Komplexní čísla a funkce

6. kapitola. Exponenciální funkce a logaritmus

In: Jiří Jarník (author): Komplexní čísla a funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 62–[76].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403635

6. kapitola

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE A LOGARITMUS

Mezi funkcemi, o nichž jste hovořili ve škole, byla i tzv. exponenciální funkce e^x. Tato funkce je zvláštním případem obecné exponenciální funkce a^x (o základu a).

Definice čísla e vyžaduje jisté znalosti o posloupnostech či řadách*). Číslo e je totiž limitou posloupnosti, jejíž obecný (n-tý) člen je $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Jinak se dá číslo e definovat jako součet nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \dots$$

Tyto vzorce nám umožňují vypočítat s libovolnou předem danou přesností hodnotu čísla e, která je $e = 2{,}71828\dots$

Tato zdánlivě náhodná a umělá definice má hluboký význam. Umožňuje nám např. sestavit tabulky přirozených logaritmů (tj. logaritmů o základu e). Z nich pak lze podle známého vzorce $\log_a x = \lg x/\lg a$ vypočítat logaritmy o libovolném (kladném) základu, tedy také např. desetinné logaritmy. Těmito otázkami se ovšem nemůžeme zde zabývat.

Funkce e^x se vyskytuje v řadě fyzikálních a technických aplikací. Tak např. křivka, vytvořená provazem nebo řetězem, zavěšeným volně (tj. tak, že může klouzat) ve dvou

*) Čtenář, který tyto znalosti nemá, může však bez obav pokračovat v četbě této kapitoly!

bodech, má rovnici $y = e^x + e^{-x}$ čili $y = e^x + 1/e^x$. Tato křivka se tradičně nazývá řetězovka.

Rovnice popisující kmitání hmotného bodu je $x = \cos t$ (t označuje čas). V praxi jsou však mnohem obvyklejší tzv. tlumené kmity. Tlumení je vyjádřeno exponenciální funkcí e^{-t}, takže rovnice tlumených kmitů je $x = e^{-t}\cos t$. Zatímco v prvním případě kmitá hmotný bod stále mezi body $x = -1$ a $x = 1$, v druhém případě se výchylka stále zmenšuje, neboť funkce e^{-t} je klesající.*)

Exponenciální funkce se objevuje také ve vzorcích pro rozpad radioaktivní látky, při výpočtech v teorii pravděpodobnosti (Poissonův zákon) atd.

Mnohé z těchto aplikací — např. v elektrotechnice — vedly k myšlence rozšířit exponenciální funkci na funkci komplexní proměnné, a to tak, aby její podstatné vlastnosti zůstaly zachovány. Pokusíme se nyní naznačit tuto cestu.

Definujme funkci komplexní proměnné $E(z)$ vztahem: Je-li $z = x + yi$, pak

$$E(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Je-li z reálné číslo, je takto definovaná funkce totožná s exponenciální funkcí e^x, neboť v tom případě je $z = x$, $y = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Společně s některými dalšími vlastnostmi, které jsou obdobné vlastnostem exponenciální funkce v reálném oboru, nás to vede k tomu, že funkci $E(z)$ nazýváme také exponenciální funkcí v komplexním oboru. Často se pro ni používá i stejné označení e^z nebo $\exp z$.

Exponenciální funkce je jedna z tzv. elementárních funkcí komplexní proměnné. Nemůžeme v této knížce rozebírat její význam příliš do hloubky; přesto nám však dává příle-

*) V uvedených příkladech jsme pro jednoduchost vynechali fyzikální konstanty.

žitost ukázat blíže způsob, jak se zkoumají vlastnosti komplexních funkcí, a procvičit znovu naše znalosti algebry komplexních čísel.

Příklad 39. Z definice funkce $E(z)$ odvoďte její následující vlastnosti:

(a) $|E(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$; je-li z ryze imaginární, je $|E(z)| = 1$.

(b) $E(z) \neq 0$ pro každé komplexní číslo z.

(c) $E(z + 2\pi i) = E(z), E(z + \pi i) = -E(z)$.

Řešení. (a) Pro libovolné reálné číslo y platí

$$|\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

Protože prostá hodnota součinu se rovná součinu prostých hodnot činitelů, je

$$|E(z)| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

(Připomeňme, že hodnota exponenciální funkce reálné proměnné je vždy kladné číslo!) Je-li z ryze imaginární, je $\mathrm{Re}\, z = 0$ a tedy $|E(z)| = e^0 = 1$.

(b) Kdyby bylo $E(z) = 0$, muselo by platit také $|E(z)| = 0$ (srov. př. 6). To však není možné, protože $|E(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ a víme, že exponenciální funkce reálné proměnné je různá od nuly pro všechny hodnoty proměnné.

(c) Tyto vlastnosti ověříme snadno přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} E(z + 2\pi i) &= E[x + i(y + 2\pi)] = \\ &= e^x[\cos (y + 2\pi) + i \sin (y + 2\pi)] = \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = E(z), \\ E(z) + \pi i) &= E[x + i(y + \pi)] = \\ &= e^x[\cos (y + \pi) + i \sin (y + \pi)] = \\ &= e^x(-\cos y - i \sin y) = -E(z). \end{aligned}$$

Příklad 40. Dokažte, že následující vlastnosti, známé pro exponenciální funkci reálné proměnné, platí obdobně i pro $E(z)$:

(a) $e^{p+q} = e^p e^q$;
(b) $e^{-p} = 1/e^p$;
(c) je-li n přirozené číslo, je $(e^p)^n = e^{np}$.

Řešení. (a) Jsou-li u, v komplexní čísla, $u = u_1 + u_2 i$, $v = v_1 + v_2 i$, pak podle definice je

$$E(u + v) = e^{\mathrm{Re}(u+v)} [\cos \mathrm{Im}(u + v) + i \sin \mathrm{Im}(u + v)] = \\ = e^{u_1 + v_1} [\cos(u_2 + v_2) + i \sin(u_2 + v_2)],$$

$$E(u).E(v) = e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2). e^{v_1} (\cos v_2 + \\ + i \sin v_2).$$

Čísla u_1, v_1 jsou reálná, takže $e^{u_1} e^{v_1} = e^{u_1 + v_1}$. Podle definice násobení komplexních čísel dostáváme

$$E(u).E(v) = e^{u_1 + v_1} [\cos u_2 \cos v_2 - \sin u_2 \sin v_2 + \\ + i(\sin u_2 \cos v_2 + \cos u_2 \sin v_2)] = \\ = e^{u_1 + v_1} [\cos(u_2 + v_2) + i \sin(u_2 + v_2)].$$

Porovnáme-li poslední výraz s vyjádřením hodnoty $E(u + v)$, dostáváme vztah $E(u + v) = E(u)E(v)$, platný pro libovolná komplexní čísla u, v. Tento vztah je analogií vztahu (a).

Abychom dokázali (b), vyjádříme komplexní číslo $1/E(u)$ v goniometrickém tvaru:

$$\frac{1}{e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2)} =$$

$$= e^{-u_1} \frac{\cos u_2 - i \sin u_2}{(\cos u_2 + i \sin u_2)(\cos u_2 - i \sin u_2)} =$$

$$= e^{-u_1} \frac{\cos u_2 - i \sin u_2}{\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2} =$$

$$= e^{-u_1} (\cos u_2 - i \sin u_2) = E(-u).$$

Je tedy skutečně $E(-u) = 1/E(u)$ pro každé komplexní číslo u.

K důkazu (c) můžeme výhodně použít Moivrovy věty, protože funkční hodnota $E(u)$ je vyjádřena vlastně v goniometrickém tvaru. Podle Moivrovy věty platí

$$[E(u)]^n = [e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2)]^n =$$
$$= e^{nu_1} (\cos nu_2 + i \sin nu_2), \text{ takže } [E(u)]^n = E(nu).$$

Příklad 41. Najděte všechna komplexní čísla, pro něž je prostá hodnota funkce $E(z)$ větší (menší) než jedna!

Řešení. Je-li $z = z_1 + z_2 i$, víme z př. 39, že $|E(z)| = e^{z_1}$. Je-li $z_1 > 0$, je $e^{z_1} > 1$, je-li $z_1 < 0$, je $e^{z_1} < 1$, a konečně pro $z_1 = 0$ je $e^{z_1} = 1$. Protože z_1 je reálná část čísla z, můžeme odpovědět na náš problém takto:

Prostá hodnota $E(z)$ je větší (rovna, menší) než jedna právě tehdy, je-li reálná část čísla z kladná (rovna nule, záporná). Čísla, pro něž je prostá hodnota $E(z)$ větší (menší) než jedna, jsou znázorněna body v pravé (levé) polorovině (tj. vpravo či vlevo od imaginární osy). Body na imaginární ose, znázorňující ryze imaginární čísla, mají funkční hodnoty, jejichž prostá hodnota je rovna jedné.

Příklad 42. Funkce $E(z)$ je podle definice zobrazením množiny komplexních čísel do sebe. Zjistěte, co je obrazem imaginární osy v tomto zobrazení. Co je obrazem úsečky na imaginární ose mezi počátkem a bodem, znázorňujícím číslo $2\pi i$? Na základě tohoto výsledku usuzujte, zda funkce $E(z)$ je prostá*).

Řešení. Na imaginární ose leží čísla ryze imaginární, tj. taková, jejichž reálná část je nula. Můžeme je tedy psát ve tvaru yi. Hodnota funkce $E(yi)$ je potom rovna číslu $\cos y + i \sin y$, takže $|E(yi)| = 1$. Funkční hodnota ryze

*) Prostou nazýváme funkci, která různým hodnotám proměnné přiřazuje různá čísla. Např. funkce $f(x) = 1/x$ je prostá, funkce $g(x) = x^2$ není prostá, neboť číslům x, $-x$ je přiřazeno totéž číslo.

imaginárního čísla leží tedy na jednotkové kružnici se středem v počátku. Naopak, je-li dán bod na této kružnici, je jím znázorněno komplexní číslo, které můžeme psát ve tvaru $\cos\theta + i\sin\theta$. Podle definice je však

$$\cos\theta + i\sin\theta = E(i\theta),$$

takže daný bod je znázorněním hodnoty funkce E pro argument $i\theta$. Tím jsme ukázali, že každý bod na jednotkové kružnici má svůj vzor, jímž je ryze imaginární číslo.*) Obrazem imaginární osy v zobrazení, daném funkcí $E(z)$, je tedy celá jednotková kružnice se středem v počátku.

Uvažujeme-li nyní místo celé imaginární osy jen úsečku mezi počátkem a bodem $2\pi i$, je výsledek stejný. Obrazem je zase celá jednotková kružnice, protože každý její bod zobrazuje komplexní číslo, které lze napsat ve tvaru $\cos\theta +$ $+ i\sin\theta$, kde navíc platí $0 \leqq \theta < 2\pi$. Stejný výsledek dostaneme také, vezmeme-li libovolnou úsečku délky 2π na imaginární ose.

Vyjádřeno jinak: Jestliže ryze imaginární číslo $i\theta$ je zobrazeno funkcí $E(z)$ na jistý bod jednotkové kružnice, pak tentýž bod je znázorněním funkční hodnoty pro všechny hodnoty proměnné tvaru $(\theta + 2n\pi)i$, kde n je celé číslo. Zobrazení, definované funkcí E, není tedy prosté. (Srov. př. 39 c.)

Všimněme si ještě nakonec, že hodnota komplexní funkce $E(z)$, $z = x + yi$, je v definici vyjádřena v goniometrickém tvaru. Je tu součin reálného (kladného) čísla e^x, které je prostou hodnotou čísla $E(z)$, a komplexní jednotky $\cos y +$ $+ i\sin y$, jejímž úkolem je — názorně řečeno — „otočit" reálné číslo e^x do směru daného argumentem y (měřeným v obloukové míře).

---

*) Je-li dána funkce $f(x)$, pak vzorem čísla y nazýváme hodnotu proměnné x_0, pro kterou platí $f(x_0) = y$.

Víme, že každé reálné kladné číslo p se dá napsat jako mocnina e^q, kde q je tzv. přirozený logaritmus čísla p, značený obvykle $\lg p$. Můžeme tedy říci, že přirozený logaritmus čísla p je (reálné) číslo, na něž musíme umocnit základ e, abychom dostali číslo p. Nemohli bychom obdobně definovat i logaritmus komplexního čísla? Ano, je to možné. Máme k tomu již všechny potřebné znalosti. Nejdůležitější je, že jsme definovali exponenciální funkci komplexní proměnné a že známe její základní vlastnosti.

Příklad 43. Je-li z komplexní číslo různé od nuly, napište v algebraické formě číslo u, jež je řešením rovnice

$$E(u) = z.$$

Řešení. Nechť goniometrický tvar čísla z je

$$z = r(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Jestliže existuje číslo $u = u_1 + u_2\mathrm{i}$ takové, že $E(u) = z$, je podle definice

$$E(u) = e^{u_1} (\cos u_2 + \mathrm{i} \sin u_2).$$

Porovnáme-li toto číslo s číslem z, je zřejmé, že musí platit

$$e^{u_1} = r, \quad \cos u_2 = \cos \alpha, \quad \sin u_2 = \sin \alpha.$$

(Srov. př. 6.)

Číslo r je kladné číslo, takže existuje jeho přirozený logaritmus a je určen jednoznačně. Položíme-li $u_1 = \lg r$, je první podmínka splněna. Abychom splnili druhou podmínku, stačí položit $u_2 = \alpha$; podmínka je ovšem splněna i tehdy, zvětšíme-li u_2 (nebo zmenšíme-li je) o celistvý násobek 2π. Každé číslo $u = \lg r + \mathrm{i}(\alpha + 2n\pi)$, kde n je celé číslo, je tedy řešením dané rovnice.

Poznali jsme, že číslo $u = \lg |z| + \mathrm{i} \arg z$*) má vzhledem k číslu z vlastnost, obdobnou základní vlastnosti přirozeného logaritmu kladného čísla. Použijeme-li označení $E(\mathrm{u}) = \mathrm{e}^u$, které je v teorii funkcí komplexní proměnné běžné, můžeme říci: Umocníme-li základ e na (komplexní) číslo u, dostaneme z. Každé číslo u, které má tuto vlastnost, budeme proto nazývat logaritmem komplexního čísla z a budeme je značit $\lg z$. Uvedenou vlastnost má ovšem, jak jsme se už zmínili, nekonečně mnoho čísel; liší se ve své imaginární části, a to o násobek čísla 2π.

Příklad 44. Odvoďte následující vlastnosti logaritmu komplexního čísla:
(a) $\lg (uv) = \lg u + \lg v$;
(b) $\lg (u/v) = \lg u - \lg v$;
(c) $\lg (u^n) = n \lg u$.
(Čísla u, v jsou komplexní, n je přirozené.)

Řešení. Všechny tyto vlastnosti plynou z odpovídajících vztahů pro exponenciální funkci $E(z)$. Tak např.

$$E(\lg u + \lg v) = E(\lg u)\, E(\lg v) = uv;$$

skutečně tedy číslo $\lg u + \lg v = w$ je logaritmem součinu uv, neboť $E(w) = uv$. Obdobně platí

$$E(\lg u - \lg v) = E(\lg u)\, E(-\lg v) = E(\lg u)/E(\lg v) = \\ = u/v,$$

$$E(n \lg u) = [E(\lg u)]^n = u^n.$$

Je však důležité správně chápat náš výsledek. Nejde totiž v pravém smyslu slova o rovnost komplexních čísel! Např. vztah (a) znamená: Sečteme-li některý z logaritmů čísla u (uvědomte si znovu, že je jich nekonečně mnoho!) a některý z logaritmů čísla v, je výsledek jednou z hodnot lo-

*) arg z znamená ovšem argument (přesněji kteroukoliv hodnotu argumentu) čísla z.

garitmu součinu uv. Jinak řečeno: dosadíme-li do levé strany rovnosti zvolené hodnoty logaritmů u a v, bude výsledek logaritmem uv; nemůžeme však dosadit libovolně zvolené hodnoty logaritmů na obě strany rovnosti a očekávat správný výsledek. Snad nejlépe si to osvětlíme na příkladu.

Příklad 45. Jsou dána komplexní čísla $u = \sqrt{3} - i$, $v = \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$, $w = 7(\sqrt{3} + i)$. Ověřte, že $uv = w$, najděte logaritmy L_1, L_2, L_3 komplexních čísel u, v, w (použijte hodnot argumentů mezi 0° a 360°) a vysvětlete, proč neplatí $L_1 + L_2 = L_3$.

Řešení. Vypočtěte nejprve součin uv:

$$uv = (\sqrt{3} - i) \cdot \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}\,i) =$$

$$= \frac{7}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{3} - i + 3i) =$$

$$= \frac{7}{2}(2\sqrt{3} + 2i) = 7(\sqrt{3} + i) = w.$$

Abychom našli logaritmy daných čísel, převedeme je nejdřív na goniometrický tvar: $|u| = \sqrt{3 + 1} = 2$, takže $u = 2\left(\sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}\,i\right)$; označíme-li α argument čísla u, je $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$. Je tedy $\alpha = 330°$ (kosinus je kladný, sinus záporný), neboli $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Goniometrický tvar čísla u je

$$u = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

Podobně je $|v| = 7$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$, takže $\beta = \frac{\pi}{3}$,

$$v = 7\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

a konečně

$$w = 14\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Podle definice logaritmu komplexního čísla je jeho reálná část logaritmus prosté hodnoty a jeho imaginární část argument daného čísla. Je tedy

$$L_1 = \lg 2 + \frac{11}{6}\pi\mathrm{i},$$

$$L_2 = \lg 7 + \frac{1}{3}\pi\,\mathrm{i},$$

$$L_3 = \lg 14 + \frac{1}{6}\pi\,\mathrm{i}.$$

To však znamená, že $L_1 + L_2 = \lg 2 + \lg 7 + \mathrm{i}\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \lg 14 + \frac{13}{6}\pi\mathrm{i}$. Je tedy $L_3 \neq L_1 + L_2$.

To však není ve sporu s výsledkem předešlého příkladu. Skutečně, $L_3 - (L_1 + L_2) = -\frac{12}{6}\pi\mathrm{i} = (-1).2\pi\,\mathrm{i}$. Rozdíl obou čísel je tedy násobkem $2\,\pi\,\mathrm{i}$. To znamená, že jak číslo $L_1 - L_2$, tak ovšem i číslo L_3 je logaritmem čísla ω — a to plně souhlasí s našimi výsledky.

Příklad 46. Řešte rovnici $E(z) = -5$.

Řešení. Číslo z musí být logaritmem čísla -5, tj.

$$z = \lg|-5| + \mathrm{i} \arg(-5),$$

kde $\arg(-5)$ znamené kteroukoliv hodnotu argumentu. Z toho dostáváme

$$z = \lg 5 + \pi \mathrm{i} + 2n\pi \mathrm{i},$$
$$z = \lg 5 + (2n + 1)\pi \mathrm{i}.$$

Daná rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení, jejichž imaginární části se liší o násobek 2π.

Příklad 47. Řešte rovnici $\lg z = 1 + \frac{1}{2}\pi \mathrm{i}$!

Řešení. Napsaná rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$E\left(1 + \frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) = z.$$

(Dvě rovnice jsou ekvivalentní, mají-li přesně táž řešení.) Zbývá tedy převést levou stranu rovnice na algebraický tvar. Podle definice funkce $E(z)$ je

$$E\left(1 + \frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\right) = \mathrm{e}^1\left(\cos\frac{1}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi\right) = \mathrm{e}\mathrm{i}.$$

Jediným kořenem rovnice je tedy číslo $z = \mathrm{e}\mathrm{i}$.

Z předchozích úvah je zřejmé, že není možné použít rovnice $u = \lg z$ k definici funkce komplexní proměnné; tento předpis není totiž jednoznačný, nedává nám možnost jednoznačně stanovit hodnotu funkce k dané hodnotě proměnné.

Takové vztahy se často vyskytují i v teorii reálných funkcí. Pamatujete se například, že předpis „číslu x přiřaď číslo y tak, že $y^2 = x$“ nedefinuje funkci, protože ke každému kladnému x existují dvě taková čísla, $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$. Proto jsme tento předpis doplnili podmínkou, že číslo y má být nezáporné. Tím jsme dostali (jednoznačnou) funkci $y = \sqrt{x}$.

Jestliže však pracujeme s komplexními čísly, jsou vztahy tohoto typu jednak častější, jednak není tak snadné ani výhodné vyloučit všechny možnosti až na jednu, jak jsme to udělali v případě odmocniny z kladného čísla. Zavádíme proto pojem víceznačné (říkáme též mnohoznačné) funkce. Taková funkce může být i nekonečně značná, jako např. právě logaritmus. O funkcích, které jsou definovány týmž předpisem, ale jednoznačně, hovoříme pak jako o větvích víceznačné funkce.

Příkladem víceznačné funkce, která má konečný počet hodnot, může být odmocnina z komplexního čísla.

Odmocninou z čísla z jsme nazvali číslo, pro něž platí $u^2 = z$. Tento vztah definuje dvojznačnou funkci, neboť víme, že pro každé $z \neq 0$ existují právě dvě taková čísla, lišící se znamením. Musíme si však uvědomit, že takto definovaná funkce se podstatně liší od funkce reálné proměnné $f(x) = \sqrt{x}$, definované vztahy $y^2 = x, y \geqq 0$ $(y = f(x))$! Zanedbání rozdílů v definici může vést k velmi zajímavým výsledkům. Příkladem, se kterým jste se možná již setkali, může být následující postup:

$$i^2 = i . i = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Víme však, že $i^2 = -1$ (to je definice čísla i), takže $1 = -1$!?

Tento zdánlivý paradox však snadno vysvětlíme. Vzorec $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$, který jsme použili, musíme chápat obdobně jako vzorce z př. 44. Znak $\sqrt{x}$ označuje zde nikoliv jediné číslo, ale vlastně množinu dvou čísel, lišících se znamením. Je-li $x = y = -1$, můžeme na levé straně dosadit za každou odmocninu buď i, nebo $-i$; výsledek bude buď 1, nebo -1. A obě tato čísla jsou skutečně hodnoty odmocniny z jedné (ovšem ve smyslu definice víceznačné funkce). Víc však tvrdit nemůžeme.

V naší zmínce o víceznačných funkcích jsme si všimli vlastně jen jediného faktu: že totiž je možné přiřadit jedinému číslu více funkčních hodnot. V geometrické teorii funkcí komplexní proměnné jde však také — a především – o to, jak jsou tyto hodnoty spolu svázány, jak od jedné z nich přejít k druhé pomocí některé spojité větve. Tyto otázky souvisí s teorií analytických funkcí, Riemannových ploch atd. To však už nespadá do rámce naší knížky.

Cvičení

1. Najděte všechny hodnoty logaritmu čísla
(a) 1; (b) -1; (c) i; (d) $1 + i$.

$$\left[\text{(a) } 2n\pi i; \quad \text{(b) } (2n+1)\pi i; \text{(c) } \frac{4n+1}{2}\pi i; \quad \text{(d) } \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{4}\pi i + 2n\pi i. \right]$$

2. Napište v algebraickém tvaru číslo

$$E(-\pi i)(3 - i^3) + E\left(\frac{\pi}{2} i\right)(2 + i)^2.$$

$[-7 + 2i.]$

3. Řešte rovnici

$$\lg z = 2 + \frac{1}{4}\pi i.$$

$[z = e^2 (1 + i)/\sqrt{2}.]$

4. Najděte všechny kořeny rovnice
(a) $E(z) = 1$; (b) $E(z) = -1$; (c) $E(z) = \mathrm{i}$; (d) $E(z) = -\mathrm{i}$.

$$\left[\text{(a) } z = 2n\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{(b) } z = (2n+1)\pi\mathrm{i}; \right.$$

$$\left. \text{(c) } z = \frac{1}{2}(4n+1)\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{(d) } z = \frac{1}{2}(4n-1)\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{celé číslo.} \right]$$

5. S použitím př. 40 dokažte

$$E(u - v) = E(u)/E(v)!$$

6. Je-li $u = \lg z$ kterákoliv hodnota logaritmu komplexního čísla z, je $E(u) = z$. Platí za stejných předpokladů také $\lg [E(u)] = u$?
[Ne; rozdíl mezi levou a pravou stranou může být $2n\pi$ i.]

7. Z definice funkce $E(z)$ dokažte tzv. Eulerovy vzorce (místo $E(z)$ píšeme e^z):

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

kde θ je reálné číslo. Tyto vzorce můžeme použít k rozšíření trigonometrických funkcí sinus a kosinus na komplexní obor proměnné, pobažujeme-li θ za číslo komplexní.