2. kapitola

HISTORICKÉ POZNÁMKY

Celá druhá kapitola môže byť pri čítaní vypustená. Máloktorá vedecká problematika má tak dramatickú a poučnú históriu, ako práve objav neeuklidovskej geometrie. Podľa toho, čo bolo povedané v článku 1. 4. budeme sledovať vývoj geometrie od obdobia II. Prvá veľká technická revolúcia tj. obdobie VI.—IV. tisícročia pr. n. l. dala spolu s mnohými inými poznatkami ľudstvu aj množstvo znalostí geometrických. V povodí troch veľkých riek Eufratu, Hindu a Nílu vznikli mnohé geometrické objavy vyvolané potrebami ovládať prírodu. Tieto poznatky netvoria ešte systém, sú len súhrnom pravidiel o meraní, zdeľovaných medzi generáciami často mystickým spôsobom. Obdobie III. tj. obdobie tvorenia abstraktnej teórie patrí helénskej kultúre. Od Tálesa Milétskeho (VI. stor. pr. n. l.) cez Pytagora až po Euklida (III. stor. pr. n. l.) urobila helénska geometria ohromný pokrok. Jej hlavná zásluha nespočíva v tom, že zhrnula a vylepšila všetky dovtedy známe fakty, ale predovšetkým v tom, že ich utriedila do systému, ktorého korunou sú Euklidove „Základy“. Sú spracované v 13. knihách. Spôsob, ktorým boli Základy napísané bol na vtedajšiu dobu vysoko pokrokový. Je to prvá učebnica vôbec, kde sa matéria vysvetľuje deduktívnym spôsobom od axiom. Je to prvý pokus o axiomatickú stavbu vedeckej disciplíny. Celé dve tisícročia stála táto kniha v strede záujmu matematikov a to nielen ako učebnica, ale aj ako živý stimulátor nových myšlienok. Z nej študovali takí matematici a fyzici, ako Koperník, Galilei, Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, Lobačevskij a iní. Na veľkosti tohto diela nič neuberá fakt, že bolo (z dnešného hľadiska) dosť nepresné a intuitívne. Princípy deduktívnej stavby axiomatizovanej teórie, tak ako sme ju poznali v kapitole I., sú do dnešnej doby platné a užívané v mnohých exaktných disciplínach.

Jedným z vážnych nedostatkov „Základov" je snaha definovať všetky pojmy včítane tých, ktoré sú pre danú teóriu základné. Tak napr. prvé dve definície z prvej knihy „Základov" sú:

1. Bod je to, čo nemá častí,
2. čiara je dĺžka bez šírky.

Dnes už vieme, že sa tu nejedná o definície, ale prinajlepšom o akési objasnenie. Vada „definícií" je v tom, že slová „časť, dĺžka, šírka" nie sú termíny. Nielen nedostatok základných pojmov je chybou „Základov". Aj axiomatický systém je nedokonalý, hlavne neúplný.

Euklides uvádza nasledujúcich päť axiomov (menuje ich postuláty):

1. Každý bod je možné spojiť s každým bodom priamkou.
2. Každú časť priamky je možné neobmedzene predĺžiť.
3. Z ľubovoľného stredu je možné opísať kružnicu ľubovoľného polomeru.
4. Všetky pravé uhly sú navzájom rovné.
5. Ak priamka, pretínajúca dve ďalšie priamky tvori s nimi po jednej strane vnútorné priľahlé uhly o súčte menšom ako $2R$, potom sa vždy obidve druhé priamky pretínajú na tejto strane.

(Pozri príklad 2. v článku 1.2.). Na základe týchto axiom nie je možné napr. dokázať, že kružnica pretína priamku idúcu jej vnútorným bodom. No Euklides takéto tvrdenie dokazuje, pričom v dôkaze použije tvrdenie známe dnes pod pojmom *axioma spojitosti*. Euklidov omyl spočíva v tom, že tvrdenie axiomy spojitosti považoval za samozrejmé.

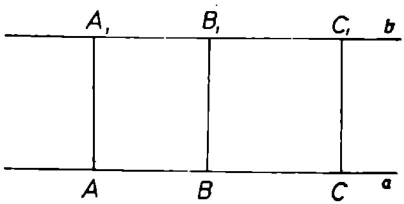
„Základy“ našli v ďalších dvoch tisícročiach mnoho komentátorov a opravovateľov. Ústredným bodom týchto snáh bolo: dokázať piatu euklidovu axiomu. Jej jasnejšia formulácia je: Bodom A neležiacom na priamke a možno viesť s ňou jedinú rovnobežku. (Pozri úlohu 8. čl. 1.3. výrok **V**.) Uvedená axioma pútala pozornosť hlavne tým, že sa pomerne komplikovanou formuláciou odlišovala od predošlých. Z množstva „dôkazov“ piatej axiomy uveďme aspoň niektorých autorov: Wallis, Bertrand, Cantor, Clavius, Legendre, Lambert a mnoho iných. Mnohé z týchto „dôkazov“ boli veľmi vtipné a často trvalo dosť dlho, pokiaľ sa v nich našla chyba. V podstate každý z autorov použil pri „dôkaze“ tvrdenie ekvivalentné s piatou euklidovou axiomou.*) Jedno zo základných tvrdení ekvivalentných s piatou euklidovou axiomou je: Súčet uhlov v trojuholníku je rovný π. Dokázať toto tvrdenie znamená dokázať piatu euklidovu axiomu. Pomerne rýchlo sa podarilo dokázať, že súčet uhlov v trojuholníku nemôže byť väčší, ako π. Odtiaľ okamžite vyplýva, že súčet uhlov v štvoruholníku nemôže byť väčší ako 2π. Tohoto faktu použili mnohí geometri, aby dokázali, že súčet uhlov v trojúholníku nemôže byť ani menší ako π, čo už implikuje piatu euklidovu axiomu. Kvôli ilustrácii uvedieme chybný dôkaz, ktorý podal Clavius. (Obr. 1.)

Nech A, B, C sú tri rôzne body priamky a a A_1, B_1, C_1 tri body ležiace v jednej polrovine vyťatej priamkou a tak, že $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AA_1 \perp a$, $BB_1 \perp a$, $CC_1 \perp a$. Nech b je priamka idúca bodmi A_1, B_1, C_1. Štvoruholník

---

*) Výroky A, B menujeme ekvivalentné, ak **A** $\Rightarrow$ **B** a **B** $\Rightarrow$ **A**. (Pozri dodatok A.)

ABB_1A_1 (tzv. Saccheriho štvoruholník) má os súmernosti prechádzajúcu stredom úsečky AB (bude dokázané v ďalšom texte). Platí teda $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle BB_1A_1$. Podobne $\sphericalangle BB_1C_1 = \sphericalangle CC_1B_1$. Je teda súčet uhlov v štvoruhol-

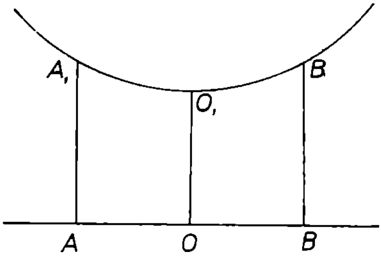


Obr. 1

níku ACC_1A_1 rovný 2π, lebo $\sphericalangle A_1AC + \sphericalangle ACC_1 + \sphericalangle CC_1A_1 + \sphericalangle C_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \sphericalangle C_1B_1B + \sphericalangle A_1B_1B = 2\pi$.

Claviusov omyl je v tom, že predpokladal za samozrejmé existenciu priamky b. Fakt, že body A_1, B_1, C_1 ležia na priamke je ekvivalentný s piatou euklidovou axiomou.

Prvý veľký krok ku riešeniu problému podal taliansky jezuita Saccheri, keď v snahe o vyvrátenie hypotézy ostrého uhla (tj. že súčet úhlov v trojuholníku je menší ako π) vybudoval dosť obsiahlu teóriu založenú na nasledovnej myšlienke. Uvažujeme štvoruholník ABB_1A_1 (obr. 2.), pričom $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle ABB_1 = \frac{\pi}{2}$ a $AA_1 = BB_1$. Nech O je stred úsečky AB a nech o je priamka idúca bodom O, $o \perp AB$. Označme $O_1 \equiv o \cap A_1B_1$. Útvary OAA_1O_1 a OBB_1O_1 sú symetrické podľa o, teda $\sphericalangle AA_1O_1 = \sphericalangle BB_1O_1$. Z horného predpokladu vyplýva ostrosť uhlov $\sphericalangle AA_1B_1$, $\sphericalangle BB_1A_1$ a po dosť dlhých úvahách dochádza autor k „absurdným“ tvrdeniam napr. dve nepretínajúce sa priamky ležiace v rovine, alebo majú jedinú spoločnú kolmicu od ktorej na obidve strany sa neobmedzene



Obr. 2

rozchádzajú, alebo nemajú spoločnú kolmicu a v jednom smere sa asymptoticky približujú. Geometrická stavba vybudovaná na uvedenej hypotéze Saccherim je presná, až na konečný výsledok, ktorému pravdepodobne ani sám neveril. Tvrdí: asymptoticky približujúce sa priamky majú v nevlastnom bode spoločnú kolmicu, teda hypotéza ostrého uhla je nesprávna a tým je piaty euklidov postulát dokázaný.

Úvahy Lamberta publikované pod názvom „Teória rovnobežných priamok“ v r. 1766 sú veľmi blízke úvahám Saccheriho, no na rozdiel od neho pri svojich úvahách v súvislosti s hypotézou ostrého uhla nedochádza k „protirečeniu“ a nikde vo svojich prácach netvrdí, že „dokázal“ piaty euklidov postulát. Jeho práce majú nesmiernu zásluhu na konečnom vyriešení pochybnosti o piatom euklidovom postuláte.

Legendre, ktorý sa mimoriadne zaslúžil o rozvoj mechaniky má tiež veľký podiel pri výskume geometrie. Dlhý čas sa venoval piatemu euklidovmu postulátu a publikoval niekoľko variantov jeho „dôkazu“.

Márne pokusy riešiť problém rovnobežiek siahajú až na prelom 18. a 19. storočia. Úpenlivosť snahy špičkových svetových matematikov krásne dokumentuje list maďarského matematika prof. Bolyaia svojmu synovi. Keď sa prof. Bolyai dozvedel, že jeho syn, mladý talentovaný matematik sa venuje problému rovnobežiek, až zúfalo ho vystríhal, aby zanechal túto myšlienku na ktorej on „bezvýsledne“ strávil veľkú časť svojho života. Syn neposlúchol otcovej rady a vďaka tomu stal sa jedným z troch objaviteľov neeuklidovskej geometrie. Neriedko je problém, ktorý po mnoho rokov odoláva úsiliu vedcov celého sveta, riešený súčasne viacerými vedcami. Tak aj dramatický súboj geometrov s rovnobežkami je riešený nezávisle troma matematikmi: nemcom Gaussom, rusom Lobačevským a maďarom Bolyaiom.

Gauss problém piateho postulátu vyriešil už koncom 18. storočia, no do konca svojho života riešenie nepublikoval. Riešenie sa neodvážil zverejniť a zdelil ho len súkromne v listoch priateľom.

Lobačevskij začal výskum teórie rovnobežných priamok s pokusmi dokázať piaty euklidov postulát v r. 1817 no už v roku 1826 dáva k dispozícii verejnosti svoju prácu o neeuklidovskej geometrii. Publikoval ju pod názvom „O základoch geometrie“ v r. 1829. Lobačevskij bol astronóm a preto je pochopiteľné, že sa snažil overiť, či v *reálnom svete*, v svete v ktorom žijeme, platí geometria euklidovská, alebo neeuklidovská. Meral súčet uhlov v trojuholníku, ktorého vrcholy tvorili nebeské telesá (napr. Zem, Slnko, Sírius). Akokoľvek presné boli jeho merania bola odchylka (defekt) súčtu uhlov v meranom trojuholníku od π menšia, ako tolerancia prístrojov. Pre myšlienky, ich aplikácie a popularizovanie, ktoré Lobačevskij odvážne konal menujeme neeuklidovskú geometriu niekedy tiež jeho menom.

Aké je teda riešenie problému rovnobežiek. Existujú dve abstraktné teórie postavené na tých istých základných pojmoch a axiomach, pričom v jednej z nich (označíme ju $\mathfrak{E}$) platí axioma **E**, zatiaľ čo v druhej (označíme ju $\mathfrak{L}$) platí axioma **L** (pozri článok 3.1.). Axiomatizovaná teória opierajúca sa o axiomy nehovoriace nič o rovnobežkách sa menuje absolutnou geometriou. Vzhľadom na to čo bolo povedané v článku 1.5. sú teda teórie $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{L}$ príbuzné. Pri axiomatickom štúdiu elementárnej geometrie postupujeme teda nasledovne: Vybudujeme geometriu absolutnú (v nej platí napr. tvrdenie: súčet uhlov v trojuholníku nie je väčší ako π) a až potom budujeme teóriu $\mathfrak{L}$, alebo $\mathfrak{E}$. Ostáva dodať, že definitívnu stavbu elementárnej geometrie s precíznou sústavou axiom podal nemecký matematik Hilbert a že dnes je táto disciplina uzavretá. To však neznamená, že geometria je mŕtva disciplina. Práve naopak, vďaka Kleinovi, Cartanovi a mnohým ďalším matematikom sa geometria vyvinula dnes do takého štádia, že, zdá sa, znovu nadobúda to vedúce postavenie v celej matematike, ktoré jej dal Euklides v „Základoch“. Uveďme mená aspoň dvoch vynikajúcich českých geometrov, ktorí podstatne obohatili naše geometrické poznatky. Sú to Eduard Čech a Václav Hlavatý.

My sa však v ďalšom texte vrátime do začiatku XIX. storočia a pokúsime sa čitateľa oboznámiť hlbšie s myšlienkami neeuklidovskej geometrie.