Goniometrické funkce

4. kapitola. Příklady goniometrických nerovností

In: Stanislav Šmakal (author); Bruno Budinský (author): Goniometrické funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1968. pp. 109–133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403645

Terms of use:

© Stanislav Šmakal, 1968

© Bruno Budinský, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4. kapitola

PŘÍKLADY GONIOMETRICKÝCH NEROVNOSTÍ

4.1. Nerovnosti o jedné neznámé. Často se při rozboru goniometrických výrazů nevyhneme nerovnostem. Máme-li kupř. stanovit, jakých hodnot nabývá funkce

$$y = \sin x + \cos x\,,$$

potom hrubý odhad dává jistě nerovnošt

$$-2 \leqq \sin x + \cos x \leqq 2\,,$$

která plyne ze vztahů $|\sin x| \leqq 1$, $|\cos x| \leqq 1$. Hodnot 2 a -2 však funkce nenabývá, neboť rovnice

$$\sin x + \cos x = \pm 2$$

nemají řešení, jelikož není splněna podmínka

$$c^2 < a^2 + b^2$$

(srovnejte s odstavcem 2.5).

Převod na identitu

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

která platí pro každé x (př. 2.13), nám umožní přesné stanovení množiny funkčních hodnot. Z nerovnosti

$$-1 \leqq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

plyne nerovnost

$$-\sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}\,,$$

neboli

$$|\sin x + \cos x| \leqq \sqrt{2}\,.$$

Jelikož funkce $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tvoří množinu funkčních hodnot dané funkce interval $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}.\rangle$ Odpověď na otázku, kdy daná funkce nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty, patří již do oblasti goniometrických rovnic.

V této kapitole si ukážeme řešení nerovností s goniometrickými funkcemi na některých zajímavějších příkladech. V odstavci, který probíráme, zaměříme svou pozornost na ty nerovnosti, které obsahují pouze jednu neznámou.

Příklad 4.1. Dokažme, že pro každé $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, platí nerovnost

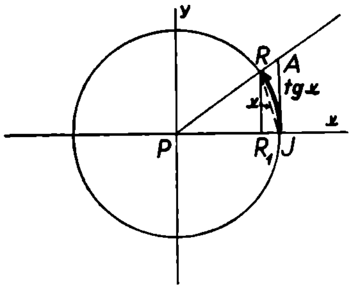
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,.$$

Důkaz. Vyřešíme nejprve danou nerovnost pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Označme (obr. 26) obsah trojúhelníka PJR, výseče PJR a trojúhelníka PJA po řadě p_1, p_2, p_3 a vypočítejme čísla p_1, p_2, p_3, pro která zřejmě platí nerovnosti

$$p_1 < p_2 < p_3\,. \tag{4,1}$$

Obsah trojúhelníka je roven polovičnímu součinu dvou stran násobenému sinem úhlu, který tyto dvě strany svírají. Proto $p_1 = \frac{1}{2} \sin x$ (neboť $PJ = PR = 1$).

Podle vzorce pro obsah kruhové výseče $p = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc} \alpha$ (v našem případě $\operatorname{arc} \alpha = x$, $r = 1$) máme $p_2 = \frac{x}{2}$.



Obr. 26. K důkazu nerovnosti $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Pro obsah pravoúhlého trojúhelníka PJA dostaneme přímo $p_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Dosadíme-li do nerovnosti (4,1), dostaneme

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x . \tag{4,2}$$

Násobíme-li nerovnost $\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2}$ kladným číslem $\frac{2}{x}$, plyne odtud

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \,. \tag{4,3}$$

Podobně z nerovnosti $\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ obdržíme násobením kladným číslem $\frac{2\cos x}{x}$ vztah

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} \,. \tag{4,4}$$

Nerovnosti (4,3) a (4,4) dávají pro $x > 0$ žádaný výsledek

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \,. \tag{4,5}$$

Zbývá dokázat, že nerovnost platí také pro

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

To je však snadné. Jestliže totiž $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ potom $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a pro taková čísla je daná nerovnost dokázána. Proto

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \,,$$

odkud podle vzorců (1,24a) dostaneme opět požadovanou nerovnost, platnou pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Příklad 4.2. Máme určit, pro která x platí nerovnost

$$\sin x \leqq \cos x\,.$$

Řešení. Nerovnost upravíme nejprve na ekvivalentní známým způsobem:

$$\sin x - \cos x \leqq 0\,,$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leqq 0\,,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0\,.$$

Funkce $\sin z$ nabývá hodnoty 0 a záporných hodnot v intervalech $\langle -\pi + 2k\pi,\ 2k\pi\rangle$, což můžeme zapsat pomocí nerovnosti

$$-\pi + 2k\pi \leqq z \leqq 2k\pi\,.$$

Dosadíme-li $z = x - \dfrac{\pi}{4}$ a upravíme, dostaneme podmínku

$$-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + 2k\pi\,.$$

Daná nerovnost je tedy splněna pro všechna x z intervalů $\left\langle -\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right\rangle$, kde k je libovolné celé číslo.

POZNÁMKA 4.1. Podobně jako při řešení goniometrických rovnic užíváme také při řešení nerovností s goniometrickými funkcemi jako pomůcky jednotkové kružnice nebo se opíráme o graf příslušné goniometrické funkce.

Příklad 4.3. Určete všechna x, která vyhovují nerovnosti $|\sin x + \cos x| < 1$.

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností $-1 < \sin x + \cos x < 1$, kterou upravíme obdobným způsobem jako v příkladě 4.2. na tvar

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ta je splněna, je-li x libovolné číslo z intervalů $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi)$.

Příklad 4.4. Vyřešíme nerovnost

$$\left|\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}\right| < 1.$$

Levá strana nerovnosti má smysl, pokud $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}$. Nerovnost zjednodušíme podle vzorců (1,34). Po úpravě dostaneme

$$|\operatorname{tg} 2x| < 1,$$

neboli

$$-1 < \operatorname{tg} 2x < 1.$$

Funkce tg z nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pro všechna z, která leží v intervalech

$$\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle.$$

Proto musí platit nerovnost

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi\,,$$

která vede k výsledku

$$-\frac{\pi}{8} + k\,\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Daná nerovnost je tedy splněna pro všechna ta x z intervalů $\langle -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\rangle$, která nejsou rovna lichému násobku $\frac{\pi}{2}$. Z existenčních podmínek totiž plyne, že pro $x = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$ nemá levá strana dané nerovnosti smysl.

Příklad 4.5. Dále vyřešíme nerovnost

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \geqq 0\,.$$

Řešení. Existenční podmínka má tvar $\sin 2\alpha \neq 1$, tj. $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. Jelikož jmenovatele můžeme nahradit ekvivalentním výrazem $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$, vidíme, že daná nerovnost je splněna jen v tom případě, jestliže $\cos\alpha \geqq 0$. To znamená, že α je libovolným číslem z intervalů $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ s výjimkou těch hodnot, které jsme vyloučili z důvodů existenčních.

Pro zajímavost i poučení uvedeme nyní soutěžní úlohu

Mezinárodní matematické olympiády z roku 1965. Její účastníci dostali následující úkol:

Příklad 4.6. Určete všechna x z intervalu $\langle 0,\ 2\pi \rangle$, která vyhovují nerovnostem

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2} .$$

Řešení rozdělíme na dvě části.

a) Nerovnost

$$\left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leqq \sqrt{2} \tag{4,6}$$

můžeme umocnit dvěma, neboť jde o nerovnost mezi nezápornými čísly. Úprava vede k nerovnosti

$$|\cos 2x| \geqq 0 , \tag{4,7}$$

která je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Tato čísla jsou však také řešením nerovnosti (4,6), neboť nerovnost (4,7) vznikla z nerovnosti (4,6) ekvivalentními úpravami.

b) Nerovnost

$$2 \cos x \leqq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \tag{4,8}$$

je jistě pravdivá, jestliže $\cos x \leqq 0$, to znamená, je-li x libovolné číslo z intervalu

$$\langle \frac{\pi}{2} , \frac{3}{2} \pi \rangle . \tag{4,9}$$

Nerovnost (4,8) stačí proto řešit pouze v případě, že $\cos x > 0$. Této podmínce vyhovují z požadovaného intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ všechna x, která leží v intervalech

$$\langle 0, \frac{\pi}{2}) , (\frac{3}{2} \pi , 2\pi \rangle . \tag{4,10}$$

Jestliže tedy $\cos x > 0$, je (4,8) nerovností mezi kladnými čísly a umocněním převedeme (4,8) na ekvivalentní nerovnost

$$|\cos 2x| \leqq -\cos 2x\,. \tag{4,11}$$

Nerovnost je pravdivá obecně pro všechna x, která vyhovují nerovnostem

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq 2x \leqq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,,$$

neboli

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi + k\pi\,.$$

Nás však zajímají pouze ta řešení, která leží zároveň v některém z intervalů (4,10). Tuto vlastnost mají všechna x z intervalů

$$\langle\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2})\,,\,(\frac{3}{2}\pi,\,\frac{7}{4}\pi\rangle\,. \tag{4,12}$$

Spojíme-li částečné výsledky (4,9), (4,12), dospějeme k závěru, že nerovnost (4,8) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{7}{4}\pi\rangle$. Tento interval je také výsledným řešením nerovnosti dané, neboť nerovnost (4,6) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0,\,2\pi\rangle$.

Podobně si budeme počínat v následující úloze.

Příklad 4.7. Naším úkolem bude opět určení všech x z intervalu $\langle 0,\,2\pi\rangle$, která vyhovují nerovnostem

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2\cos x} \leqq \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} \leqq$$
$$\leqq 2\cos\frac{x}{2}\,.$$

Řešení.

a) V příkladě 4.6 jsme mlčky přešli existenční podmínky. Pozorný čtenář si jistě všiml, že dané výrazy tam měly smysl pro všechna x. V našem případě tomu tak není.

Výraz $\sqrt{\sqrt{2} + 2\cos x}$ má existenční oprávnění pouze tehdy, jestliže $\cos x \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Podmínce vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{3}{4}\pi \rangle, \quad \langle \frac{5}{4}\pi, 2\pi \rangle . \tag{4,13}$$

Výraz $\sqrt{\cos x - \sin x}$ má smysl, pokud $\cos x - \sin x \geqq$ $\geqq 0$. Známou úpravou převedeme podmínku na nerovnost $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0$, které vyhovují v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \quad \langle \frac{5}{4}\pi, 2\pi \rangle . \tag{4,14}$$

A konečně, existence výrazu $\sqrt{\cos x + \sin x}$ je zaručena podmínkou $\cos x + \sin x \geqq 0$, kterou převedeme na tvar $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$. Té vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{3}{4}\pi \rangle, \quad \langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \rangle . \tag{4,15}$$

Jelikož žádáme současnou platnost podmínek (4,13), (4,14) i (4,15), může řešení dané nerovnosti ležet pouze v některém z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \quad \langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \rangle . \tag{4,16}$$

b) Umocníme-li nerovnost

$$\left| \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} \right| \leqq 2 \cos \frac{x}{2}, \tag{4,17}$$

dostaneme postupně

$$2 \cos x + 2\sqrt{\cos 2x} \leqq 4 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\sqrt{\cos 2x} \leqq (1 + \cos x) - \cos x ,$$

$$\sqrt{\cos 2x} \leqq 1 .$$

Poslední nerovnost je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pro která $\cos 2x \geqq 0$, tj. pro všechna x z intervalů $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$, $\langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$, $\langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \rangle$. Jelikož však x musí současně ležet v některém z intervalů (4,16), jsou řešením nerovnosti (4,17) pouze intervaly $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$, $\langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \rangle$.

c) Obdobným způsobem upravíme nerovnost

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2 \cos x} \leqq \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} . \tag{4,18}$$

Postupná úprava, počínaje umocněním (jde opět o nerovnost mezi nezápornými čísly), dává nerovnost

$$\sqrt{\cos 2x} \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Další umocnění, jehož oprávněnost si čtenář jistě zdůvodní sám, vede ke vztahu

$$\cos 2x \geqq \frac{1}{2}\,,$$

který je pravdivý pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, pro která platí $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} + k\pi$. Jde o intervaly $\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle$, $\langle \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\rangle$, $\langle \frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle$. Podmínce (4,16) však vyhovují pouze dva z těchto intervalů $\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle$, $\langle \frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle$, a proto řešením nerovnosti (4,18) jsou všechna čísla x z těchto dvou intervalů.

Z požadavku současné platnosti nerovností (4,17) i (4,18) plyne závěr: Dané nerovnosti vyhovují všechna x z intervalů

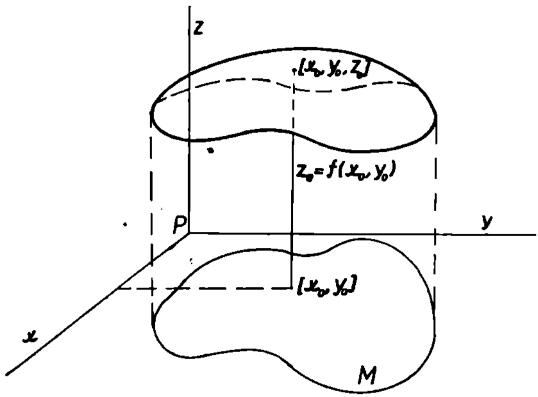
$$\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle\,,\ \langle \frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle\,.$$

4.2. Nerovnosti o dvou neznámých. Předpokládejme, že M je množina bodů, ležících v rovině, v níž je sestrojena soustava souřadnic Pxy. Mysleme si, že je dán předpis, který každému bodu $[x, y]$ z množiny M přiřazuje právě jedno reálné číslo z. Tento předpis nazýváme *funkce dvou* *proměnných*. Množina M je tzv. *definiční obor funkce*; x, y jsou tzv. *proměnné*.

Určité číslo z_0 přiřazené danému bodu $[x_0, y_0] \in M$ nazýváme *hodnotou funkce* v tomto bodě. Funkci obecně zapisujeme ve tvaru

$$z = f(x, y) .$$

Zvolme si v prostoru soustavu souřadnic $Pxyz$. Množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$, kde $[x, y] \in M$, je tzv. *graf funkce dvou proměnných* $z = f(x, y)$ (obr. 27). V obecném



Obr. 27. Graf funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$.

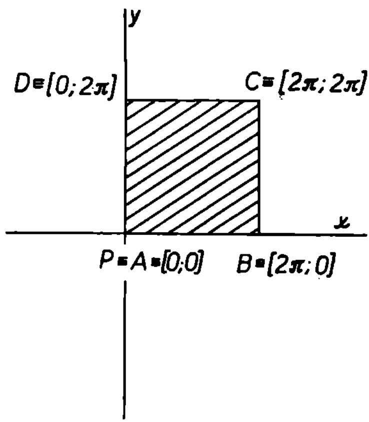
případě je grafem funkce dvou proměnných nějaká plocha.

Naše publikace nemá ani v nejmenším za úkol seznámit čtenáře s funkcemi dvou proměnných. To, co bylo řečeno, však plně stačí, abychom si uměli poradit s úlohami podobného typu, jaké budou uvedeny v dalších dvou příkladech.

Příklad 4.8. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazíme všechna řešení, která vyhovují nerovnostem

$$\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}, \ 0 \leqq x \leqq 2\pi, \ 0 \leqq y \leqq 2\pi.$$

Řešení. Funkce $\cos u$ má smysl pro každé reálné číslo u. Je tedy zřejmé, že funkce $z = \cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)$ je definována pro každou dvojici reálných čísel x, y. Obrazy všech takových dvojic vyplní celou rovinu. Máme proto za úkol vybrat mezi všemi body roviny, v nichž $\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}$ ty body, které leží zároveň ve čtverci $ABCD$ určeném nerovnostmi $0 \leqq$



Obr. 28. Obraz množiny bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$.

$\leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ (viz obr. 28). Předcházející úvaha je návodem pro náš další postup.

Nejprve budeme hledat všechny body roviny, v nichž platí nerovnost

$$\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}. \qquad (4,19)$$

a) Jestliže

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq 0, \qquad (4,20)$$

můžeme nerovnost (4,19) psát ve tvaru

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq \frac{1}{2}. \qquad (4,21)$$

Nerovnosti (4,20) a (4,21) budou zřejmě splněny pro ty dvojice x, y, které vyhovují nerovnosti (4,21). To znamená, že

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqq y - x + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

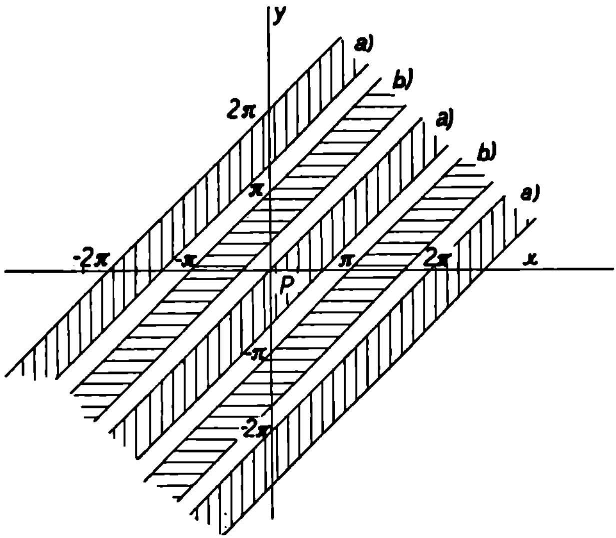
Odtud dostaneme

$$x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqq y \leqq x + 2k\pi. \qquad (4,22)$$

Obrazem nerovnosti (4,22) jsou části rovin (rovnoběžné pásy) omezené přímkami o rovnicích $y = x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $y = x + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo (v obou rovnicích stejné). V obr. 29 jsou příslušné části označeny znakem a).

b) Jestliže

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) < 0\,, \tag{4,23}$$



Obr. 29. Výsledné řešení nerovnosti $\left|\cos\left(y-x+\frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}$.

potom má nerovnost (4,19) tvar

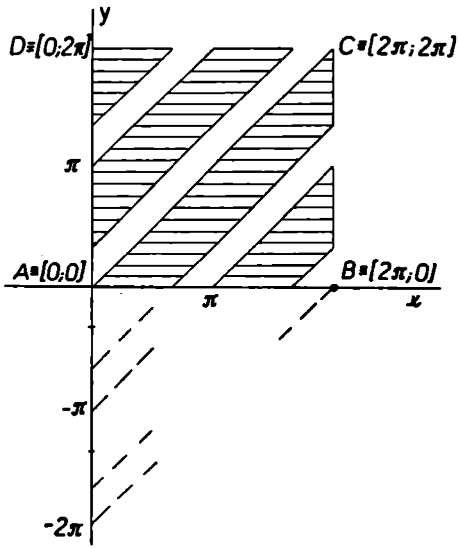
$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \leqq -\frac{1}{2}\,. \tag{4,24}$$

Obdobně jako v případě a) zaručují současné splnění obou nerovností (4,23) a (4,24) ty dvojice x, y, které vyhovují nerovnosti (4,24). Dostaneme tak

$$x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqq y \leqq x + \pi + 2k\pi\,. \qquad (4,25)$$

Obrazem nerovnosti (4,25) jsou opět části rovin (rovnoběžné pásy) omezené tentokrát přímkami o rovnicích $y = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = x + \pi + 2k\pi$. V obr. 29 jsou označeny znakem b).

Všechny přímky, které omezují části roviny s přízni-



Obr. 30. Výsledné řešení příkladu 4.8.

vým řešením, jsou vesměs rovnoběžné s přímkou $y = x$, neboť mají tvar $y = x + q$. Nás zajímají pouze ty, které mají společné body se čtvercem $ABCD$, tedy ty přímky, jejichž q bude z intervalu $\langle -2\pi,\ 2\pi \rangle$. V systému rovnoběžek $y = x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ mají proto smysl pouze ty, které obdržíme pro $k = 0,1$. Podobně je tomu se zbývajícími třemi systémy rovnoběžek. Úloze vyhovuje také bod $B \equiv [2\pi,\ 0]$, neboť leží na přímce $y = x - 2\pi$. Výsledné řešení získáme tak, že zjistíme, kde se překrývají části roviny s příznivým řešením se čtvercem $ABCD$ (obr. 30). Příslušné oblasti jsou na obrázku vyšrafovány.

Příklad 4.9. Nerovností $x^2 + y^2 \leqq 2\pi$ je dána v rovině pravoúhlých souřadnic x, y množina všech bodů kruhu o poloměru $r = \sqrt{2\pi}$ se středem v počátku $P \equiv [0,\ 0]$. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, které mají tu vlastnost, že jejich obrazy leží v daném kruhu a je v nich definována funkce $z = \sqrt{\sin(y - x^2)}$. Výslednou množinu zobrazte.

Řešení: Výraz $\sqrt{\sin(y - x^2)}$ má smysl, pokud $\sin(y - x^2) \geqq 0$, neboli

$$x^2 + 2k\pi \leqq y \leqq x^2 + (2k + 1)\pi\,. \qquad (4,26)$$

Rovnice $y = x^2 + 2k\pi$, $y = x^2 + (2k + 1)\pi$, kde k je libovolné celé číslo (stejné pro obě rovnice), představují soustavu parabol s vrcholy na ose y. Vzdálenost sousedních vrcholů je π. Grafickým řešením nerovnosti (4,26) jsou části roviny mezi každou dvojicí takových parabol. (Parabola o rovnici $y = x^2 + 2k\pi$ ohraničuje každou část roviny s příznivým řešením zdola, druhá parabola o rovnici $y = x^2 + (2k + 1)\pi$ shora.) Pro naši úlohu mají však význam pouze ty paraboly, které mají s danou kružnicí společný aspoň jeden bod. Rozhodneme proto nejdříve početně, které paraboly mají tuto vlastnost. Společné body získáme řešením soustav:

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\pi\,, \\ y &= x^2 + 2k\pi\,; \end{aligned} \tag{4,27}$$

$$\text{b)} \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\pi\,, \\ y &= x^2 + (2k + 1)\pi\,. \end{aligned} \tag{4,28}$$

a) Soustava (4,27) vede po dosazení $x^2 = y - 2k\pi$ na kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - 2(k + 1)\pi = 0\,. \tag{4,29}$$

Diskriminant této rovnice $D = 1 + 8(k + 1)\pi$ musí být číslo nezáporné. Tím získáme podmínku pro parametr k

$$k \geqq -1 - \frac{1}{8\pi}\,.$$

Číslo k však nabývá pouze celočíselných hodnot. Podmínku můžeme proto napsat v jednodušším tvaru

$$k \geqq -1\,. \tag{4,30}$$

Kořeny rovnice (4,29) jsou čísla

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2}\,,$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2}\,.$$

Ze vztahu $y - 2k\pi = x^2$ plyne nerovnost

$$y \geqq 2k\pi\,. \tag{4,31}$$

Podmínky (4,30) a (4,31) mají platit současně. Dosadíme-li kořen y_1 do nerovnosti (4,31), dostaneme

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2} \geqq 2k\pi ,$$

neboli

$$\sqrt{1 + 8(k + 1)\pi} \geqq 4k\pi + 1 .$$

Jestliže $k \geqq 0$, jde o nerovnost mezi kladnými čísly a můžeme tedy obě strany nerovnosti umocnit. Další úprava je zřejmá:

$$1 + 8k\pi + 8\pi \geqq 16k^2\pi^2 + 8k\pi + 1 ,$$

$$2k^2\pi - 1 \leqq 0 ,$$

$$(k\sqrt{2\pi} + 1)\,(k\sqrt{2\pi} - 1) \leqq 0 . \qquad (4,32)$$

V posledním kroku jsme užili vzorce pro rozdíl čtverců. Nerovnosti (4,32) vyhovují vzhledem k předpokladu $k \geqq 0$ zřejmě jen čísla z intervalu $\langle 0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \rangle$.
Existuje však jediné celočíselné k v tomto intervalu, totiž $k = 0$. Dosadíme-li do nerovnosti (4,31) kořen y_2, máme nerovnost

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2} \geqq 2k\pi ,$$

kterou uvedeme na tvar

$$\sqrt{1 + 8(k + 1)\pi} \leqq -(1 + 4k\pi) . \qquad (4,33)$$

Nerovnost (4,33) není však pravdivá pro žádné $k \geqq 0$, neboť levá strana je v tom případě vždy kladná, pravá záporná.

Zbývá nám ověřit, jakou polohu má parabola $y = x^2 + 2k\pi$ vůči kružnici $x^2 + y^2 = 2\pi$ pro $k = -1$. Jestliže $k = -1$, potom $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Nerovnost (4,31) je v obou případech pravdivá, neboť vede k nerovnostem $0 \geqq -2\pi$, $-1 \geqq -2\pi$. (První souřadnice průsečíků obou křivek určíme z rovnice $x^2 = y + 2\pi$. Máme kořeny $x_1 = \sqrt{2\pi}$, $x_1' = -\sqrt{2\pi}$, $x_2 = \sqrt{2\pi - 1}$, $x_2' = -\sqrt{2\pi - 1}$).

Shrneme-li dosavadní výsledky, vidíme, že z parabol tvaru $y = x^2 + 2k\pi$ mají s danou kružnicí společné body pouze dvě (pro $k = 0$, $k = -1$). Parabola $y = x^2$ má s kružnicí společné dva body $A \equiv [a_1, a_2 = y_1]$, $A' \equiv [-a_1, a_2 = y_1]$, přitom $a_1 = \sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}}$, $a_2 = y_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}$. Parabola $y = x^2 - 2\pi$ má s danou kružnicí společné 4 body $B \equiv \left[\sqrt{2\pi}, 0\right]$, $B' \equiv \left[-\sqrt{2\pi}, 0\right]$, $C \equiv \left[\sqrt{2\pi - 1}, -1\right]$, $C' \equiv \left[-\sqrt{2\pi - 1}, -1\right]$.

b) Diskusi soustavy (4,28) provedeme stejným způsobem. Dosadíme-li z druhé rovnice do prvé $x^2 = y - (2k + 1)\pi$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - (2k + 3)\pi = 0 . \tag{4,34}$$

Žádáme opět, aby diskriminant $D = 1 + 4(2k + 3)\pi$ byl nezáporný. Odtud získáme podmínku (jelikož k musí být celé číslo)

$$k \geqq -1 . \tag{4,35}$$

Podobně ze vztahu $y - (2k + 1)\pi = x^2$ máme další požadavek

$$y \geqq (2k + 1)\pi . \tag{4,36}$$

Čísla y určíme z rovnice (4,34):

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2},$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2}.$$

Dosazení $y = y_1$ do podmínky (4,36) a postupná úprava vede k nerovnosti

$$\sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi} \geqq 2(2k + 1)\pi + 1.$$

Pro $k \geqq 0$ jsou obě strany kladné. Umocníme je proto a nerovnost upravíme na tvar

$$(2k + 1)^2 - \frac{2}{\pi} \leqq 0.$$

Rozložíme-li levou stranu nerovnosti v součin, můžeme dále psát

$$\left(2k + 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)\left(2k + 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) \leqq 0. \quad (4,37)$$

Vzhledem k předpokladu $k \geqq 0$ nemá zřejmě nerovnost (4,37) řešení.

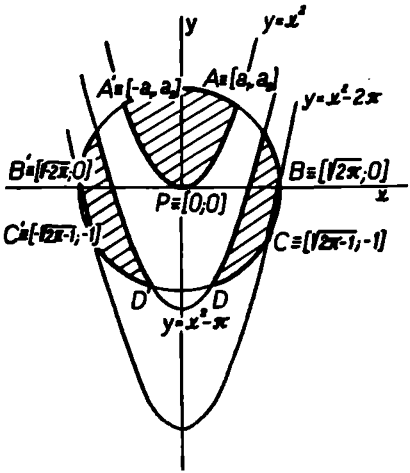
Dosadíme-li $y = y_2$ do (4,37), obdržíme nerovnost

$$-\frac{1 + \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2} \geqq (2k + 1)\pi, \quad (4,38)$$

které nelze vyhovět žádným nezáporným celým číslem, neboť výraz na levé straně je pro každé takové k záporný, na pravé kladný.

Zbývá tedy jediná parabola pro $k = -1$, která má rovnici $y = x^2 - \pi$. Snadno se opět přesvědčíme, že tato parabola má s kružnicí 4 body společné. Potom totiž

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\pi}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\pi}}{2}$$



Obr. 31. Grafické řešení soustavy nerovností z příkladu 4.9.

a nerovnost (4,36) je v obou případech pravdivá. Je zřejmé, že $y_1 > y_2$. Vzhledem k tomu stačí ověřit platnost vztahu (4,36) pouze pro y_2. Snadný výpočet nás přivádí k nerovnosti

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\pi}}{2} \geqq -\pi,$$

kterou ekvivalentními úpravami lze uvést na tvar

$\pi \geqq 2$. První souřadnice průsečíků určíme z rovnice $x^2 = y + \pi$.

Máme tedy konečný závěr:

Ze všech dvojic reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnosti $x^2 + y^2 \leqq 2\pi$, je funkce $z = \sqrt{\sin (y - x^2)}$ definována pouze pro ty dvojice, které splňují buď nerovnosti (4,39), nebo nerovnost (4,40):

a) $$x^2 - 2\pi \leqq y \leqq x^2 - \pi\,, \tag{4,39}$$

b) $$y \geqq x^2\,. \tag{4,40}$$

Grafické řešení je na obr. 31. Příslušné oblasti jsou v obrázku vyšrafovány.

Cvičení

4.1. Určete všechna x, která vyhovují nerovnostem:

a) $$\left|\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right| \leqq 1\,,$$

b) $$4 \sin^4 x + \sin^2 2x + 2 \cos 2x \leqq 2 \sin 2x\,,$$

c) $$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} < 3\,,$$

d) $$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} > -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

e) $$\frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} > 0\,,$$

f) $$\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \,.\, \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} > 0.$$

4.2. Určete a zobrazte všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, pro které jsou definovány dané funkce:

a) $z = \sqrt{\sin (x^2 + y^2)}$,
b) $z = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \sin y}$,
c) $z = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 y}$.

4.3. Určete všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem

$$\log \sin \left(x + y - \frac{\pi}{2}\right) < 0\,, \quad x^2 + y^2 < 4\pi^2\,.$$

Potom zobrazte výslednou množinu v rovině pravoúhlých souřadnic x, y.

4.4. Zobrazte množinu dvojic reálných čísel $[x, y]$, která vyhovují nerovnostem

$$|y - \cos x| \leqq \pi\,, \quad |x| \leqq \pi\,, \quad |y| \leqq \pi.$$

4.5. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem:

$$||\sin x| - y| \leqq \sin x\,, \quad |x| \leqq \pi\,.$$

4.6. Určete všechna x z intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$, která vyhovují nerovnostem

a) $\sqrt{\operatorname{tg} 2x} + \sqrt{\operatorname{cotg} 2x} \leqq 2$,

b) $$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \leqq \sqrt{1 + \cos \frac{x}{2}} + \sqrt{1 - \cos \frac{x}{2}} \leqq \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$