech $A \neq B$ sú l-body a U, V a-body l-priamky AB. l-Stred l-úsečky AB nájdeme touto konštrukciou:

1. Ak je $\varepsilon(UA) = \varepsilon(BV)$ potom M zostrojíme ako e-stred e-úsečky AB.

2. Ak je $\varepsilon(UA) \neq \varepsilon(BV)$ potom volíme pomocné e-kružnice k_1 a k_2 tak, že UV je e-priemer k_1, $A \in k_2$, $B \in k_2$ a k_1 pretne k_2 v e-bodoch P, Q.

Nech Z je e-priesečník e-priamok AB a PQ. Nech T je dotykový e-bod e-dotyčnice vedenej e-bodom Z ku k_2 (resp. ku k_1), potom hľadaný l-stred M leží na e-kružnici z e-stredu Z idúcej e-bodom T. (Obr. 9.)

Dôkaz. Nech symboly: a, b, d, u, v značia to čo v úlohách 32. a 33. Prípad 1. je zrejmý z e-súmernosti obrázku podľa e-priamky idúcej l-bodom S e-kolmo na AB. V prípade 2. si najprv uvedomíme, že spojnica e-stredov e-kružníc k_1, k_2 nie je e-kolmá na e-priamku AB, preto e-bod Z existuje. Mocnosť e-bodu Z ku k_1 a k_2 je tá istá, teda $\varepsilon(ZA).\varepsilon(ZB) = \varepsilon(ZU).\varepsilon(ZV)$. Označme (za predpo-



Obr. 9

kladu, že U leží medzi A a Z) $\varepsilon(UZ) = z$, potom horná rovnosť sa dá písať v tvare $(z + a)\cdot(z + u) = z\cdot(z + a + v)$ odkiaľ

$$z = \frac{au}{v - u} \text{ (podľa predpokladu } u \neq v).$$

Z vety o mocnosti e-bodu ku e-kružnici vyplýva

$$\varepsilon^2(ZT) = \left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = z.(z + d).$$

Tvrdenie vety bude dokázané, ak ukážeme, že pre l-bod M popísaný v texte vety platí $\varepsilon(AM) = x$, kde x bolo zadané v úlohe 32. Treba teda dokázať, že

$$\sqrt{z\cdot(z + d)} - (a + z) = x.$$

Výraz na ľavej strane upravíme. Za z dosadíme $\dfrac{au}{v - u}$, za d dosadíme $a + v$. Po úprave dostaneme

$$\frac{1}{v - u}\cdot(\sqrt{auv}\cdot\sqrt{a + v - u} - av) = \frac{\sqrt{av}}{v - u}\cdot(\sqrt{ub} - \sqrt{av}).$$

Poznámka 4. Z úlohy 31. vyplýva zaujímavý fakt, ktorý v e-rovine neplatí. V l-rovine je à priori daná jednotková dĺžka. Tento zdanlivo pozitívny fakt nesie množstvo obtiaží. Napr. delenie l-úsečky na n zhodných častí je úloha v e-rovine jednoduchá, zatiaľ čo v l-rovine značne obtiažna. Tým pádom je obtiažne napr. zostrojiť „l-merítko"; konštruovať merítko s vyznačením napr. desatín ešte nevieme. Čitateľa ešte naučíme prenášať l-úsečky v l-rovine.

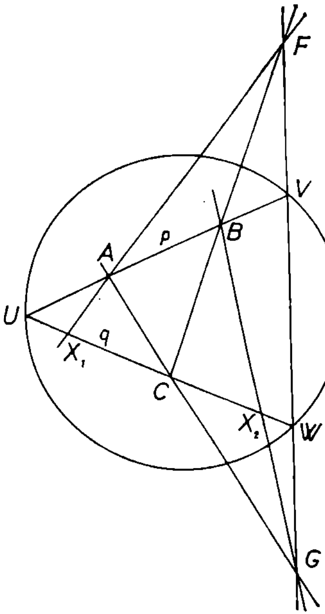
Úloha 34. Nech p, q sú l-priamky pre ktoré $S \in p$, $\bar{p} \parallel \bar{q}$. Nech Z je e-priesečník e-priamok $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, kde $p' = \{P_1, P_2\}$, $q' = \{Q_1, Q_2\}$. Nech $R \not\equiv S$ je l-bod l-priamky p a M, N l- body na q také, že $Z \in \overline{SM}$, $Z \in \overline{RN}$, potom $\lambda(SR) = \lambda(MN)$. Dokážte.

Dohovor 6. Nech A je l-bod, p l-priamka, q l-kolmica z A ku p a $p \cap q \equiv P$. l-Bod P nazveme l-*priemetom* l-*bodu* A do l-*priamky* p, číslo $\lambda(AP)$ nazveme l-*vzdialenosťou* l-*bodu* A od l-*priamky* p a označíme tiež $\lambda(Ap)$.

Úloha 35. (Pozri dôkaz Claviusa v kap. 2.) Dokážte, že v modeli B nasledujúce tvrdenie neplatí: Nech A, B, C sú l-body ležiace v jednej l-polrovine vyťatej l-priamkou p.

Nech $\lambda(Ap) = \lambda(Bp) = \lambda(Cp)$, potom C leží na l-priamke AB.

Prenášať l-úsečky naučíme čitateľa v nasledujúcich úlohách. Ich zvládnutie predpokladá znalosť Pappovej vety, ktorú si čitateľ môže naštudovať v dodatku F.



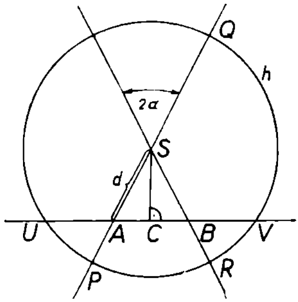
Obr. 10

Úloha 36. Nech p, q sú súbežky a U ich spoločný a-bod. Nech A, $B \in p$ a $C \in q$. Nájdite všetky l-body $X \in q$ tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.

Úloha 37. Nech p, q sú rôzne l-priamky, A, $B \in p$,

$C \in q$. Nájdite všetky l-body $X \in q$ tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.

Úloha 38. Na l-priamke p sú dané tri l-body A, B, C, $A \neq C$. Nájdite l-bod X ležiaci na l-polpriamke CA tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.



Obr. 11

Úloha 39. Nech $P \neq R$ sú a-body, S e-stred e-kružnice h. Nech $2\,\alpha$ je euklidovská miera e-uhla $\sphericalangle PSR$. Nájdite l-body A, B na l-polpriamkach SP, SR tak, aby l-trojuholník ABS bol l-rovnostranný. Určite riešiteľnosť. Riešte výpočtom. (Obr. 11.)

Úloha 40. Overte výpočtom nasledovnú konštrukciu l-bodu A $\left(\text{za predpokladu } 0 < 2\,\alpha < \frac{\pi}{3}\right)$ z predošlej úlohy. (Označenie volíme ako v predošlej úlohe — pozri obr. 11.) e-Rovnobežka s $\overline{SR}$ vedená a-bodom Q pretne h v a-bode $Q' \neq Q$; e-úsečku QQ' prenesieme na e-polpriamku QS. Označme L ten e-bod e-polpriamky QS pre ktorý $\varepsilon(QQ') = \varepsilon(QL)$. Z podmienky $0 < 2\,\alpha < \frac{\pi}{3}$ vyplýva, že L leží medzi P a S. e-Bod K zostrojíme ako vrchol e-pravouhlého trojuholníka KQL s preponou QL a výškou SK. Na e-polpriamke SB nájdeme e-bod M pre ktorý $\varepsilon(SK) = \varepsilon(SM)$. Potom $AM \perp BS$.

3.5. Model p (Poincaré)

Symbolické predpony l- a e- používame rovnako ako v prípade modelu B na ktorý sa budeme odvolávať. Čitateľovi doporučujeme pozrieť model S_5 z príkladu 1.3. Znovu pracujeme v pevnej e-rovine.

Dohovor 7. Nech je v e-rovine daná pevná priamka $h^\star$ vytínajúca v e-rovine dve otvorené e-polroviny, ktoré (uvažované ako množiny e-bodov) označíme λ a μ. Nech H je bod neležiaci v uvažovanej e-rovine. Označme $h \equiv h^\star \cup \{H\}$. Bod H budeme definitoricky považovať za a-bod. Pre každú e-priamku p položíme definitoricky $p \perp h^\star \Leftrightarrow H \in p$. Táto symbolika je záväzná pre celý článok 3.5. až 3.7.

Definícia 9. Pojmy l-*bod*, a-*bod*, i-*bod*, l-*rovina*, *abolut* a *ideál* l-*roviny* λ sú dané definíciou 1.

Definícia 10. Nech p je e-kružnica resp. e-priamka e-kolmá na e-priamku $h^\star$. Potom množinu l-bodov $\lambda \cap p$ nazveme l-*priamkou (prvého resp. druhého druhu)*.*)

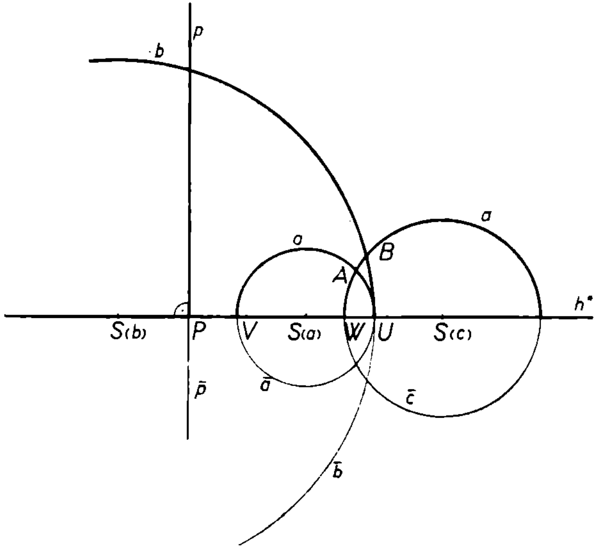
Dohovor 8. Podobne ako v modeli B aj tu budeme l-priamky označovať buď malými latinskými písmenami, alebo dvojicou veľkých latinských písmien, pokiaľ oni značia dva e-body nie súmerné podľa $h^\star$. Pruh aj čiarka majú význam ako v dohovore 2. čl. 3.2. Podľa obrázku 12. je teda $\bar{p}$ e-priamka obsahujúca naviac e-bod H, p otvorená e-pol-

---

*) Hovoríme, že e-kružnica k so stredom S je e-kolmá na e-priamku p, ak $S \in p$.

priamka, $p' \equiv \{H, P\}$, $\bar{a}$ je e-kružnica, $a \subset \bar{a}$, a je otvorená e-polkružnica, $a' \equiv \{V, U\}$. Ak a je l-priamka prvého druhu, potom e-stred e-kružnice $\bar{a}$ označíme $S(a)$.

Úloha 41. Nech X, Y sú dva rôzne e-body. Potom exi-



Obr. 12

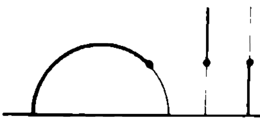
stuje l-priamka x tak, že $X \in \bar{x}$ a $Y \in \bar{x}$. Dokážte. Existuje jediná x? Platí obdobné tvrdenie v modeli B?

Úloha 42. Pri označení obrázku 12. určite čo značí a) $b \cap \bar{c}$, b) $\bar{b} \cap \bar{c}$, c) $S(p)$, d) $S(a)S(c)$.

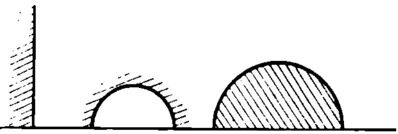
Úloha 43. Koľkoprvková je množina p', ak p je l-priamka? Čo značí tvrdenie $H \in p'$?

Úloha 44. Platí tvrdenie vety 1. z článku 3. 2. aj pre model $\mathfrak{p}$? Platí výrok **L** z 3. 1. aj pre model $\mathfrak{p}$?

Definícia 11. Pojmy l-*rôznobežky*, l-*rovnobežky*, *rozbežky* a *súbežky* (a gramatické obmeny týchto termínov) sú dané definíciou 3. článku 3. 2. Symbol $\|$ označuje, ako aj v modeli B výlučne e-rovnobežnosť.



Obr. 13a



Obr. 13b

Úloha 45. Vyriešte úlohy 12.—14. článku 3. 2. v rámci modelu p.

Dohovor 9. Povieme, že l-bod A leží medzi l-bodmi B a C ak

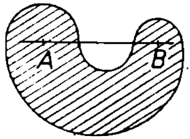
1. l-body A, B, C ležia na jednej l-priamke m a
2. e-bod A leží medzi e-bodmi B a C v zmysle $\mathfrak{E}$ v prípade, že m je druhého druhu; e-úsečka $AS(m)$ pretne e-priamku BC v prípade, že m je prvého druhu.

Dodajme ešte, že dohovor platí aj vtedy, ak náhodou $B \in h^*$, prípadne $C \in h^*$. Pre a-bod H dodefinujme: Ak AB je l-priamka druhého druhu ($A \not\equiv B$ l-body) a $(AB)' \equiv \equiv \{H, P\}$, potom povieme, že l-bod A leží medzi a-bodmi H a P a naviac l-bod A leží medzi l-bodom B a a-bodom H práve vtedy, keď A neleží medzi B a P. Netreba písať „l-medzi" a „e-medzi", lebo z textu bude vždy jasné či ide o l-body, alebo e-body. Obtiaže s pojmom „medzi" v modeli B neboli.

Definícia 12. Pojmy l-*polpriamka*, l-*úsečka*, l-*polrovina*, l-*uhol*, *nulový a priamy* l-*uhol*, ako aj *vnútrajšok*, *otvorenosť a uzavretosť* týchto útvarov sú dané definíciou 4. článku 3.2.

Úloha 46. Nech a, b sú dve rôzne l-priamky. Určite počet n l-priamok súbežných s a aj b.

Úloha 47. Koľko rôznych (z hľadiska e-roviny) a) l-polpriamok, b) l-polrovín existuje v modeli $\mathfrak{p}$? Načrtnite obrázky.



Obr. 14

Veľmi dôležitým geometrickým pojmom je konvexnosť. Pripomenieme čitateľovi, že množina M sa nazýva konvexná, ak spolu s každými dvoma bodmi A, B obsahuje celú úsečku AB. Na obrázku 14. je nakreslená nekonvexná množina v euklidovskej rovine. Kruh, vnútrajšok štvorca, či polpriamka sú príklady konvexnej množiny.

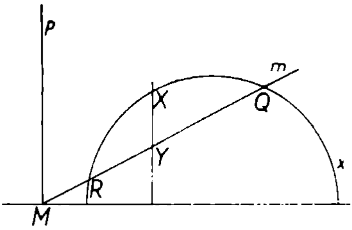
Skôr ako budete čítať ďalej, pokúste sa zistiť, či aj l-polpriamka v modeli $\mathfrak{p}$ je konvexná množina.

Odpoveď na poslednú otázku je problematická, pretože pojem „konvexná množina" bol hore zavedený nie dosť presne. Ku zavedeniu pojmu konvexity je totiž nevyhnutné určiť pojem úsečka a z horného textu nijako nevyplýva či sa jedná o e-úsečku, alebo l-úsečku. Podľa toho ktorý z týchto termínov v hornej definícii použijeme, budeme hovoriť o e-*konvexite* (tomu vyhovuje napríklad obr. 14.) a l-*konvexite*. Teda l-priamka prvého druhu je l-konvexná, ale nie je e-konvexná.

Definícia 13. Povieme, že množina M e-bodov je e-*konvexná*, ak z faktu $A \in$ M, $B \in$ M vyplýva, že e-úsečka AB patrí do M. Analogicky definujeme l-*konvexitu*, ak v hornej definícii všetky predsymboly e- nahradíme predsymbolmi l-.

Veta 5. l-Polrovina, l-polpriamka, l-uhol a l-úsečka, ako aj vnútrajšky týchto útvarov sú l-konvexné. Prienik dvoch l-konvexných množín je množina l-konvexná.

Dôkaz. Nech p je l-priamka a $Q \notin p$ l-bod. Nech $X \not\equiv Y$



Obr. 15

sú l-body l-polroviny pQ a q l-priamka XY. Bez ohľadu na to či e-útvary p, q sú e-priamky, e-kružnice, platí, že v prípade keď sa p a q pretnú, nemôžu byť e-body X, Y e-útvarom p oddelené. l-Konvexita l-polpriamky a l-úsečky je triviálna.

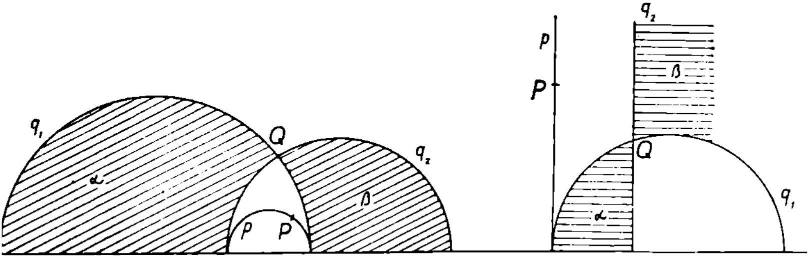
Nech sú ďalej M a N konvexné množiny a nech l-body $X \not\equiv Y$ náležia množine $M \cap N$. Pretože l-úsečka XY podľa definície l-konvexity náleží do M aj N, náleží celá tiež do $M \cap N$.

Z l-konvexity l-polroviny vyplýva podľa posledného aj l-konvexita l-uhla a veta je dokázaná.

Úloha 48. V modeli $\mathfrak{p}$ nájdite príklad množiny M, ktorá a) je aj l-konvexná, aj e-konvexná, b) je l-konvexná a nie je e-konvexná, c) je e-konvexná a nie je l-konvexná, d) nie je ani e-konvexná ani l-konvexná.

Úloha 49. l-Konvexnú množinu $N \subset \lambda$ nazývame l-*konvexným obalom danej množiny* $M \subset \lambda$ ak 1. $M \subset N$ a 2. pre každú l-konvexnú množinu N_1 platí $M \subset N_1 \Rightarrow N \subset N_1$.

l-Konvexný obal množiny M značíme l-K(M). Určite l-konvexný obal l-K(M) množiny M skladajúcej sa z l-polpriamok AB a AC, pričom A, B, C sú tri l-body neležiace na l-priamke.



Obr. 16

Úloha 50. Nech m je e-priamka majúca neprázdny prienik s λ. Určite l-konvexný obal množiny $m \cap \lambda$. Preveďte diskusiu.

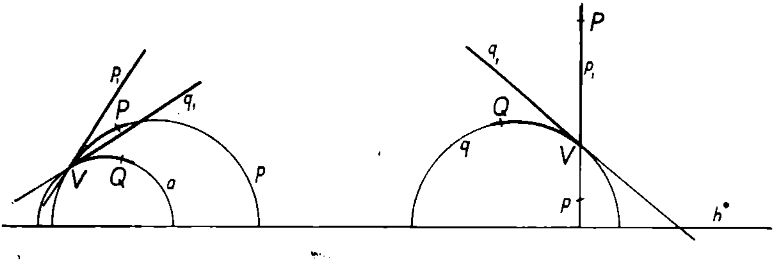
Úloha 51. Nech p je l-priamka a $Q \notin p$ l-bod. Pomocou l-uhla popíšte množinu M tých l-bodov X, pre ktoré sú l-priamky QX a p l-rovnobežkami. Je M l-konvexná?

3.6. Miera uhla v modeli p

V modeli B sme síce poznali kolmosť, ale inak l-mieru (veľkosť) l-uhla sme vedeli určiť len v tom veľmi špeciálnom prípade, keď jeho l-vrchol splynul s e-stredom e-kružnice h. V modeli p budeme vedieť určiť l-mieru ľubovoľného l-uhla. Čitateľ si prečíta teraz časť B z dodatku, kde je definovaný pojem e-*polodotyčnice* e-*kruhového oblúka*.

Definícia 14. Nech je daný l-uhol $\sphericalangle PVQ$. Symbolom

p_1 resp. q_1 označíme e-polpriamku, ktorá je: 1. e-polodotyčnicou v e-bode V e-kruhového oblúka VP resp. VQ, ak je l-priamka VP resp. VQ prvého druhu, 2. totožná s e-polpriamkou VP resp. VQ, ak je l-priamka VP resp. VQ



Obr. 17.

druhého druhu. l-Mieru l-uhla $\sphericalangle PVQ$ označíme $\lambda(\sphericalangle PVQ)$ a definujeme predpisom

$$\lambda(\sphericalangle PVQ) = \varepsilon(\sphericalangle p_1, q_1)$$

pričom toto číslo (písané v stupňovej miere) volíme vždy v intervale [0°, 180°]. Obr. 17.

Poznámka 5. Zatiaľ čo v e-rovine môžeme definovať aj mieru e-uhla dvoch e-rovnobežiek (ako nulu), nie je toto v l-rovine vôbec možné. V l-rovine sa o miere dvoch l-priamok dá hovoriť iba vtedy, ak sú tieto buď totožné, alebo l-rôznobežné.

Dohovor 10. Nech a, b sú dve l-priamky pretínajúce sa v l-bode V. Nech a_1, b_1 sú e-dotyčnice v bode V e-kružníc v poradí $\bar{a}, \bar{b}$ — prípadne $a_1 \equiv \bar{a}$, alebo $b_1 \equiv \bar{b}$, ak sú a, alebo b e-polpriamky. l-*Mierou* l- *uhla* l-*priamok* a, b rozumieme menšie z čísiel $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b'_1)$, $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b''_1)$, po prípade číslo $\frac{1}{2}\pi$, ak $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b'_1) = \varepsilon(\sphericalangle a'_1, b''_1)$. Pritom a'_1 je jedna (ktorákoľvek) z e-polpriamok so začiatkom vo V a ležiaca v a_1 a b'_1, b''_1 sú opačné e-polpriamky na ktoré e-bod V delí e-priamku b_1. Ačkoľvek pojem „l-uhol l-priamok a, b" zavedený nebol a je teda bez zmyslu, je „l-miera l-uhla l-rôznobežiek a, b" pojem majúci zmysel. Posledný termín označuje číslo, ktoré značíme $\lambda(\sphericalangle a, b)$. Konečne položíme $\lambda(\sphericalangle a, a) = 0°$.

Príklad 2. Nech a je l-priamka a M l-bod. Potom existuje a to jediná l- priamka m l-kolmá na a idúca l-bodom M. l-Priamky a, m sú l-rôznobežky. Dokážte.

Riešenie. Nech najprv je a prvého druhu, $M \notin a$. Existuje jediný e-bod N ležiaci na e-polpriamke $S(a)M$ tak, že číslo $\varepsilon[S(a)M]\cdot\varepsilon[S(a)N]$ je rovné druhej mocnine e-polomeru e-kružnice a. Pretože e-body $M \not\equiv N$ sú l-bodmi, nemôžu byť e-súmerné ku h^* a teda existuje jediná l-priamka $m \equiv MN$. Bez ohľadu na to, či m je prvého, alebo druhého druhu je táto jedinou hľadanou l-kolmicou na a.V prípade, že a je druhého druhu, $a' = \{A, H\}$ je m daná podmienkou $S(m) \equiv A$ znovu jedinou l-kolmicou na a. Prípad $M \in a$, ktorý sme doteraz neuvažovali je zrejmý.

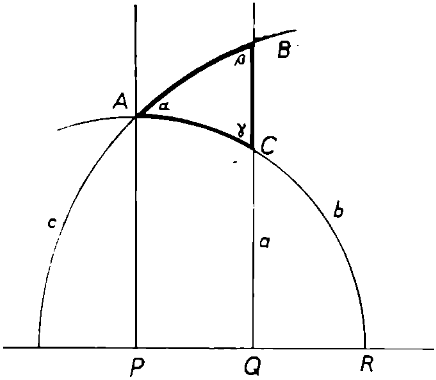
Poznámka 6. Pojmy l-*priemet* l-*bodu* A *do* l-*priamky* p, ako aj l-*vzdialenosť* l-*bodu* A *od* l-*priamky* p zavádzame rovnako ako v dohovore 6. čl. 3.4.

Úloha 52. Pokúste sa definovať pojmy „l-os l-uhla" a „l-os dvoch l-rôznobežiek". Definície v ďalšom texte užívame.

Úloha 53. Ak o_1, o_2 sú l-osi l-rôznobežiek a, b, čo možno povedať o $\lambda(\sphericalangle o_1, o_2)$?

Úloha 54. Nech l-body A, B, C neležia na l-priamke. Prienik l-polrovín ABC, BCA a CAB nazývame l-*troj-*

uholníkom ABC a l-uhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ l-*uhlami* l-*trojuholníka* ABC. Značíme ich ako v e-geometrii $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$. Narysujte l-trojuholník ABC a uhlomerom zistite číslo $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) + \lambda(\sphericalangle \gamma)$ v oblúkovej miere.



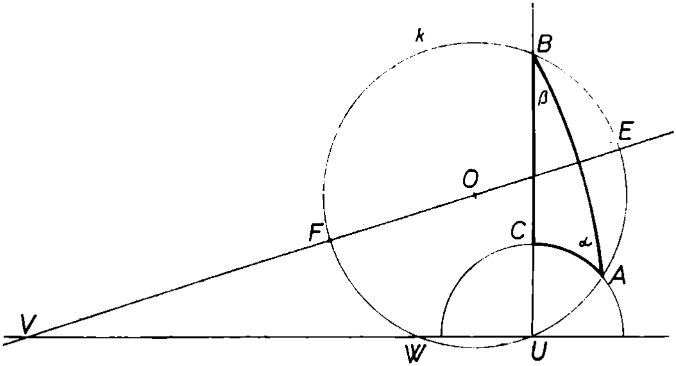
Obr. 18

Úloha 55. Na obrázku 18. je nakreslený l-trojuholník ABC, pričom $S(b) \equiv P$, $S(c) \equiv R$ a AP aj BC sú l-priamky druhého druhu. Ďalej je Q e-stred e-úsečky PR. S presnosťou na $1'$ určite l-súčet uhlov l-trojuholníka tj. číslo $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) + \lambda(\sphericalangle \gamma)$.

Úloha 56. Na obrázku 19. je daný l-trojuholník, pričom BC je l-priamka druhého druhu a $\lambda(\sphericalangle BCA) = 90°$. Dokážte, že potom $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) < 90°$. Ku dôkazu použite pomocnú e-kružnicu k idúcu e-bodmi A, B, U, kde $U \in (BC)'$.

Veta 6. Neexistuje l-trojuholník ABC tak, aby $\lambda(\sphericalangle \alpha) = \lambda(\sphericalangle \beta) = \lambda(\sphericalangle \gamma) = 60°$.

Dôkaz. Predpokladajme, že ABC je l-trojuholník, ktorého všetky tri l-uhly majú l-mieru rovnú 60°. Nech a, b, c sú l-priamky v poradí BC, AC, AB a predpokladajme najprv, že všetky tri sú prvého druhu. Označme ešte U, V, W e-stredy a u, v, w e-veľkosti e-polomerov e-kružníc v po-



Obr. 19

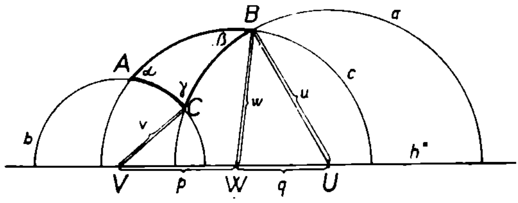
radí $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Pretože e-body U, V, W sú rôzne, leží nutne jeden z nich medzi ostatnými dvoma. Nech (pozri obrázok 20.) napríklad W leží medzi U a V. Potom je $\varepsilon(\sphericalangle VAW) = \lambda(\sphericalangle \alpha) = 60°$, $\varepsilon(\sphericalangle UBW) = \lambda(\sphericalangle \beta) = 60°$, $\varepsilon(\sphericalangle$ $\sphericalangle VCU) = 180° - \lambda(\sphericalangle ACB) = 120°$. Posledná relácia vyplýva tiež z opačnej orientácie trojíc VCA a UCB (pozri dodatok C). Na každý z e-trojuholníkov VAW, WBU a UCV použijeme kosínovu vetu. Pri označení $\varepsilon(UV) = r$, $\varepsilon(UW) = q$, $\varepsilon(VW) = p$ platí

$$\begin{aligned} r^2 &= u^2 + v^2 + uv \\ p^2 &= v^2 + w^2 - vw \\ q^2 &= u^2 + w^2 - uw \end{aligned} \tag{9}$$

a zrejme tiež $r = p + q$. Ak od prvej z uvedených rovníc odčítame druhú a tretiu, obdržíme

$$2pq = r^2 - p^2 - q^2 = uv + uw + vw - 2w^2.$$

Štvorec pravej strany poslednej rovnice je teda rovný štvornásobku súčinu čísiel p^2 a q^2 tj. číslu $4(v^2 + w^2 -$



Obr. 20

$- vw).(u^2 + w^2 - uw)$. Táto relácia sa dá upraviť na tvar

$$3(uv - uw - vw)^2 = 0$$

odkiaľ

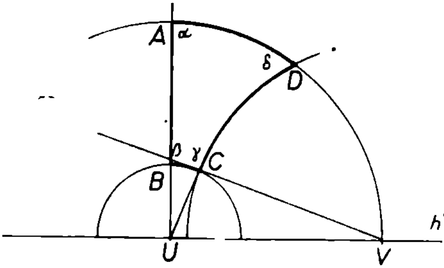
$$w = \frac{uv}{u + v}. \tag{10}$$

Po dosadení zo vzťahu (10) do druhej a tretej rovnice sústavy (9) obdržíme rovnosti

$$p = \frac{v}{u + v}r, \quad q = \frac{u}{u + v}r. \tag{11}$$

Ukázali sme, že ak l-trojuholník ABC, ktorého všetky uhly majú l-mieru rovnú 60° existuje, pričom jeho l-strany sú e-kružnice, potom platia vzťahy (9), (10) a (11). Teraz ukážeme, že zo vzťahov (9), (10) a (11) vyplýva, že popísaný l-trojuholník neexistuje. Stačí teda ukázať $\varepsilon(WC) = w$. Označme $\varepsilon(WC) = x$ a $\varepsilon(\sphericalangle CVU) = \varphi$. Podľa kosínovej vety je

$x^2 = v^2 + p^2 - 2vp\cos\varphi$ pre e-trojuholník CVW' a
$u^2 = v^2 + r^2 - 2vr\cos\varphi$ pre e-trojuholník CVU.



Obr. 21

Po vylúčení člena $\cos\varphi$ z obidvoch rovníc dostaneme po úprave rovnicu

$$x^2 = v^2 \frac{q}{r} + u^2 \frac{p}{r} - pq.$$

Poslednú rovnicu upravíme postupne pomocou (11), (9) a (10):

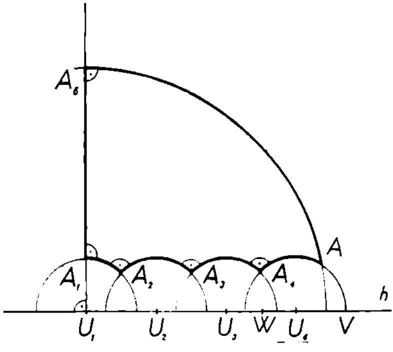
$$x^2 = \frac{uv^2}{u+v} + \frac{vu^2}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} r^2 = uv -$$

$$- \frac{uv}{(u+v)^2} (u^2 + v^2 + uv) = uv - \frac{uv}{(u+v)^2} [(u +$$

$$+ v)^2 - uv] = \left(\frac{uv}{u+v}\right)^2 = w^2.$$

Tým je dôkaz prevedený pre prípad, že a, b, c sú l-priamky prvého druhu. Ostáva vyšetriť ešte prípad, keď jedna a len jedna z týchto l-priamok je druhého druhu. To prenechávame čitateľovi (úloha 57).

Úloha 57. Nech pre l-trojuholník ABC, keď l-priamka AC je druhého druhu, platí $\lambda(\sphericalangle \alpha) = \lambda(\sphericalangle \beta) = \lambda(\sphericalangle \gamma) = \varphi$. Potom nutne $\varphi < 60°$. Poznamenajme, že úloha tvrdí viac, ako bolo požadované v dôkaze poslednej vety.



Obr. 22

Úloha 58. Výpočtom znovu dokážte platnosť tvrdenia vysloveného v úlohe 56.

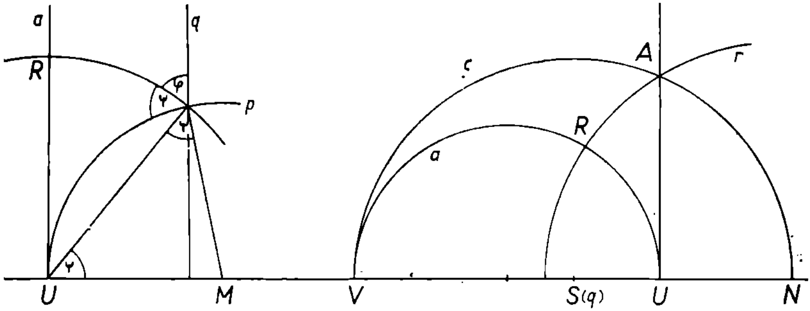
Úloha 59. Na obrázku 21. je nakreslený l-štvoruholník $ABCD$, pričom l-miery l-uhlov $\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma$ sú $\frac{\pi}{2}$. (Taký l-štvoruholník menujeme l-trojpravouholník). Ďalej je AB l-priamka druhého druhu s absolutným bodom $U \in h^*$ a $S(AD) \equiv S(BC) \equiv U$, $S(CD) \equiv V$ je a-bod l-priamky AD. Dokážte $\lambda(\sphericalangle \delta) < \frac{\pi}{2}$!

Úloha 60. Je daný l-šesťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nasledovných vlastností:

1. Všetky jeho l-strany A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6,

A_6A_1 sú l-priamky prvého druhu, pričom l-miera l-uhlov pri l-vrcholoch A_2, A_3, A_4 a A_5 je 120°.

2. Ak označíme $S(A_i A_{i+1}) \equiv U_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$, potom je $\varepsilon(U_i A_i) = u$ pre $i = 1, \ldots, 5$.



Obr. 23

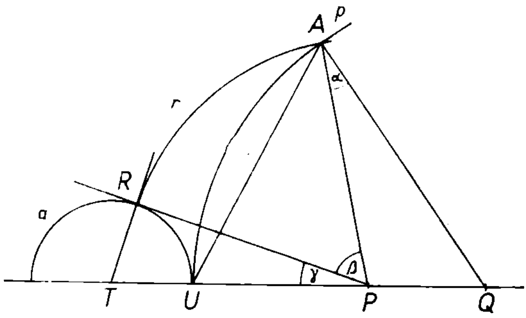
3. $\lambda(\sphericalangle A_2A_1A_6) = \lambda(\sphericalangle A_5A_6A_1) = \varphi$.
Určite množinu hodnôt, ktoré môže číslo φ nadobúdať (v uhlovej miere).

Úloha 61. Na obrázku 22. je nakreslený l-šesťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, ktorého 5 l-uhlov je pravých (tj. ich miery sú 90°). Pri označení obrázku je $U_i \equiv S(A_i A_{i+1})$, $\varepsilon(U_iA_i) = u$ pre $i = 1, 2, 3, 4$ a A_1A_6 je l-priamka druhého druhu s a-bodom $U_1 \in h^*$. Označme ešte $\varepsilon(U_1A_6) = v$. Určite množinu hodnôt, ktoré nadobúda číslo $\lambda(\sphericalangle \varphi)$, kde $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle A_4A_5A_6$. Ako by podobná situácia vyzerala v e-rovine? Je nakreslený l-šesťuholník l-konvexný?

Úloha 62. Nech p, q sú l-rôznobežky z ktorých každá je súbežná s l-priamkou a. Označme $U \equiv p' \cap a'$, $V \equiv q' \cap a'$, $A \equiv p \cap q$, $R \equiv a \cap r$, kde r je l-kolmica vedená l-bodom A ku a. Ak aspoň jedna z l-priamok p, q, a

je druhého druhu, potom $\lambda(\sphericalangle UAR) = \lambda(\sphericalangle VAR)$. Dokážte!

Veta 7. Nech l-bod A neleží na l-priamke a. Nech $p \not\equiv q$ sú súbežky s l-priamkou a vedené l-bodom A.



Obr. 24

Označme $a' \cap p' \equiv U$, $a' \cap q' \equiv V$. Nech R je päta l-kolmice r vedenej l-bodom A ku a. Potom $\lambda(\sphericalangle UAR) = \lambda(\sphericalangle VAR)$. (Obr. 24.)

Dôkaz. Pre špeciálne prípady — kedy niektorá z l-priamok a, p, q je druhého druhu, bolo tvrdenie vety dokázané v úlohe 62. V prípade, že l-kolmica r je l-priamkou druhého druhu vyplýva tvrdenie vety okamžite z e-súmernosti voči r. Nech a, p, q, r sú všetko l-priamky prvého druhu a označme: $M \equiv S(p)$, $L \equiv S(r)$, $N \equiv S(q)$, $T \equiv S(a)$, W e-kolmý priemet e-bodu A na h^*, $u = \varepsilon(TU) = \varepsilon(TV) = \varepsilon(TR)$, $m = \varepsilon(TM)$, $l = \varepsilon(TL)$, $n = \varepsilon(TN)$, $w = \varepsilon(TW)$, $v = \varepsilon(AW)$. Nech A leží zvonka e-kružnice $\bar{a}$. Aplikujme Pytagorovu vetu na e-trojuholník MWA. $\varepsilon^2(MW) + \varepsilon^2(AW) = \varepsilon^2(MU)$ tj. $[\varepsilon(TW) - \varepsilon(TM)]^2 + v^2 = \varepsilon^2(MU)$ čiže $(w - m)^2 + v^2 = (m + u)^2$. Podobne z e-trojuholníkov LWA a NWA získame $(w - l)^2 + v^2 = \varepsilon^2(LA) = \varepsilon^2(LR) = \varepsilon^2(TL) - \varepsilon^2(TR) = l^2 - u^2$ a $(w - n)^2 + v^2 = (n - u)^2$. Ak vylúčime z posledných troch rovníc v, dostaneme rovnice $(m + u)^2 - (w - m)^2 = l^2 - u^2 - (w - l)^2 = (n - u)^2 - (w - n)^2$ čiže $2wm + 2mu + u^2 = 2wl - u^2 = 2wn + u^2 - 2nu$; ďalej z týchto rovníc vylúčime w a dostaneme rovnosť

$$2mn + nu - lm - ln - mu = 0,$$

ktorej je možné dať tvar

$$\frac{(l + u)m}{m + u} = \frac{(l - u)n}{n - u}.$$

Poslednú rovnosť možno upraviť na tvar

$$\frac{-(l - m)^2 + (m + u)^2 + (l^2 - u^2)}{m + u} = \frac{-(n - l)^2 + (n - u)^2 + (l^2 - u^2)}{n - u} \qquad (*)$$

Na e-trojuholníky MAL a NAL aplikujeme kosínovu vetu, pričom označíme $\sqrt{l^2 - u^2}\, cos\varepsilon(\sphericalangle MAL) = x$ a $\sqrt{l^2 - u^2}$ $cos\, \varepsilon(\sphericalangle NAL) = y$:

$$(m + u)^2 + (l^2 - u^2) - 2(m + u)x = (l - m)^2,$$
$$(n - u)^2 + (l^2 - u^2) - 2(n - u)y = (n - l)^2.$$

Porovnaním posledných dvoch vzťahov s rovnosťou (*) dostaneme

$$x = y$$

teda $\varepsilon(\sphericalangle MAL) = \varepsilon(\sphericalangle NAL)$,

alebo $\lambda(\sphericalangle UAR) = \lambda(\sphericalangle VAR)$

čo sme chceli dokázať. Poznamenajme, že v prípade, keď A leží vo vnútri e-kružnice $\bar{a}$ bude poradie a-bodov iné, napríklad U, M, T, W, N, V, L. Na celom dôkaze sa zmenia len niektoré znamienka a preto toto prenechávame čitateľovi. Takýchto prípadov je viac.

3.7. Miera úsečky v modeli p

Začneme definíciou l-miery (dĺžky) l-úsečky, ktorá je časťou l-priamky druhého druhu. Ukážeme niekoľko jej základných vlastností a pomocou týchto podáme definíciu l-miery ľubovoľnej l-úsečky.

Definícia 15a. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke druhého druhu p. Označme P ten a-bod l-priamky p, ktorý leží na h^*. l-*Mieru (dlžku)* l-*úsečky* AB definujeme predpisom

$$\lambda(AB) = |log\varepsilon(AP) - log\varepsilon(BP)| = \left| log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(BP)} \right|. \quad (12)$$

Veta 8. Nech A, B, C sú l-body ležiace na l-priamke druhého druhu p. Potom platí

I. $\lambda(AB) \geqq 0$ a $\lambda(AB) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$,

II. $\lambda(AB) = \lambda(BA)$,

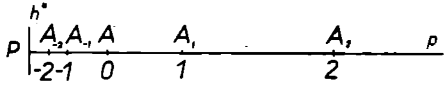
III. $\lambda(AB) + \lambda(BC) \geqq \lambda(AC)$, pričom rovnosť nastáva práve keď l-bod B patrí l-úsečke AC.

Dôkaz. Tvrdenia I. a II. sú zrejmé. Dokážeme tvrdenie III. Do známeho vzťahu $|u + v| \leqq |u| + |v|$ dosadíme $u = log\varepsilon(AP) - log\varepsilon(BP), v = log\varepsilon(BP) - log\varepsilon(CP)$ a získame žiadanú nerovnosť. Rovnosť $|u + v| = |u| + |v|$ nastane práve vtedy, keď je buď $u \geqq 0$ a $v \geqq 0$ tj. $\varepsilon(AP) \geqq \geqq \varepsilon(BP) \geqq \varepsilon(CP)$, alebo $u \leqq 0$ a $v \leqq 0$ tj. $\varepsilon(AP) \leqq \varepsilon(BP) \leqq \leqq \varepsilon(CP)$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 63. Daná je l-polpriamka druhého druhu AM

a nezáporné číslo c. Určite koľko navzájom rôznych l-bodov X hovie rovnici $\lambda(AX) = c$.

Úloha 64. Na l-priamke druhého druhu p je daný l-bod A. Určite množinu všetkých l-bodov $X \in p$ pre ktoré $\lambda(AX) = 1$.



Obr. 25

Poznámka 7. Dĺžka 1 je na rozdiel od $\mathfrak{E}$ pevne daná — nedá sa voliť.

Úloha 65. Na l-priamke druhého druhu p je daný l-bod A. Od tohoto bodu ako začiatku vyneste na p l-mierku celočíselných hodnôt.

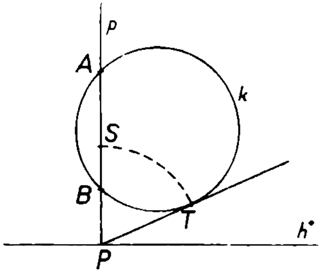
Zatiaľ vieme (euklidovskou konštrukciou = pravítkom a kružítkom) vyniesť na l-priamku prvého druhu celočíselnú l-mierku. Teraz sa naučíme vynášať do takejto l-mierky hodnoty polovičné, štvrtinové, osminové, ...

Príklad 3. Nech $A \not\equiv B$ sú l-body náležiace l-priamke druhého druhu p. Nájdite l-stred S l-úsečky AB, tj. l-bod $S \in p$ pre ktorý $\lambda(AS) = \lambda(BS)$. (Obr. 26.)

Riešenie. Predovšetkým je nutné ukázať, že l-bod S leží medzi l-bodmi A a B. Predpokladajme opak. Nech napríklad l-bod A leží medzi S a B. Potom podľa vety 8. (vlastnosť III.) je $\lambda(AS) + \lambda(AB) = \lambda(SB)$ odkiaľ vzhľadom na rovnosť $\lambda(AS) = \lambda(BS)$ je $\lambda(AB) = 0$ tj. $A \equiv B$ čo je spor s predpokladom. Rovnako dokážeme, že nie je možné, aby B ležal medzi S a A. Preto nutne S leží medzi A a B. (Prípady $A \equiv S$ či $B \equiv S$ sú zrejme nemožné.) Pre l-bod S potom platí

$$\left| \log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(SP)} \right| = \left| \log \frac{\varepsilon(SP)}{\varepsilon(BP)} \right| .$$

Z dôkazu vety 8. vzhľadom na to, že S leží medzi A a B vyplýva, že čísla v horných absolutných hodnotách sú



Obr. 26

obidve súčasne buď kladné, alebo záporné. Každopádne je možné absolutné hodnoty v hornej rovnici vypustiť. Potom je horná rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(SP)} = \frac{\varepsilon(SP)}{\varepsilon(BP)} \text{ tj. } \varepsilon(AP)\cdot\varepsilon(BP) = \varepsilon^2(SP). \quad (13)$$

Z posledného vzťahu vyplýva jednak jednoznačnosť l-stredu S a s prihliadnutím ku mocnosti bodu (pozri dodatok D) ku kružnici tiež konštrukcia:

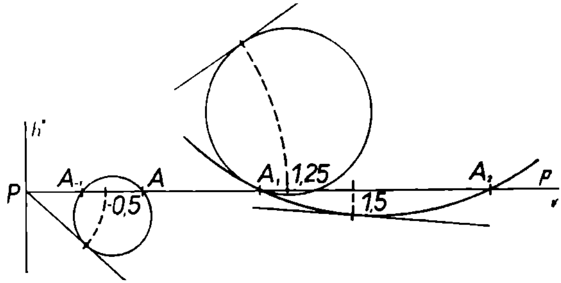
Nech k je ľubovoľná e-kružnica idúca l-bodmi A a B, T je dotykový e-bod e-dotyčnice vedenej a-bodom P ($P \in p'$, $P \not\equiv H$) ku k. Potom z vety o mocnosti bodu ku kružnici je

$$\varepsilon(AP)\cdot\varepsilon(BP) = \varepsilon^2(TP)$$

odkiaľ okamžite plynie (13).

Úloha 66. Do l-mierky z úlohy 65 dokreslite l-body odpovedajúce hodnotám — 0,5 a 1,25. (Obr. 27.)

Úloha 67. Nech p, q sú dve rôzne l-priamky druhého druhu a $A \not\equiv B$ l-body na p a C je l-bod na q. a) Popíšte



Obr. 27

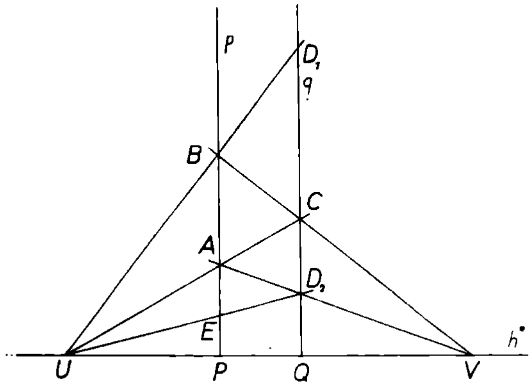
konštrukcie všetkých l-bodov $D \in q$ pre ktoré je $\lambda(AB) = \lambda(CD)$. b) Popíšte konštrukcie všetkých l-bodov $E \in p$ pre ktoré $B \not\equiv E$ a $\lambda(AB) = \lambda(AE)$.

Definícia 15b. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke prvého druhu p. Nech $Z \not\equiv S(p)$ je a-bod a označme $\varepsilon(\sphericalangle AS(p)Z) = \varphi$, $\varepsilon(\sphericalangle BS(p)Z) = \psi$. l-*Mieru* (l-*dĺžku*) l-*úsečky* AB definujeme predpisom

$$\lambda(AB) = \left| log\, tg \frac{\varphi}{2} - log\, tg \frac{\psi}{2} \right| = \left| log \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\psi}{2}} \right|. \quad (14)$$

Poznámka 8. Definícia 15b používa a-bod Z, pričom nie je okamžite zrejmé či vzťah (14) nezávisí od jeho polohy. Keby (14) od polohy bodu Z závisel bola by táto definícia zlá. Prenechávame čitateľovi, aby sa presvedčil, že zmenou a-bodu Z sa číslo $\lambda(AB)$ nemení.

Príklad 4. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke prvého druhu p a C je l-bod ležiaci na l-priamke druhého druhu q. Popíšte konštrukciu všetkých takých l-bodov $D \in q$, pre ktoré $\lambda(AB) = \lambda(CD)$.



Obr. 28

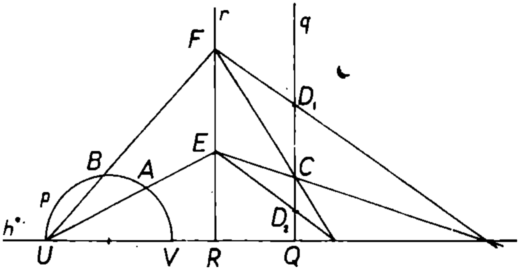
Riešenie. (Obr. 29.) Označme $p' = \{U, V\}$. Nech $r \not\equiv q$ je taká l-priamka druhého druhu, ktorej a-bod $R \not\equiv H$ náleží vnútrajšku e-polpriamky UV. Ukážeme najprv, že pre priesečníky e-priamok UA a UB s r, ktoré označíme v poradí E a F platí

$$\lambda(AB) = \lambda(EF).$$

Z vety o stredovom a obvodovom e-uhle vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle AUV) = \frac{1}{2}\varepsilon(\sphericalangle AS(p)V) = \frac{\varphi}{2}$ (ak v definícii 15b vystupujúci a-bod Z volíme napríklad totožný s V) a rovnako je $\varepsilon(\sphericalangle BUV) = \frac{\psi}{2}$. Podľa (14) a (12) je potom

$$\lambda(AB) = \left| \log \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\psi}{2}} \right| = \left| \log \frac{\varepsilon(ER) : \varepsilon(UR)}{\varepsilon(FR) : \varepsilon(UR)} \right| =$$

$$= \left| \log \frac{\varepsilon(ER)}{\varepsilon(FR)} \right| = \lambda(EF).$$



Obr. 29

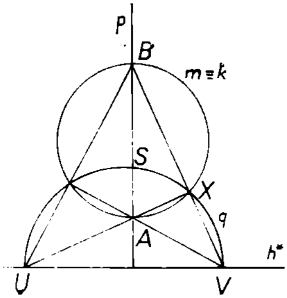
Zvyšok konštrukcie je zrejmý podľa obrázku 29; je opakovaním úlohy 67.

Úloha 68. Nech $A \not\equiv B$ sú l-body l-priamky prvého druhu p. Popíšte konštrukciu oboch l-bodov $X \in p$ pre ktoré je $2\lambda(XA) = \lambda(AB)$.

Úloha 69. Dokážte nasledovnú konštrukciu l-stredu S l-úsečky AB, ak AB je l-priamka prvého druhu, označená p. Nech $p' = \{U, V\}$ a nech M je priesečník e-priamok UA, VB. S je priesečník l-priamky p a e-kolmice vedenej l-bodom M ku e-priamke h^*.

Naučili sme sa l-dĺžky prenášať z l-priamky prvého druhu na l-priamku druhého druhu a naopak. Tým pádom všetko, čo sme vedeli doteraz previesť pre l-priamku druhého druhu, vieme vykonať už aj pre l-priamku prvého druhu.

Doteraz sme o l-kružnici nehovorili. V rámci modelu $\mathcal{B}$



Obr. 30

by bola úloha hodne obtiažna. V modeli $\mathfrak{p}$ l-kružnicu zavedieme a podáme aj jej konštrukciu.

Definícia 16. Nech S je l-bod a r kladné číslo. Množinu všetkých l-bodov X pre ktoré $\lambda(XS) = r$ nazveme l-*kružnicou* a označíme $k(S, r)$; l-bod S nazveme l-*stredom* a číslo r l-*polomerom* l-kružnice $k(S, r)$.

Veta 9. Každá l-kružnica je e-kružnicou, ktorej všetky e-body sú l-bodmi. Každá e-kružnica, ležiaca celá v l-rovine λ je aj l-kružnicou.

Dôkaz. Obrázok 30. Nech je daná l-kružnica $k(S, r)$ a nech $A \not\equiv B$ sú jej l-body ležiace na l-priamke $p \equiv SH$. Nech m je e-kružnica zostrojená nad AB ako e-priemerom. Ak $X \in k(S, r)$ je l-bod rôzny od A aj B, potom l-priamka $q \equiv SX$ je prvého druhu, pretože jediná l-priamka druhého druhu idúca l-bodom S je p a $X \in p$. Označme $q' =$

$= \{U, V\}$. Podľa príkladu 4. e-priamka AX prechádza buď a-bodom U, alebo a-bodom V, pretože podľa definície 16. je $\lambda(SX) = \lambda(SA) = \lambda(SB)$. e-Priamka BX potom prechádza druhým z a-bodov U, V. Podľa Táletovej vety (vzhľadom ku e-kružnici q) je $\varepsilon(\sphericalangle AXB) = \frac{\pi}{2}$ a teda $X \in m$. Ak naopak $X \in m$, $A \not\equiv X \not\equiv B$, potom konštruujeme a-body U, V ako priesečníky $h^\star$ s e-priamkami v poradí AX, BX a l-priamku q z podmienky $q' = \{U, V\}$. Označme S' priesečník l-priamky q a $p \equiv AB$. Potom podľa príkladu 4. je $\lambda(AS') = \lambda(XS') = \lambda(BS')$. Pretože S' aj S sú l-stredy l-úsečky AB, je $S \equiv S'$ a teda $X \in k(S, r)$. Z dokázaných vzťahov $X \in k \Rightarrow X \in m$ a $X \in m \Rightarrow X \in k$ vyplýva $m \subset k$ a $k \subset m$, čiže $k \equiv m$. Tak sme ukázali, že každá l-kružnica je e-kružnicou.

Nech ďalej je m e-kružnica ležiaca celá v λ. Z predošlého vyplýva, že $m \equiv k(S, r)$, kde $k(S, r)$ je l-kružnica, pričom určenie l-objektov S, r je patrné z obrázku 30.

Poznámka 9. Vzhľadom na tvrdenie vety 9. nie je príliš nutné rozlišovať medzi pojmami l-kružnica a e-kružnica. Ak napíšeme len „kružnica k" (a z kontextu je zrejmé, že $k \subset \lambda$), potom je naša reč jasná. Ak však napíšeme „kružnica $k(S, r)$", potom vôbec nie je jasné, či S a r sú e-objekty, alebo l-objekty. e-Stred a l-stred tej istej „kružnice" sú vždy dva rôzne l-body.

Úloha 70. Udajte konštrukciu l-kružnice $k(S, r)$, ak poznáte: a) tri jej l-body, b) jeden jej l-bod, a jej l-stred S.

Úloha 71. Ukážte, že v l-rovine neplatí Talesova veta.

Úloha 72. Dokážte, že v l-rovine neplatí Pytagorova veta. Dôkaz preveďte pre l-trojuholník nakreslený na obrázku 32. Obrázok je e-súmerný podľa e-priamky CW, e-priamky AU, $h^\star$ sú e-kolmé a $\varepsilon(\sphericalangle UCV) = 90°$.

V l-rovine existujú dve súbežky vedené l-bodom ku danej l-priamke. Vzniká prirodzená otázka: aká je miera ich l- uhla, alebo presnejšie, na čom toto číslo závisí. Riešeniu tejto otázky venujeme úlohy 74., 75. a vetu 10., ktorá podáva vyčerpávajúcu odpoveď na položenú otázku.

Úloha 73. Nech A je l-bod ležiaci mimo l-priamky a, R päta l-kolmice r vedenej z A ku a, $U \in a'$. Číslo $d = \lambda(AR)$ vyjadrite pomocou čísla $\varphi = \lambda(\sphericalangle\, UAR)$ v prípade, že r je druhého druhu.

Úloha 74. Predošlú úlohu riešte v prípade, že r je prvého, ale a druhého druhu.

Úloha 75. Úlohu 73. riešte v prípade, že a aj r sú prvého druhu a l-priamka $p \equiv AU$ je druhého druhu.

Veta 10. Nech R je l-kolmý priemet l-bodu A na l-priamku a neprechádzajúcu l-bodom A. Nech $U \in a'$, potom pre čísla $d = \lambda\,(AR)$ a $\varphi = \lambda\,(\sphericalangle\, UAR)$ platí vzťah

$$d = log\, cotg\, \frac{\varphi}{2}. \tag{15}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že l-priamky a, $r \equiv AR$, $p \equiv AU$ sú prvého druhu, pričom U leží medzi $T \equiv S(a)$ a $P \equiv S(r)$. Z vety 7. je zrejmé, že uvedená voľba nie je na ujmu všeobecnosti. Označme ešte $Q \equiv S(p)$, $\varepsilon(\sphericalangle\, PAQ) = \alpha$, $\varepsilon(\sphericalangle\, RPA) = \beta$, $\varepsilon(\sphericalangle\, TPR) = \gamma$. Pomocou čísiel α, β, γ vyjadrime postupne skoro všetky e-miery e-uhlov z obrázku 35. Z $\varepsilon(PA) = \varepsilon(PR)$ vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle\, RAP) = \varepsilon(\sphericalangle\, ARP) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$; z $\varepsilon(\sphericalangle\, TRP) = \frac{\pi}{2}$ vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle\, RTU) = \frac{\pi}{2} - \gamma$ a odtiaľ zase $\varepsilon(\sphericalangle\, TRU) = \varepsilon(\sphericalangle\, TUR) = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$. Preto je $\varepsilon(\sphericalangle\, RUP) = \frac{3}{4}\pi - \frac{\gamma}{2}$ a $\varepsilon(\sphericalangle\, URP) = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$. Pretože je $\varepsilon(\sphericalangle\, APQ) = \pi -$

$-(\beta+\gamma)$, je $\varepsilon(\sphericalangle PQA) = \beta + \gamma - \alpha$ a teda $\varepsilon(\sphericalangle UAQ) = = \varepsilon(\sphericalangle AUQ) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}$. Konečne teda $\varepsilon(\sphericalangle UAP) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ a $\varepsilon(\sphericalangle RAU) = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Použijeme sinovú vetu na e-trojuholníky AUR a AUP a dostaneme

$$\frac{\sin\varepsilon(\sphericalangle URA)}{\varepsilon(AU)} = \frac{\sin\varepsilon(\sphericalangle RAU)}{\varepsilon(RU)}$$

a

$$\frac{\sin\varepsilon(\sphericalangle UPA)}{\varepsilon(AU)} = \frac{\sin\varepsilon(\sphericalangle UAP)}{\varepsilon(PU)}$$

odkiaľ

$$\varepsilon(RU)\frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} = \varepsilon(AU) =$$

$$= \varepsilon(PU)\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)}.$$

V e-trojuholníku RUP podľa sinovej vety platí

$$\frac{\varepsilon(RU)}{\sin\gamma} = \frac{\varepsilon(PU)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)},$$

čo po porovnaní horných vzťahov dá reláciu medzi α, β, γ:

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\gamma}.$$

Pri označení $\alpha = 2\sigma$, $\beta + \gamma = 2\varrho$, $\gamma = 2\psi$ môžeme horný vzťah upraviť takto (overte zmysel nasledujúcich zlomkov)

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varrho + \sin\varrho)}{\sin(\psi + \sigma)} = \frac{\sin 2\varrho}{\sin 2\psi} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\psi - \sin\psi)}{\cos(\varrho + \sigma)},$$

alebo

$$\frac{\cos\varrho\cos\sigma - \sin\varrho\sin\sigma}{\sin\psi\cos\sigma + \cos\psi\sin\sigma} =$$

$$= \frac{\sin\varrho\cos\varrho}{\sin\psi\cos\psi} \cdot \frac{\cos\psi - \sin\psi}{\cos\varrho + \sin\varrho},$$

alebo

$$\frac{1 - tg\,\varrho\, tg\,\sigma}{tg\,\psi + tg\,\sigma} = \frac{tg\,\varrho}{tg\,\psi} \cdot \frac{1 - tg\,\psi}{1 + tg\,\varrho},$$

odkiaľ

$$tg\,\sigma = \frac{tg\,\psi}{tg\,\varrho}.$$

Je teda

$$d = \log \frac{tg\,\frac{\beta + \gamma}{2}}{tg\,\frac{\gamma}{2}} = \log \frac{tg\,\varrho}{tg\,\psi} = \log cotg\,\sigma = \log cotg\,a.$$

Ak uvážime, že $\varphi = \lambda(\sphericalangle UAR) = \varepsilon(\sphericalangle PAQ) = a$, je (15) dokázané pre ten prípad, že a, r, p sú prvého druhu. Ostávajúce prípady sú dokázané v úlohách 73., 74., 75.

Definícia 17. Nech l-bod A neleží na l-priamke a, pre ktorú $a' = \{U, V\}$. Potom l-mieru l-uhla UAV, tj. číslo $\lambda\,(\sphericalangle\, UAV)$ menujeme *veľkosťou uhla* l-*rovnobežnosti* l-*bodu A a* l-*priamky a*. Stručne, ale nepresne sa hovorí o *uhle rovnobežnosti*.

Poznámka 10. Veta 10. hovorí, že „uhol rovnobežnosti závisí len od dĺžky $d = \lambda\,(AR)$ a to podľa (15)". Toto význačné tvrdenie nesie názov Lobačevského. Miesto $\lambda(AR)$ píše sa často, podľa Lobačevského $\Pi\,(A, R)$.