Oddělitelnost množin

I. Přípravné úvahy

In: Jaroslav Morávek (author); Milan Vlach (author): Oddělitelnost množin. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1969. pp. 5–22.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403678

Terms of use:

© Jaroslav Morávek, 1969

© Milan Vlach, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

1. kapitola

PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY

I.1. Lineární nerovnosti

Nejprve si připomeneme několik známých pojmů a postupů. Řešme například tuto soustavu čtyř nerovností o dvou neznámých x, y:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tj. hledejme takovou uspořádanou dvojici čísel x, y, po jejichž dosazení do (1) za neznámé x, y dostaneme platnou soustavu nerovností. Poslední dvě nerovnosti soustavy (1) nám říkají, že čísla x, y mají být nezáporná; proto zpravidla místo o řešení soustavy (1) hovoříme o nezáporném řešení soustavy (2):

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4. \end{aligned} \tag{2}$$

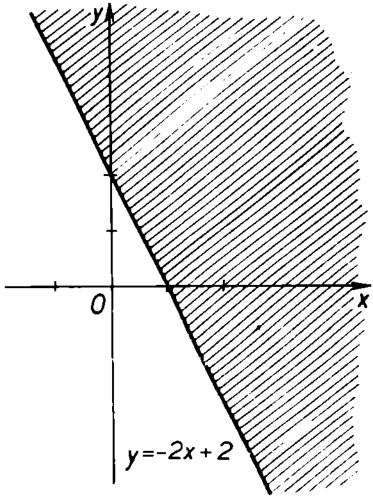
Množinu všech nezáporných řešení soustavy (2) můžeme geometricky znázornit v rovině způsobem, který je běžně znám ze střední školy.

Jsou-li x, y souřadnice bodu v rovině (v pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic), pak všechny body (x, y), jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$-2x - y \leqq -2, \tag{3}$$

leží na jedné straně od přímky, jejíž rovnice je

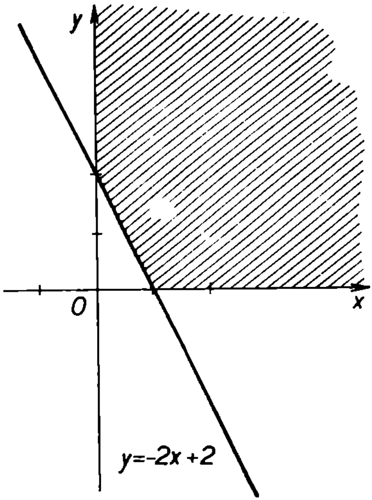
$$y = -2x + 2. \tag{4}$$



Obr. 1.

Snadno také zjistíme, na které straně; stačí dosadit do (3) souřadnice libovolného bodu roviny, neležícího na přímce (4), např. souřadnice počátku soustavy souřadnic, tj. $x = 0, y = 0$. Odtud vidíme, že první nerovnosti soustavy (2) vyhovují všechny body ležící na přímce (4) a všechny body ležící na opačné straně od přímky (4), než leží počátek soustavy souřadnic.

Množinu všech řešení první nerovnosti soustavy (2) lze tedy znázornit šrafovanou polorovinou (obr. 1). Nezáporná řešení pak budou znázorněna tou částí této poloroviny, která leží v prvním kvadrantu (obr. 2).

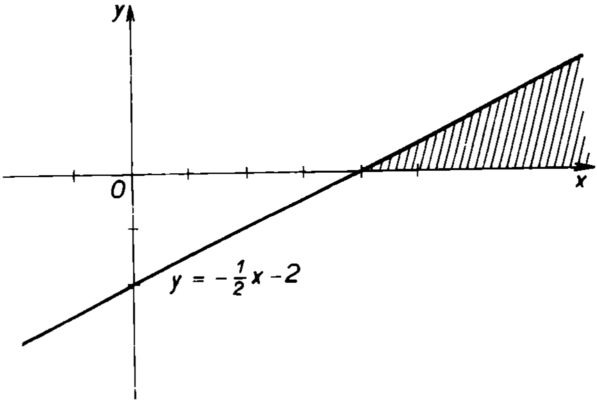


Obr. 2.

Stejným způsobem zjistíme, že body, znázorňující nezáporná řešení druhé nerovnosti soustavy (2), leží na opačné straně od přímky

$$y = \frac{1}{2} x - 2,$$

než leží počátek soustavy souřadnic, nebo na ní (obr. 3). Nezáporná řešení soustavy (2) jsou pak znázorněna body, které znázorňují zároveň nezáporná řešení první nerovnosti i druhé nerovnosti soustavy (2) (tj. body šrafované plochy na obr. 3). Z obr. 3 je patrné, že množina bodů znázorňujících nezáporná řešení soustavy (2) není omezená[1]).



Obr. 3.

Přidáme-li k soustavě (2) nerovnost

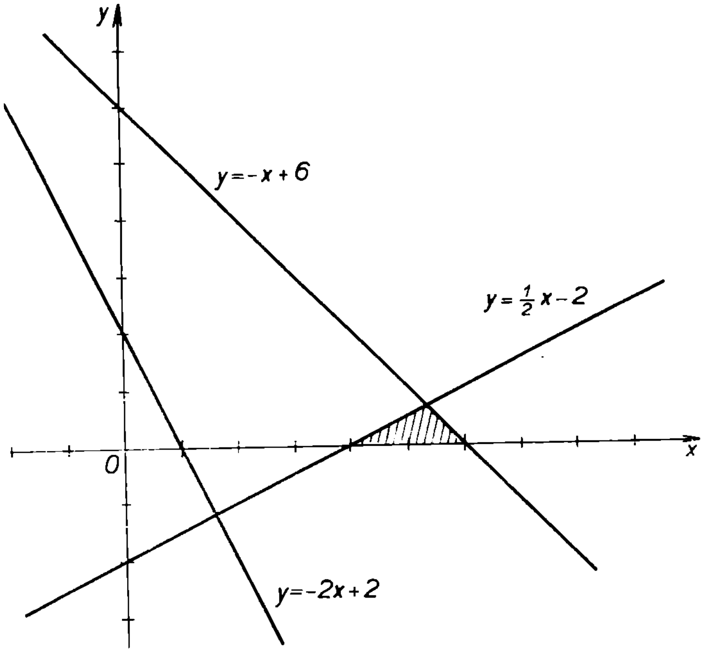
$$-x - y \leqq -6,$$

bude množina znázorňující množinu všech nezáporných řešení této nové soustavy omezená (viz šrafovaná plocha na obr. 4).

[1]) Množinu A bodů roviny nazýváme omezenou, jestliže existují taková čísla a, b, že pro každý bod množiny A o souřadnicích (x, y) platí $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$.

Přidáme-li ještě nerovnost

$$x - 8y \leqq 0,$$



Obr. 4.

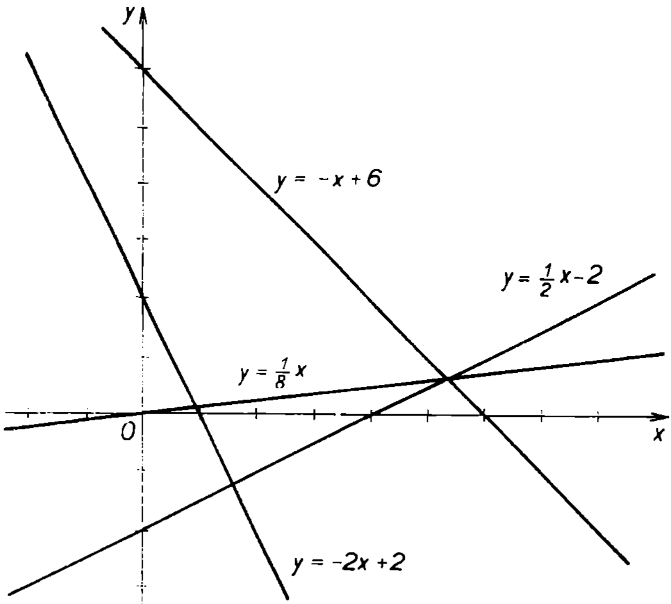
bude mít vzniklá soustava pouze jediné řešení, znázorněné bodem o souřadnicích $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (viz obr. 5).

Přidáme-li nakonec ještě nerovnost

$$2x - y \leqq -2,$$

dostaneme soustavu, která nemá nezáporné řešení.

Zjistili jsme tedy na příkladech, že soustava lineárních nerovností o dvou neznámých (tj. nerovností, které mají



Obr. 5.

tvar $ax + by \leqq c$) nemusí mít žádné nezáporné řešení nebo může mít jediné nezáporné řešení, nebo může mít nekonečně mnoho nezáporných řešení; v posledním případě může být množina bodů roviny znázorňujících tato řešení buď omezená, nebo neomezená.

O tom, že poslední z uvedených soustav, tj. soustava

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ -x - y &\leqq -6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 2x - y &\leqq -2, \end{aligned} \tag{5}$$

nemá nezáporné řešení, jsme se mohli velmi snadno přesvědčit takto: Vynásobíme-li druhou nerovnost třiceti a poslední nerovnost dvaceti, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -30x + 60y &\leqq -120, \\ -x - y &\leqq -6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 40x - 20y &\leqq -40. \end{aligned} \tag{6}$$

Soustavy (5) a (6) mají zřejmě stejnou množinu nezáporných řešení. Avšak soustava (6) nemá nezáporné řešení, neboť kdyby ho měla, bylo by toto řešení i nezáporným řešením nerovnosti

$$8x + 30y \leqq -168, \tag{7}$$

která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (6). Nerovnost (7) však zřejmě nemá nezáporné řešení.

Podobného postupu můžeme užít i v případě soustav o jiném počtu rovnic a neznámých. Vyšetřujme např. tuto soustavu čtyř nerovností o třech neznámých x, y, z.

$$\begin{aligned} 5x - y - z &\leqq 1, \\ -10x + 10y - z &\leqq -3, \\ -2x - y + 10z &\leqq -4, \\ 7x + y + 5z &\leqq 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Vynásobíme-li první a poslední nerovnost číslem 2, dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
10x - 2y - 2z &\leqq 2,\\
-10x + 10y - z &\leqq -3,\\
-2x - y + 10z &\leqq -4,\\
14x + 2y + 10z &\leqq 4.
\end{aligned}
$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme nerovnost

$$12x + 9y + 17z \leqq -1,$$

která zřejmě nemá nezáporné řešení, a tedy ani původní soustava (8) nemá nezáporné řešení.

Pozorný čtenář si ještě všiml, že uvedený postup je speciálním případem obecnějšího postupu. Dříve než tento postup vyložíme pro případ obecné soustavy čtyř tzv. lineárních nerovností o třech neznámých, zavedeme si nové označení, které se nám později v mnohém vyplatí.

Místo abychom označili neznámé písmeny x, y, z, označíme je po řadě symboly x_1, x_2, x_3; pro koeficient, jímž je v první nerovnosti násobena první resp. druhá resp. třetí neznámá, užijeme symbolu se dvěma indexy, např. a_{11}, resp. a_{12} resp. a_{13}; podobně symboly a_{21}, a_{22}, a_{23} budou po řadě označovat koeficienty u neznámých x_1, x_2, x_3 ve druhé nerovnosti; je již zřejmé, jak budou označeny koeficienty v ostatních nerovnostech. Pravou stranu první nerovnosti označíme b_1, druhé nerovnosti b_2, třetí a čtvrté nerovnosti b_3 a b_4.

Na základě této dohody můžeme obecnou soustavu čtyř lineárních nerovností o třech neznámých x_1, x_2, x_3 zapsat takto:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leqq b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leqq b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leqq b_3,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 &\leqq b_4.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Položíme-li např. $a_{11} = 5$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $b_1 = 1$, dostaneme první nerovnost soustavy (8).

Výše popsaný postup, kterým jsme se přesvědčili, že soustava (8) nemá nezáporné řešení, je obsažen v důkazu tohoto tvrzení:

Věta A. *Existují-li čtyři nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 tak, že platí nerovnosti*

$$
\begin{aligned}
y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} + y_4 a_{41} &\geqq 0,\\
y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} + y_4 a_{42} &\geqq 0,\\
y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} + y_4 a_{43} &\geqq 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

a že zároveň platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4 < 0, \tag{11}$$

pak soustava (9) *nemá nezáporné řešení.*

Důkaz. Kdyby soustava (9) měla nezáporné řešení a kdyby existovala nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 s vlastnostmi uvedenými v předpokladech věty A, bylo by (protože čísla y_1, y_2, y_3, y_4 jsou nezáporná) toto řešení také řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) &\leqq y_1 b_1,\\
y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) &\leqq y_2 b_2,\\
y_3 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) &\leqq y_3 b_3,\\
y_4 (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3) &\leqq y_4 b_4,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

a také nezáporným řešením nerovnosti, která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (12). Avšak po snadných úpravách (po provedení naznačeného násobení čísly y_1, y_2, y_3, y_4 a po vytknutí neznámých x_1, x_2, x_3) zjistíme, že tato nerovnost má tvar

$$
\begin{aligned}
&(y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} + y_4 a_{41})\, x_1 + \\
+ &(y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} + y_4 a_{42})\, x_2 + \\
+ &(y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} + y_4 a_{43})\, x_3 \leqq \\
\leqq &\ y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 + y_4 b_4,
\end{aligned}
$$

ze kterého je patrné, že nemůže mít nezáporné řešení, neboť podle předpokladu jsou koeficienty u neznámých nezáporná čísla, kdežto pravá strana nerovnosti je záporná.

Větu A lze vyslovit v této logicky ekvivalentní formě:

Věta B. *Má-li soustava* (9) *nezáporné řešení, pak platí toto: Jsou-li* y_1, y_2, y_3, y_4 *taková nezáporná čísla, že platí nerovnosti* (10), *pak také platí nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 \geqq 0.$$

Čtenář si pravděpodobně položí otázku, zda větu A (nebo jí ekvivalentní větu B) lze obrátit. Jak vyplyne z dalšího výkladu, odpověď na tuto otázku je kladná.

1.2. Oddělitelnost množin

Již v předmluvě jsme se zmínili o důležitosti věty o oddělitenosti konvexních mnohostěnů. Myšlenku této věty vyložíme nejdříve v rovině.

Mějme přímku p v rovině ϱ. O přímce p budeme říkat, že **odděluje** navzájem množiny M_1 a M_2 bodů roviny ϱ, jestliže množina M_1 leží v opačné otevřené polorovině, určené přímkou p, než leží množina M_2. O dvou množinách M_1, M_2 bodů roviny ϱ budeme říkat, že jsou navzájem **oddělitelné**, jestliže existuje přímka oddělující množiny M_1 a M_2.

Je zřejmé, že jsou-li množiny M_1 a M_2 oddělitelné, pak množiny M_1 a M_2 nemají společné body, čili, jak často říkáme, jsou disjunktní. Kdyby totiž bod X patřil do množiny M_1 i do množiny M_2, pak pro bod P neležící na přímce p, která odděluje množiny M_1 a M_2, by úsečka XP zároveň měla i neměla společný bod s přímkou p.

Dá se snadno ukázat, že obrácené tvrzení neplatí. Vezmeme-li za M_1 všechny body určité kružnice k a za M_2 množinu ležící uvnitř kruhu určeného kružnicí k, dostaneme množiny M_1, M_2, nemající společný bod. Avšak množiny M_1, M_2 nejsou oddělitelné, neboť pro každou přímku p nastává právě jeden z těchto dvou případů:

1. přímka p nemá s kružnicí k žádný společný bod; v takovém případě leží množiny M_1, M_2 ve stejné polorovině určené přímkou p, a nejsou tedy přímkou p odděleny;

2. přímka p má s kružnicí k společný alespoň jeden bod; v takovém případě množina M_1 neleží (celá) ani v jedné z (otevřených) polorovin určených přímkou p, a nemůže tedy ležet ani v polorovině opačné k polorovině určené přímkou p, ve které leží (leží-li tam vůbec) množina M_2.

Hlavní myšlenka věty o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků spočívá v tom, že v případě konvexních mnohoúhelníků lze výše uvedené tvrzení obrátit, tj. že každé dva konvexní mnohoúhelníky K_1, K_2 roviny ϱ, které nemají žádný bod společný, lze oddělit. Větu o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků lze tedy vyslovit takto:

Věta C. *Dva konvexní mnohoúhelníky roviny ϱ jsou oddělitelné právě tehdy, jsou-li disjunktní.*

Jak jsme se již zmínili, obecnou větu o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů nebudeme dokazovat; přesto však v tomto speciálním případě uvedeme úvahy naznačující jednu z možných cest vedoucích k důkazu.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, stačí dokázat, že jsou-li K_1, K_2 dva disjunktní konvexní mnohoúhelníky, jsou mnohoúhelníky K_1, K_2 oddělitelné.

Nejprve dokážeme, že existuje dvojice bodů X_0, Y_0 taková, že

1. $X_0 \in K_1$, 2. $Y_0 \in K_2$ a 3. $\overline{X_0Y_0} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in K_1$ a $Y \in K_2$. Popíšeme konstrukci bodů X_0 a Y_0. Při této konstrukci budeme potřebovat následující jednoduché lemma.

Lemma. *Nechť AB a CD jsou dvě libovolné úsečky ležící v rovině. Potom existují dva body X′ a Y′ tak, že*

1. $X' \in AB$, 2. $Y' \in CD$ a 3. $\overline{X'Y'} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in AB$ a $Y \in CD$.

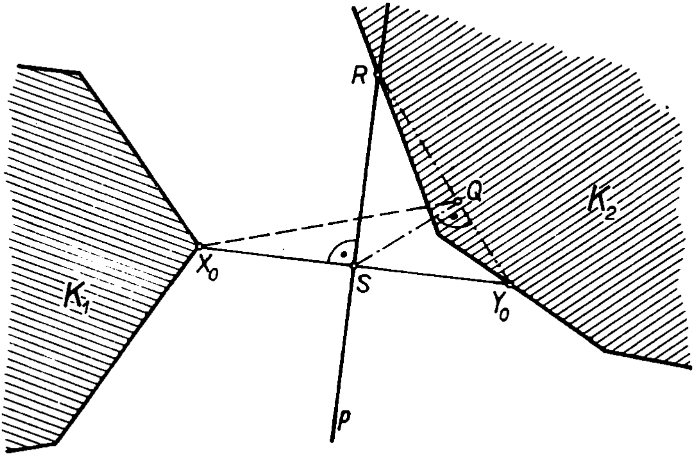
Důkaz lemmatu lze provést snadno rozebráním jednotlivých typických případů vzájemné polohy úseček a přenecháváme jej čtenáři.

Vraťme se nyní k důkazu věty. Nechť obvod mnohoúhelníka K_1 sestává z úseček $u_1, u_2, \ldots, u_r$ ($r \leqq 3$) a obvod mnohoúhelníka K_2 z úseček $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ($s \geqq 3$). Uvažujme nyní všechny možné dvojice úseček u_i a v_j, kde $i = 1, 2, \ldots, r$ a $j = 1, 2, \ldots, s$. Na základě lemmatu existuje ke každé dvojici u_i, v_j dvojice bodů $X(i, j)$ a $Y(i, j)$ tak, že $X(i, j) \in u_i$, $Y(i, j) \in v_j$ a $\overline{X(i,j)\ Y(i,j)} \leqq \overline{XY}$ pro všechny dvojice X a Y takové, že $X \in u_i$ a $Y \in v_j$. Budiž nyní M množina čísel $d_{ij} = \overline{X(i,j)\,Y(i,j)}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$). Protože M je konečná, existuje dvojice indexů i^*, j^*, pro kterou je číslo $d_{i^*j^*}$ minimální, tj. platí

$$d_{i^* j^*} = \overline{X(i^*, j^*)\,Y(i^*, j^*)} \leqq d_{ij} = \overline{X(i,j)\,Y(i,j)}.$$

(Pokud existuje takových dvojic více než jedna, vybereme některou z nich.) Čtenář snadno sám dokáže, že body $X_0 = X(i^*, j^*)$ a $Y_0 = Y(i^*, j^*)$ jsou body s nejkratší vzdáleností.

K zakončení důkazu zbývá sestrojit přímku p oddělující K_1 od K_2. Protože mnohoúhelníky K_1 a K_2 nemají společné body, je bod X_0 různý od bodu Y_0; je tedy možné vést středem úsečky X_0Y_0 přímku p kolmou k této úsečce. Ukážeme, že kolmice p odděluje mnohoúhelníky K_1, K_2:



Obr. 6.

Kdyby přímka p mnohoúhelníky K_1, K_2 neoddělovala, existoval by bod R, ležící na přímce p a zároveň náležející jednomu z mnohoúhelníků K_1, K_2. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod R náleží mnohoúhelníku K_2 (viz obr. 6). Označíme-li Q patu výšky SQ v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle\, Y_0RS$ ($\sphericalangle S = 90°$), pak (protože body Y_0, R náleží konvexnímu mnohoúhelníku K_2) bod Q náleží mnohoúhelníku K_2. Avšak

$$\overline{X_0Q} < \overline{X_0Y_0},$$

neboť

$$\overline{X_0Q} < \overline{X_0S} + \overline{SQ} < \overline{X_0S} + \overline{SY_0} = \overline{X_0Y_0}.$$

To je však ve sporu s vlastností dvojice bodů X_0, Y_0.

1.3. Pojem n-rozměrného prostoru

Víme, že polohu bodu na přímce můžeme určit jedním číslem, polohu bodu v rovině uspořádanou dvojicí a polohu bodu v prostoru uspořádanou trojicí čísel. Vyjdeme-li z této skutečnosti, můžeme dospět k této definici n- rozměrného prostoru:

Množinu všech uspořádaných n-tic $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme **n-rozměrným prostorem** a označíme symbolem R^n.

Přitom dvě uspořádané n-tice $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ považujeme za stejné (sobě rovné), platí-li $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Prvky množiny R^n budeme nazývat **body** prostoru R^n; čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budeme nazývat **souřadnicemi** bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V případě, že $n = 1, 2, 3$, budeme užívat známého geometrického znázornění prostoru R^n pomocí pevně zvolené pravoúhlé soustavy souřadnic. Na tomto místě chceme čtenáře upozornit na to, že v definicích pojmů, formulacích vět a při provádění důkazů budeme užívat výhradně analytických (volněji řečeno početních) metod, které budou vycházet doslovně z definice prostoru R^n jakožto množiny všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Kdybychom však důsledně odmítli užívat geometrických představ, zbavili bychom výklad veškeré geometrické názornosti a připravili bychom se o možnost porovnávat smysl definic, tvrzení a základních myšlenek důkazů se zkušeností, kterou jsme získali při každodenním vnímání prostorových vlastností světa, v němž žijeme. Z těchto důvodů budeme užívat „geometrické“ terminologie, která umožňuje dávat jednotlivým definicím, větám a myšlenkovým postupům názorný geometrický smysl. Používání geometrických představ někdy umožní i „uhodnout předem“ přesné nebo alespoň „přibližné“ znění věty, popřípadě postup důkazu. Proto v poslední části tohoto odstavce zavedeme geometrické názvy pro podmnožiny prostoru R^n, se kterými se v dalším výkladu budeme setkávat.

Jsou-li a_1, b daná čísla, přičemž $a_1 \neq 0$, pak množinu prvků prostoru R^1, jejichž souřadnice x_1 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 = b,$$

lze znázornit bodem; je to prostě jednobodová množina.

Jsou-li a_1, a_2, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^2, jejichž souřadnice x_1, x_2 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b,$$

lze znázornit přímkou.

Jsou-li a_1, a_2, a_3, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2, a_3 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^3, jejichž souřadnice x_1, x_2, x_3 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b,$$

lze znázornit rovinou.

Bude užitečné zavést pro podobné množiny (čtenář již tuší jaké) v prostorech R^n speciální název. Dospíváme tak k této definici:

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly. Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují rovnici

$$a_1, x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{13}$$

nazveme **nadrovinou** v prostoru R^n. Rovnici (13) nazýváme rovnicí této nadroviny.

Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leqq b, \tag{14}$$

nazveme **uzavřeným poloprostorem** v prostoru R^n určeným nerovností (14). Množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geqq b, \tag{15}$$

nazveme rovněž uzavřeným poloprostorem, a to uzavřeným poloprostorem určeným nerovností (15).

Uzavřené poloprostory určené nerovnostmi (14), (15) nazýváme také (navzájem) **opačnými uzavřenými poloprostory** určenými nadrovinou o rovnici (13).

Otevřenými (navzájem **opačnými**) poloprostory určenými nadrovinou o rovnici (13) nazýváme množiny bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n < b$$

resp.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n > b.$$

Jsou-li $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ body prostoru R^n, pak **úsečkou** spojující body Y, Z nazýváme množinu těch bodů $X = (x_1 x_2, \ldots, x_n)$, pro jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + (1-\lambda)\, z_1, \\ x_2 &= \lambda y_2 + (1-\lambda)\, z_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \lambda y_n + (1-\lambda)\, z_n, \end{aligned}$$

kde λ může být libovolné číslo, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

O množině bodů prostoru R^n říkáme, že je **konvexní**,[1]) jestliže pro libovolné dva její body do ní patří i celá úsečka tyto body spojující.

Cvičení

1. Dokažte, že má-li soustava lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

nezáporné řešení, pak pro každé řešení (y_1, y_2, y_3) (nikoli jen nezáporné!) soustavy lineárních nerovností

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} &\geqq 0, \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} &\geqq 0, \\ y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} &\geqq 0 \end{aligned}$$

platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 \geqq 0.$$

2. Uzavřeným kruhem se středem S a poloměrem r ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí nerovnost $\overline{SX} \leqq r$; otevřeným kruhem se středem S a poloměrem r ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí $\overline{SX} < r$. Dokažte, že

---

[1]) Na rozdíl od knížek [2] a [3] počítáme prázdnou množinu mezi množiny konvexní.

a) jsou-li K_1 a K_2 uzavřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body;

b) jsou-li K_1 a K_2 otevřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body.

Obdobné tvrzení však neplatí, je-li jeden z kruhů K_1, K_2 otevřený a druhý uzavřený.

3. Nechť bod M neleží na přímce p. Které přímky oddělují bod M a přímku p?

4. Ukažte, že může existovat více dvojic s vlastností dvojice (X_0, Y_0) z důkazu tvrzení 3. V takovém případě však existuje takových bodů nekonečně mnoho.

5. Znázorněte v rovině množiny těch bodů $X = (x_1, x_2)$ a prostoru R^2, pro jejichž souřadnice platí:

(a) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $x_2 \geqq x_1^2$,

(b) $x_1 \leqq 1$ a zároveň $x_1^2 + x_2^2 > 1$,

(c) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $|x_1| + |x_2| \geqq 1$.