Komplexní čísla a funkce

4. kapitola. Komplexní funkce

In: Jiří Jarník (author): Komplexní čísla a funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 44–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403633

Terms of use:

© Jiří Jarník, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4. kapitola

KOMPLEXNÍ FUNKCE

Pamatujete se ze školy, že v definici pojmu funkce vystupovaly dvě množiny: množina hodnot proměnné (obor funkce) a množina hodnot funkce. Obě tyto množiny byly dosud množiny reálných čísel. Není však žádný závažný důvod, proč bychom nemohli svoje úvahy zobecnit na čísla komplexní. Jsou vlastně dvě možnosti takového zobecnění. Pojednejme nejprve o jednodušší možnosti. Předpokládejme, že množina hodnot funkce je množina komplexních čísel, zatímco proměnná zůstává v oboru čísel reálných. Hovoříme pak o komplexní funkci reálné proměnné.

Definice komplexní funkce reálné proměnné se nijak podstatně neliší od definice reálné funkce. Jedinou změnou je, jak už jsme uvedli, že hodnoty funkce smějí být čísla komplexní. Zdůrazněme však znovu, že hodnotami proměnné zůstávají prozatím čísla reálná.

Takto definovaná funkce má vlastnosti velmi podobné vlastnostem reálné funkce. Můžeme dokonce říci, že jakoukoliv úlohu o komplexní funkci reálné proměnné můžeme převést na úlohu o funkcích reálných. Platí totiž:

Je-li dána komplexní funkce reálné proměnné rovnicí $z = F(t)$, *pak rovnice* $x = \operatorname{Re} F(t)$ *a* $y = \operatorname{Im} F(t)$ *definují reálné funkce reálné proměnné, přičemž obor proměnné zůstává nezměněn.*

Důkaz tohoto tvrzení je velmi snadný. Pro každou hodnotu proměnné t z oboru funkce F je $F(t)$ komplexní číslo. Můžeme je tedy psát ve tvaru $F(t) = \text{Re } F(t) + \text{i Im } F(t)$. Reálná i imaginární část $F(t)$ je ovšem reálné číslo. Každá z rovnic $x = \text{Re } F(t)$, $y = \text{Im } F(t)$ přiřazuje tedy libovolnému reálnému t z oboru funkce F právě jedno reálné číslo. (Jinak by totiž přiřazení $z = F(t)$ nebylo jednoznačné.) A to ovšem znamená, že rovnice $x = \text{Re } F(t)$, $y = \text{Im } F(t)$ definují reálné funkce, jejichž obor je roven oboru funkce $F(t)$.

Příklad 27. Definujme funkci f předpisem: Reálnému číslu x je přiřazeno komplexní číslo, jehož reálná i imaginární část je rovna x. Jaký je obor a množina hodnot funkce? Jak lze znázornit množinu hodnot funkce geometricky?

Řešení. Oborem funkce je zřejmě celá množina reálných čísel. Protože $f(x) = x + x\text{i}$, je $f(x)$ znázorněna vektorem, jehož koncový bod (při umístění v počátku) má obě souřadnice stejné. To znamená, že leží na přímce, která půlí úhel mezi osami souřadnic. Množinu hodnot funkce lze tedy znázornit geometricky přímkou s rovnicí $y = x$.

Tato přímka není však „grafem funkce" v tom smyslu, jak jej známe z teorie reálných funkcí. Je jen znázorněním množiny funkčních hodnot bez jejich vztahu k proměnné. Uvědomte si například, že geometrickým znázorněním množiny hodnot funkce $g(x) = 2x + 2x\text{i}$ nebo dokonce $h(x) = \text{tg } x + \text{i tg } x$ je táž přímka, i když tyto funkce přiřazují téže hodnotě proměnné naprosto různá čísla.

Příklad 28. Vztah $f(x) = (x + a\text{i})^3$, kde a je reálné číslo, definuje komplexní funkci reálné proměnné. Stanovte její reálnou a imaginární část a určete, pro které hodnoty proměnné je $f(x)$ číslo reálné nebo číslo ryze imaginární!

Řešení. Platí

$$(x + ai)^3 = x^3 + 3x^2\, ai + 3xa^2i^2 + a^3i^3 =$$
$$= x^3 - 3a^2x + (3ax^2 - a^3)i.$$

Je tedy

$$\operatorname{Re} f(x) = x^3 - 3a^2x, \quad \operatorname{Im} f(x) = 3ax^2 - a^3.$$

Reálná část je rovna nule, platí-li $x = 0$, nebo $x^2 = 3a^2$ čili $x = \pm\sqrt{3}a$. Imaginární část je rovna nule, je-li $3ax^2 - a^3 = 0$. Vyloučíme-li případ $a = 0$, kdy jde o reálnou funkci, dostáváme z této rovnice $3x^2 = a^2$ čili $x = \pm a/\sqrt{3}$.

Daná funkce nabývá tedy reálné hodnoty pro $x = \pm a/\sqrt{3}$ a ryze imaginární hodnoty pro $x = 0$ nebo $x = \pm\sqrt{3}a$. Je-li ovšem $a = 0$, jde o reálnou funkci, takže všechny její hodnoty jsou reálné.

Příklad 29. Popište geometricky množinu hodnot komplexní funkce reálné proměnné $f(t) = ut$, kde u je komplexní číslo. Jak se změní tato množina, přičteme-li komplexní číslo v, tj. definujeme-li funkci $f_1(t)$ vztahem $f_1(t) = ut + v$?

Řešení. Číslo $f(t)$ má reálnou část $t \operatorname{Re} u$, imaginární $t \operatorname{Im} u$. Píšeme-li $u = u_1 + u_2i$, je znázorněním hodnoty funkce $f(t)$ bod (u_1t, u_2t), takže

$$x = u_1t, y = u_2t.$$

To jsou tzv. parametrické rovnice (t se nazývá parametr). Vyloučíme-li z těchto rovnic t, dostaneme vztah mezi x a y. Vyjádřeme např. t z první rovnice a dosaďme do druhé:

$$t = x/u_1, \quad y = \frac{u_2}{u_1}\, x.$$

Poslední rovnice je rovnicí přímky procházející počátkem, jejíž směrnice je u_2/u_1 (je-li $u_1 = 0$, je rovnice přímky prostě $x = 0$; je-li zároveň i $u_2 = 0$, jde o konstantní funkci $f(t) = 0$). Množina hodnot funkce je tedy znázorněna přímkou.

Funkce $f_1(t) = ut + v$ přiřazuje číslu t hodnotu funkce f zvětšenou o komplexní číslo $v = v_1 + v_2 i$. Geometricky to znamená, že bod, který znázorňuje funkční hodnotu $f(t)$, je třeba posunout o vektor $v\,(v_1, v_2)$.

Rozdělíme-li $f_1(t)$ na reálnou a imaginární část, je

$$\operatorname{Re} f_1(t) = u_1 t + v_1, \quad \operatorname{Im} f_1(t) = u_2 t + v_2.$$

Souřadnice odpovídajícího bodu jsou tedy

$$x = u_1 t + v_1, \quad y = u_2 t + v_2.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr t, dostaneme opět rovnici přímky

$$y = \frac{u_2}{u_1}(x - v_1) + v_2.$$

Směrnice přímky se nezměnila (jsou tedy obě přímky rovnoběžné), ale každý bod přímky je posunut ve směru osy y o $v_2 - u_2 v_1/u_1$.

Příklad 30. Pro které hodnoty komplexního čísla w je prostá hodnota funkce $h(x) = \dfrac{w - x}{w + x}$ rovna jedné pro všechna reálné čísla x?

Řešení. Je-li $w = u + vi$, je

$$|h(x)| = \left|\frac{w - x}{w + x}\right| = \sqrt{\frac{(u - x)^2 + v^2}{(u + x)^2 + v^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + x^2 - 2ux}{u^2 + v^2 + x^2 + 2ux}}.$$

Pokud $u \neq 0$, je zřejmě $|h(x)| = 1$ jen pro $x = 0$. Je-li $u = 0$, je $|h(x)| = 1$, nezávisle na hodnotě imaginární části v.

Číslo w musí tedy být ryze imaginární. Je-li $w \neq 0$, je množina hodnot funkce h znázorněna jednotkovou kružnicí o středu v počátku bez bodu $z = -1$*); je-li $w = 0$, je $h(x) = -1$ pro všechna $x \neq 0$.

Příklad 31. Znázorněte graficky množinu hodnot funkce

$$f(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Jak se změní množina hodnot, definujeme-li $g(x) = [f(x)]^n$?

Řešení. Protože $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, jsou všechny funkční hodnoty $f(x)$ znázorněny body na jednotkové kružnici se středem v počátku. Obráceně, souřadnice libovolného bodu na této kružnici lze psát ve tvaru $\cos x$, $\sin x$ pro nějakou hodnotu x z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Množina funkčních hodnot je tedy znázorněna jednotkovou kružnicí. Každý bod této kružnice znázorňuje funkční hodnotu nekonečně mnoha hodnot proměnné, které se vzájemně liší o celistvý násobek 2π.

Funkce $g(x) = f^n(x)$ je definována vztahem

$$g(x) = (\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n,$$

což podle Moivrovy věty je totéž jako

$$g(x) = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx.$$

Množina hodnot této funkce je znázorněna toutéž jednotkovou kružnicí, neboť také $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1$. Samo-

*) Rovnice $-1 = \dfrac{w - x}{w - x}$ má řešení jen pro $w = 0$.

zřejmě i obráceně je možné každý bod na této kružnici vyjádřit jako $(\cos nx, \sin nx)$; hodnotu x stačí zde vzít dokonce z intervalu $\langle 0, \frac{1}{n} 2\pi)$.

Cvičení

1. Vypočtěte reálnou a imaginární část funkce reálné proměnné

$$f(x) = \frac{x - (1 + i)}{x + (1 - i)}.$$

$$\left[\operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}, \operatorname{Im} f(x) = \frac{-2}{x^2 + 2x + 2}.\right]$$

2. Napište lineární funkci reálné proměnné, která nule přiřazuje číslo $2-5i$ a číslu 3 komplexní jednotku $-i$.

$$\left[\text{Funkce } \frac{1}{3}(-2 + 4i)\,x + 2 - 5i.\right]$$

3. Znázorněte geometricky množinu hodnot funkce

$$g(t) = t + \sqrt{1 - t^2}\, i,$$

je-li t reálná proměnná. Co je oborem této funkce?
[Půlkružnice o středu v počátku a poloměru 1, ležící nad osou x. Oborem funkce je interval $\langle -1, 1 \rangle$.]