Komplexní čísla a funkce

3. kapitola. Geometrické znázornění množin komplexních čísel

In: Jiří Jarník (author): Komplexní čísla a funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 35–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403632

3. kapitola

GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ MNOŽIN KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Připomněli jsme již, že komplexní čísla lze znázornit vektory v rovině. Číslu $a_1 + a_2\mathrm{i}$ je přiřazen vektor PA (a_1, a_2). Poznali jste ve škole, že aritmetickým operacím s komplexními čísly odpovídají příslušné operace s vektory. Zejména je třeba si uvědomit, že prostá hodnota komplexního čísla odpovídá velikosti příslušného vektoru, tj. vzdálenosti koncového a počátečního bodu vektoru. Argument komplexního čísla pak odpovídá úhlu mezi vektorem a kladnou částí osy x.

Jestliže v tomto znázornění uvažujeme jen umístění vektorů s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic, jsou čísla a_1, a_2 současně souřadnicemi koncového bodu vektoru PA, znázorňujícího číslo $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$. To nám umožňuje přiřadit každému komplexnímu číslu $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ bod A (a_1, a_2). Protože jedním z prvních matematiků, který používal tohoto znázornění, byl K. F. Gauss (1777—1855), mluvíme často o zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině. Jak uvidíme, je tento způsob velmi výhodný a názorný zejména při znázorňování množin komplexních čísel, i když neumožňuje tak snadno grafické provádění aritmetických operací s komplexními čísly jako znázornění vektory.

Příklad 21. Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel, pro něž platí (a) $|z| = 1$; (b) $|z| < 1$; (c) $|z| > 1$.

Řešení. (a) Daná podmínka znamená, že vzdálenost bodu znázorňujícího číslo z od počátku je rovna jedné. Je tedy znázorněním čísel z geometrické místo bodů, jejichž vzdálenost od počátku je jedna. Tyto body vytvoří jednotkovou kružnici se středem v počátku. Body uvnitř této kružnice mají ovšem vzdálenost od počátku menší než jedna, body vně kružnice větší než jedna. Platí tedy pro komplexní čísla z, znázorněná body uvnitř jednotkové kružnice, nerovnost $|z| < 1$, zatímco pro komplexní čísla znázorněná body vně kružnice platí nerovnost obrácená, $|z| > 1$. Tím jsme zodpověděli zároveň otázku (b) a (c).

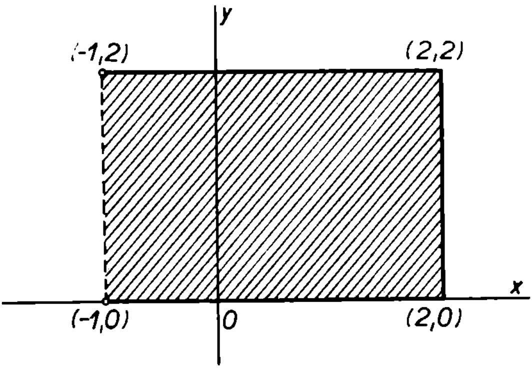
Příklad 22. Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel, splňujících současně nerovnosti

$$-1 < \mathrm{Re}\, z \leqq 2, 0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 2.$$

Řešení. Reálná část komplexního čísla z je znázorněna souřadnicí x příslušného bodu. Nerovnost $-1 < \mathrm{Re}\, z \leqq 2$ tedy znamená totéž jako $-1 < x \leqq 2$. Body, které splňují tuto podmínku, leží v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 2$, přičemž přímka $x = -1$ je vyloučena (levá nerovnost je ostrá!), zatímco přímka $x = 2$ je do pásu zahrnuta (pravá nerovnost připouští i rovnost). Podobně nerovnost (či správněji nerovnosti) $0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 2$ znamená, že souřadnice y musí splňovat podmínku $0 \leqq y \leqq 2$; obě hraniční přímky tohoto pásu jsou přípustné.

Mají-li čísla z splňovat současně obě nerovnosti, musí ležet v části roviny, společné oběma pásům. To je obdélník o vrcholech $(-1, 0)$, $(-1, 2)$ $(2, 2)$, $(2, 0)$. Jeho obvod je částí přípustné množiny bodů až na svislou úsečku mezi vrcholy $(-1, 0)$, $(-1, 2)$ včetně těchto krajních bodů. (Viz obr. 3.)

Poznámka. Všimněte si, že často říkáme např. „komplexní čísla leží v obdélníku..." apod. místo přesnějšího „body, znázorňující komplexní čísla, leží v obdélníku...". Podobně můžete číst také naopak např. „body na jednotkové



Obr. 3

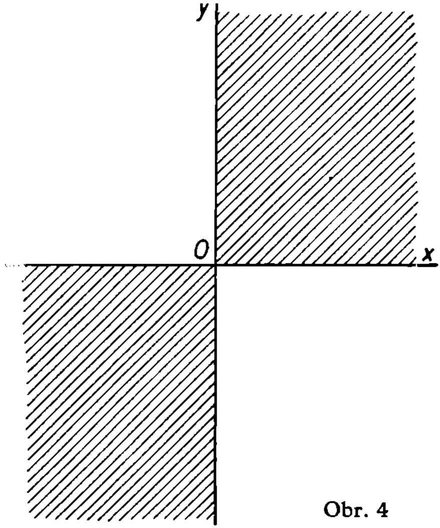
kružnici mají prostou hodnotu rovnu 1" místo „čísla, znázorněná body na jednotkové kružnici, mají prostou hodnotu rovnu 1".

Příklad 23. Znázorněte v Gaussově rovině množiny komplexních čísel, pro něž platí (a) Im $z^2 > 0$, (b) Re $z^2 \geqq 0$.

Řešení. Nejdříve musíme napsat z^2 v algebraickém tvaru, abychom viděli, jaké podmínky platí pro souřadnice x a y. Je-li $z = x + yi$, je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. První podmínku můžeme tedy psát ve tvaru $2xy > 0$, druhou $x^2 - y^2 \geqq 0$.

(a) Nerovnost $2xy > 0$ znamená, že souřadnice x i y mají totéž znamení, tj. jsou buď obě kladné, nebo obě záporné. První možnost nastává pro body v prvním kvadrantu, druhá pro body v třetím kvadrantu. Množina čísel, pro něž

$\operatorname{Im} z^2 > 0$, je tedy znázorněna prvním a třetím kvadrantem, osy souřadnic jsou vyloučeny (proč?). (Viz obr. 4.)



Obr. 4

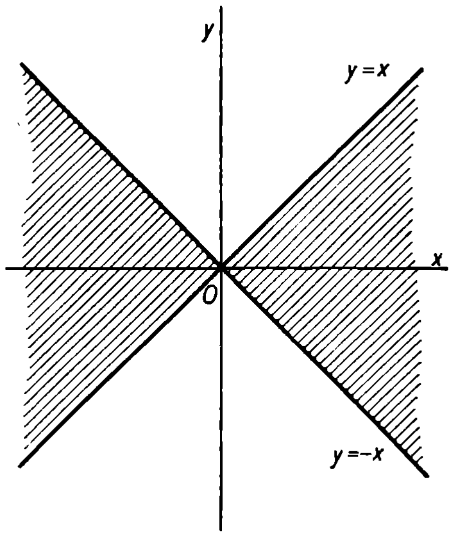
(b) Nerovnost $x^2 - y^2 \geqq 0$ znamená $y^2 \leqq x^2$ čili $|y| \leqq \leqq |x|$. Tuto nerovnost můžeme napsat ve tvaru $-x \leqq y \leqq \leqq x$, je-li x nezáporné, nebo $x \leqq y \leqq -x$, je-li x záporné (neboť pak $x < -x$!). Pro jakoukoliv hodnotu x můžeme tuto nerovnost napsat s použitím $|x|$ ve tvaru $-|x| \leqq \leqq y \leqq |x|$.

Zvolíme-li libovolnou přímku rovnoběžnou s osou y, pak body splňující tyto nerovnosti vyplní na ní úsečku mezi body $y = -x, y = x$. Přímky $y = -x, y = x$ jsou proto hranicí hledané množiny bodů, která je na obr. 5 vyznačena šrafováním. Obě hraniční přímky, které půlí úhel mezi osami souřadnic, zahrnujeme ovšem do naší množiny, neboť ve všech našich vztazích je rovnost připustná.

Úlohu (b) můžeme řešit také jiným způsobem, použijeme-li goniometrického vyjádření komplexního čísla. Je-li

$$z = |z| (\cos\alpha + \mathrm{i} \sin\alpha),$$

je ovšem $x = |z| \cos\alpha$, $y = |z| \sin\alpha$. Naše podmínka se dá napsat ve tvaru $|x| \geqq |y|$ čili $|\cos\alpha| \geqq |\sin\alpha|$, tj. $|\mathrm{tg}\alpha| \leqq 1$. Jak víte, platí tato nerovnost pro úhly z intervalů $\langle -45°, 45° \rangle$ a $\langle 135°, 225° \rangle$. Jak si snadno ověříte, odpovídají těmto hodnotám argumentu právě všechny body z množiny vyznačené na obr. 5.



Obr. 5

Příklad 24. Jaké podmínky splňují komplexní čísla, znázorněná body uvnitř mezikruží o středu (0, 1), vnitřním poloměru $r_1 = 1$ a vnějším $r_2 = 3$?

Řešení. Z definice kružnice plyne, že každý bod uvnitř mezikruží je vzdálen od středu o více než je hodnota vnitřního poloměru, ale o méně, než je hodnota vnějšího poloměru. Poznali jsme však, že vzdálenost dvou bodů odpovídá prosté hodnotě rozdílu komplexních čísel, znázorněných těmito body.*)

Bod (0, 1), který je středem mezikruží, znázorňuje komplexní jednotku i. Algebraická podmínka, charakterizující body uvnitř daného mezikruží (přesněji čísla těmito body znázorněná) je

$$1 < |z - \mathrm{i}| < 3.$$

Příklad 25. Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel z, pro něž platí $|z - 4| > |z|$.

Řešení. Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je

$$|z - 4| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Protože jde o nezáporná čísla, můžeme obě strany dané nerovnosti umocnit na druhou a napsat ji ve tvaru

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 > x^2 + y^2,$$
$$-8x + 16 > 0,$$
$$2 > x.$$

Daná podmínka tedy znamená, že reálná část čísla z je menší než dvě. Tuto nerovnost splňují komplexní čísla, znázorněná body v polorovině vlevo od přímky $x = 2$, rovnoběžné s osou y.

Stejný výsledek dostaneme ovšem i geometrickou úvahou: Nerovnost $|z - 4| > |z|$ splňují právě ty body

---

*) Přesněji řečeno, hovořili jsme zatím o velikosti vektoru. Velikost vektoru je ovšem rovna vzdálenosti počátečního a koncového bodu. Vzorec pro vzdálenost dvou bodů A (x_1, y_1) a B (x_2, y_2) je, jak víte, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Body A, B znázorňují komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ a $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$; je tedy podle definice $|z_2 - z_1| = d$.

v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od bodu 4 je větší než vzdálenost od bodu 0 (tj. od počátku). Body, mající stejnou vzdálenost od obou těchto bodů, leží na jejich symetrále, tj. na přímce $x = 2$. Body, splňující danou nerovnost, musí tedy ležet vlevo od symetrály.

Příklad 26. Pro komplexní číslo z platí $\mathrm{Im}\, z/\mathrm{Re}\, z > \sqrt{3}$. Je možné, aby toto číslo bylo znázorněno bodem uvnitř kružnice procházející počátkem, jejíž střed leží na ose x a jejíž poloměr je r?

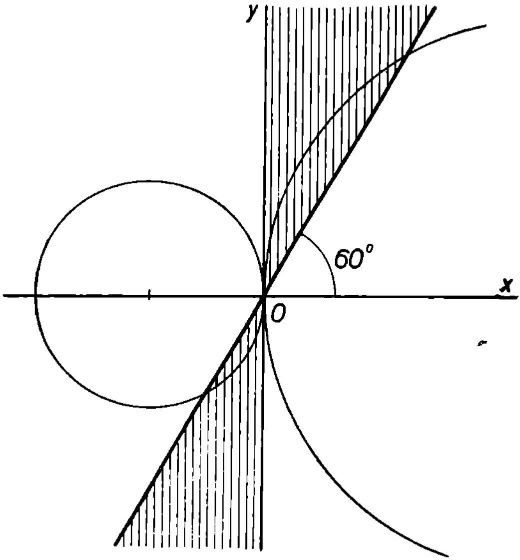
Řešení. Napíšeme-li z v goniometrickém tvaru, je

$$z = |z|\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha).$$

Potom ovšem $\mathrm{Im}\, z/\mathrm{Re}\, z = \mathrm{tg}\alpha$. Daná podmínka tedy znamená, že argument čísla z leží buď v intervalu $(60°, 90°)$, nebo v intervalu $(240°, 270°)$. Geometricky je tato množina znázorněna částí roviny mezi přímkou, procházející počátkem a svírající úhel 60° s kladnou částí osy x, a imaginární osou. (Rovnice první přímky je $y = \sqrt{3}x$.) Na obr. 6 je tato množina svisle šrafována. Přímka $y = \sqrt{3}x$ je nutně sečnou kružnice procházející počátkem, jejíž střed je na ose x (nezávisle na jejím poloměru), protože tečna této kružnice v počátku je svislá. Daný kruh (bez ohledu na souřadnici středu) zasahuje tedy svou částí (kruhovou úsečí) do množiny znázorňující komplexní čísla, která splňují první podmínku úlohy.

Odpověď tedy zní: Ano, je možné splnit obě podmínky současně. Množina takových komplexních čísel je znázorněna kruhovou úsečí. Je-li střed kružnice na kladné části osy x, leží tato úseč v prvním kvadrantu; má-li střed kružnice zápornou první souřadnici, leží úseč ve třetím kvadrantu. (Srovn. obr. 6, na němž jsou vyznačeny dvě kružnice: se středem $(5, 0)$ a $(-2, 0)$.)

Dovedete stručně odůvodnit, proč odpověď nezávisí na hodnotě souřadnice středu kružnice? Ano, protože zároveň se změnou souřadnice se změní i poloměr kružnice (musí procházet počátkem!), takže kružnice vždy protne přímku $y = \sqrt{3}x$, která je hranicí oblasti $\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z > \sqrt{3}$.



Obr. 6

Cvičení

1. Popište geometricky a načrtněte množiny komplexních čísel z, vyhovujících následujícím podmínkám:

(a) $|z| \leqq 2$, $0° \leqq \arg z \leqq 30°$; (b) $\operatorname{Re} z > 1$, $|z| < 2$;

(c) $\operatorname{Im} z \leqq 2$, $\frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi$.

[(a) Kruhová výseč „uzavřená", tj. včetně hraničních úseček a oblouku; (b) kruhová úseč „otevřená", tj. bez hraniční úsečky a oblouku; (c) rovnoramenný trojúhelník včetně podstavy, ramena nejsou zahrnuta.]

2. Znázorněte množinu komplexních čísel, pro něž platí $-45° \leqq \arg z \leqq 45°$. Vyjádřete tutéž množinu pomocí podmínky kladené na reálnou a imaginární část čísla z!

[Část roviny mezi přímkami $y = -x$, $y = x$, ležící vpravo od počátku. Táž množina je dána podmínkami $|\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z| \leqq 1$, $\operatorname{Re} z \geqq 0$.]

3. Jakou podmínku splňují komplexní čísla, znázorněná geometricky body ležícími

(a) uvnitř kružnice o středu (3, 1) a poloměru 2;

(b) v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 3$;

(c) na úsečce spojující body $(-1, -1)$ a $(1, 1)$?

[(a) $|z - (3 + i)| < 2$; (b) $-1 < \operatorname{Re} z < 3$;

(c) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z| \leqq \sqrt{2}$.]