Komplexní čísla a funkce

2. kapitola. Kvadratická rovnice a odmocnina z komplexního čísla

In: Jiří Jarník (author): Komplexní čísla a funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 20–34.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403631

KVADRATICKÁ ROVNICE A ODMOCNINA Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Ve škole jste se zabývali podrobně tzv. kvadratickou rovnicí. Je to rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Předpokládali jste, že koeficienty rovnice a, b, c jsou reálná čísla. Ukázalo se, že důležitou veličinou pro zkoumání takové rovnice je tzv. diskriminant, tj. číslo $b^2 - 4ac$.

Výsledky se daly shrnout takto: Je-li diskriminant kvadratické rovnice kladný, má rovnice dva různé kořeny; oba tyto kořeny jsou reálná čísla. Je-li diskriminant nula, má rovnice jediný kořen, který je opět reálný. (Říkáme mu někdy kořen dvojnásobný — proč?) Je-li diskriminant záporný, existují opět dva kořeny rovnice a jsou to čísla komplexně sdružená (s nenulovou imaginární částí).

Ukážeme, že i kvadratická rovnice, jejíž koeficienty jsou čísla komplexní, má vždy řešení. Její kořeny jsou obecně komplexní čísla, nemusí však být navzájem komplexně sdružená. Začneme však s nejjednoduššími případy.

Příklad 12. Ověřte, že rovnice $x^2 = -5 + 12i$ má kořeny $x_1 = 2 + 3i$ a $x_2 = -(2 + 3i)$.

Řešení. Mocnina komplexního čísla s přirozeným mocnitelem je ovšem definována stejně jako mocnina čísla reálného. Výraz x^2 znamená tedy součin $x.x$. Zřejmě tedy
$x_1^2 = (2 + 3i)(2 + 3i) = 4 - 9 + 2.6i = -5 + 12i.$

Tentýž výsledek dostaneme ovšem i pro x_2, neboť $x_2^2 = (-x_1)^2 = x_1^2 = -5 + 12i$.

Příklad 13. Najděte komplexní číslo x, pro něž platí $x^2 = -2i$.

Řešení. Existuje-li takové číslo x, lze je napsat v algebraickém tvaru jako $x = x_1 + x_2 i$. Pak naše rovnice má tvar

$$(x_1 + x_2 i)^2 = -2i$$

čili

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 i = -2i.$$

Z definice rovnosti komplexních čísel vyplývá, že reálná část čísla na levé straně této rovnice je nula, imaginární je -2:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad 2x_1 x_2 = -2.$$

Levou stranu první rovnice rozložíme na součin podle vzorce pro rozdíl čtverců: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$. Tím se zbavíme druhých mocnin. Víme, že rovná-li se součin dvou čísel nule, musí aspoň jeden z činitelů být nula. (V tomto případě jde o reálná čísla, neboť x_1, x_2 jsou reálnou a imaginární částí komplexního čísla x, ale v př. 5 jsme toto tvrzení dokázali i pro komplexní čísla.) Je tedy buď $x_1 + x_2 = 0$, nebo $x_1 - x_2 = 0$. V prvním případě je $x_2 = -x_1$, v druhém $x_1 = x_2$.

Dosud jsme však vůbec nepoužili druhé rovnice. Dosadíme-li do ní $x_2 = -x_1$, dostaneme $-2x_1^2 = -2$ čili $x_1^2 = 1$. Tato rovnice má dva reálné kořeny 1 a -1. Pro první kořen dostáváme $x = x_1 + x_2 i = 1 - i$, pro druhý $x = -1 + i$. Jak snadno ověříme, jsou obě tato čísla kořeny dané rovnice.

Předpokládáme-li, že $x_1 = x_2$, dostaneme dosazením do druhé rovnice $2x_1^2 = -2$. Tato rovnice však nemá reálné kořeny! Protože x_1 je reálná část komplexního čísla, je pro ně přípustná jen reálná hodnota. Nedává tedy podmínka $x_1 = x_2$ ve spojení s rovnicí $2x_1x_2 = -2$ žádné řešení, vyhovující podmínkám úlohy.

Existují tedy dvě komplexní čísla, která jsou kořeny dané rovnice: číslo $1 - i$ a číslo $-1 + i$. Tato dvě čísla se liší pouze znaménkem: $1 - i = -(-1 + i)$ a nejsou tedy komplexně sdružená.

Předešlé dva příklady nás vedou k otázce, zda vždy existuje druhá odmocnina z komplexního čísla. Pokusme se dokázat, že ano.

Příklad 14. Je dáno komplexní číslo a. Najděte (v algebraickém nebo v goniometrickém tvaru) číslo x (resp. všechna čísla x) pro něž platí $x^2 = a$.

Řešení. Napíšeme-li obě čísla v algebraickém tvaru, je

$$x = x_1 + x_2 i, \; a = a_1 + a_2 i.$$

Existuje-li číslo x, vyhovující podmínkám úlohy, musí platit

$$(x_1 + x_2 i)^2 = a_1 + a_2 i$$

čili

$$(x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 i = a_1 + a_2 i.$$

Aby rovnice byla splněna, musí se navzájem rovnat reálné části a imaginární části čísel na levé a pravé straně rovnice:

$$x_1^2 - x_2^2 = a_1, \quad 2x_1x_2 = a_2.$$

To jsou však poměrně složité rovnice (jde o soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých). Protože a_1 není obecně nula, nemůžeme použít výhodného rozkladu jako minule. Nebylo by lépe použít goniometrického vyjádření komplexních čísel? Víme, že Moivrova věta dává poměrně jednoduchou formuli pro druhou mocninu komplexního čísla. Zkusme to:

$$x = \varrho (\cos \theta + i \sin \theta),$$
$$a = r (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Podle Moivrovy věty je

$$x^2 = \varrho^2 (\cos 2 \theta + i \sin 2\theta).$$

Protože číslo x je předpokládaným kořenem rovnice $x^2 = a$, musí se podle př. 6 rovnat jak prosté hodnoty, tak i argumenty čísel x^2, a. Argument se ovšem může lišit o celistvý násobek 2π. To znamená $\varrho^2 = r$, $2 \theta = \alpha + 2n\pi$.

Protože ϱ i r jsou prosté hodnoty komplexních čísel, jsou nezáporná a tedy $\varrho = \sqrt{r}$. Z druhé rovnice dostáváme $\theta = \frac{1}{2} \alpha + n\pi$. Tato rovnice dává dvě podstatně různé hodnoty pro θ. Buď je $\theta = \frac{1}{2} \alpha$, nebo $\theta = \frac{1}{2} \alpha + \pi$. (V obou případech můžeme ovšem přičíst ještě násobek 2π.)

Řešením rovnice $x^2 = a$ jsou tedy dvě čísla

$$\sqrt{r}\left(\cos \frac{1}{2} \alpha + i \sin \frac{1}{2} \alpha\right), \quad \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{1}{2} \alpha + \pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \alpha + \pi\right)\right].$$

Když si uvědomíme, že $\cos\left(\frac{1}{2} \alpha + \pi\right) = -\cos \frac{1}{2} \alpha$ a stejně $\sin\left(\frac{1}{2} \alpha + \pi\right) = -\sin \frac{1}{2} \alpha$, vidíme, že stejně jako v případě reálného kladného čísla a se oba kořeny liší jen znamením.

V některých případech je však přece jen výhodnější užít algebraického tvaru pro odmocninu komplexního čísla. Vraťme se proto ještě k našim rovnicím

$$x_1^2 - x_2^2 = a_1, \quad 2x_1x_2 = a_2$$

a zkusme je řešit.

Je-li $x_1 \neq 0$, plyne z druhé rovnice $x_2 = a_2/2x_1$, což dosazeno do první rovnice dá

$$x_1^2 - \frac{a_2^2}{4x_1^2} = a_1.$$

Protože předpokládáme $x_1 \neq 0$, má tato rovnice tytéž kořeny jako

$$x_1^4 - a_1x_1^2 - \frac{1}{4}a_2^2 = 0.$$

To je bikvadratická rovnice, z níž vypočteme

$$x_1^2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2};$$

znamení minus před odmocninou musíme však vyloučit. (Proč? Číslo $x_1 \neq 0$ má být reálné a proto $x_1^2 > 0$; ale $a_1 \leqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$.)

Odtud již snadno dostaneme $x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + |a|)}$.

Dosazením do první rovnice vypočteme x_2:

$$x_2^2 = x_1^2 - a_1 = \frac{1}{2}(a_1 + |a|) - a_1 = \frac{1}{2}(|a| - a_1),$$

takže

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|a| - a_1)}.$$

Znamení u odmocnin je třeba volit tak, aby byla splněna druhá rovnice. To znamená, je-li a_2 kladné, musí být obě znamení + nebo obě —. Je-li a_2 záporné, musíme zvolit znamení opačná. Případ $a_2 = 0$ vede ovšem podle znamení a_1 buď k výsledku $x_1 = 0$, nebo $x_2 = 0$. Podrobnou diskusi těchto případů přenecháváme čtenáři. (Použijte odvozených vzorců k řešení cvičení 2 a porovnejte obě metody — algebraickou a goniometrickou!)

Naučili jsme se řešit ryze kvadratickou rovnici s komplexním koeficientem. Obraťme se nyní k obecnému případu.

Příklad 15. Dokažte, že kvadratická rovnice

$$az^2 + bz + c = 0,$$

v níž koeficienty a, b, c jsou komplexní čísla, $a \neq 0$, má v oboru komplexních čísel vždy řešení.

Řešení. Použijeme v podstatě téže metody jako pro rovnici s reálnými koeficienty: převedeme úlohu na řešení ryze kvadratické rovnice (ovšem s komplexním číslem na pravé straně). Především budeme rovnici, jak někdy říkáme, „normovat", tj. budeme dělit obě strany rovnice číslem a (jež je podle předpokladu různé od nuly). Nevadí, že a je komplexní číslo. Dostaneme rovnici

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0,$$

která má přesně tytéž kořeny jako rovnice původní. Označme $b/a = p$, $c/a = q$ (p, q jsou komplexní čísla, která ovšem dovedeme napsat v algebraickém tvaru). Pak v rovnici

$$z^2 + pz + q = 0$$

můžeme doplnit dvojčlen $z^2 + pz$ tak, abychom dostali druhou mocninu lineárního dvojčlenu; aby se rovnice nezměnila, musíme stejné číslo zase odečíst:

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0.$$

Nyní můžeme rovnici napsat ve tvaru

$$\left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

a výraz v závorce na levé straně můžeme pokládat za novou neznámou; označme ji třeba u:

$$u = z + \frac{1}{2}p.$$

Ale rovnici $u^2 = d$, kde d je libovolné komplexní číslo, již umíme řešit! V př. 14 jsme dokázali, že má řešení (a to dva různé kořeny, lišící se znaménkem, je-li $d \neq 0$). Vypočteme-li její kořeny, můžeme použít rovnici

$$z = u - \frac{1}{2}p$$

a vypočítat opět dvě hodnoty neznámé z.

Příklad 16. Řešte rovnici

$$\mathrm{i}z^2 - (7 + 3\mathrm{i})z + 10{,}5 - 9\mathrm{i} = 0.$$

Řešení. Budeme postupovat jako v obecném případě. Nejprve budeme dělit obě strany rovnice koeficientem při z^2, tj. imaginární jednotkou i. Protože $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$, znamená to násobit obě strany rovnice číslem $-\mathrm{i}$:

$$z^2 - (3 - 7\mathrm{i})z - 9 - 10{,}5\mathrm{i} = 0.$$

K doplnění prvních dvou členů potřebujeme číslo $\left(\frac{3 - 7\mathrm{i}}{2}\right)^2$.

Dostáváme

$$z^2 - (3 - 7\mathrm{i})z + \left(\frac{3 - 7\mathrm{i}}{2}\right)^2 = 9 + 10{,}5\mathrm{i} + \left(\frac{3 - 7\mathrm{i}}{2}\right)^2,$$

$$\left[z - \frac{1}{2}(3 - 7i)\right]^2 = 9 + 10{,}5i + \frac{1}{4}(9 - 49 - 42i),$$

$$\left[z - \frac{1}{2}(3 - 7i)\right]^2 = -1.$$

Zbývá řešit ryze kvadratickou rovnici $u^2 = -1$. Kořeny této rovnice jsou ovšem čísla i, —i. Pro neznámou z musí tedy platit vztah

$$z - \frac{1}{2}(3 - 7i) = i$$

nebo

$$z - \frac{1}{2}(3 - 7i) = -i,$$

což dává dva kořeny původní rovnice: $z = \frac{1}{2}(3 - 5i)$ a $z = \frac{1}{2}(3 - 9i)$.

Ověřte dosazením a výpočtem, že jde skutečně o kořeny původní rovnice!

Z př. 15 plyne, že vzorec pro řešení kvadratické rovnice platí i pro rovnici s komplexními koeficienty. Musíme však správně chápat význam odmocniny.

Je přirozené označit v tomto případě $\sqrt{d}$ (d je komplexní číslo) libovolné číslo u, jež je řešením rovnice $u^2 = d$. Pak zpětným postupem dostáváme

$$z = -\frac{1}{2}p + \sqrt{d},$$

$$z = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

a dosadíme-li $p = b/a$, $q = c/a$, vyjde po jednoduchých úpravách

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Protože obě čísla vyhovující rovnici $u^2 = b^2 - 4ac$ se liší navzájem jen znamením, můžeme tento vzorec psát opět ve tvaru

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Znamení $\pm$ u odmocniny má následující význam: Najdeme-li jedno řešení rovnice $u^2 = b^2 - 4ac$, můžeme je označit $\sqrt{b^2 + 4ac}$. Pak další řešení je prostě $-\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Příklad 17. Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny (a) 3, —1/2; (b) 2 + i, 2 — i; (c) i, 1; (d) 1 + 2i.

Řešení. Kvadratická rovnice, která má kořeny u, v, se dá napsat ve tvaru součinu kořenových činitelů $(x - u)(x - v) = 0$. To jste poznali ve škole a je zřejmé, že to platí i v případě, kdy výsledná rovnice nemá reálné koeficienty.

Máme tedy

(a) $(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ čili $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ nebo
$2x^2 - 5x - 3 = 0$;

(b) $[x - (2 + \mathrm{i})][x - (2 - \mathrm{i})] = 0$,
$x^2 - 4x + 5 = 0$,

(c) $(x - \mathrm{i})(x - 1) = 0$,
$x^2 - (1 + \mathrm{i})x + \mathrm{i} = 0$,

(d) $[x - (1 + 2\mathrm{i})]^2 = 0$,
$x^2 - (2 + 4\mathrm{i})x + (-3 + 4\mathrm{i}) = 0$.

V prvních dvou případech jsou koeficienty rovnic reálná čísla, v případě (c) nikoliv. Je to proto, že čísla i, 1 nejsou komplexně sdružená. Také v případě (d) jsou koeficienty komplexní čísla. Zde máme jediný dvojnásobný kořen nebo, jak někdy říkáme, dva splývající kořeny $1 + 2i$, $1 + 2i$. Tato čísla také nejsou komplexně sdružená (jen reálné číslo je komplexně sdružené samo k sobě!). To je důvod, proč koeficienty výsledné rovnice nejsou reálná čísla (srov. dále př. 18).

Přesvědčme se nyní, že tento výsledek je mnohem obecnější, než jsme zatím ukázali.

Příklad 18. Je-li komplexní číslo u kořenem algebraické rovnice s reálnými koeficienty, je kořenem téže rovnice i číslo $\bar{u}$ komplexně sdružené k u. Dokažte toto tvrzení!

Řešení. Algebraická rovnice se dá psát ve tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde n je přirozené číslo, $a_0 \neq 0$. Podle našeho předpokladu jsou všechny koeficienty této rovnice $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reálná čísla. Dosadíme-li do levé strany rovnice číslo komplexně sdružené ke kořenu u, dostaneme $a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{u} + a_n$. Víme však, že číslo komplexně sdružené k součinu (součtu) komplexních čísel je součin (součet) čísel komplexně sdružených k činitelům (sčítancům). Totéž platí ovšem i o mocnině, neboť umocňování (s přirozeným mocnitelem) je definováno pomocí násobení. Vzhledem k tomu, že koeficienty rovnice jsou reálná čísla, je $\bar{a}_k = a_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1, n$). Dostáváme tedy ihned

$$a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{u} + a_n =$$
$$= \overline{a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n}.$$

Protože však číslo u je podle předpokladu kořenem rovnice, je číslo na pravé straně číslem komplexně sdruženým k nule a tedy samo je rovno nule. Tím jsme dokázali, že také $\bar{u}$ je kořenem rovnice.

Zdůrazněme ještě jednou, že předpoklad reálnosti koeficientů jsme podstatně použili v tvrzení, že jejich komplexně sdružené hodnoty jsou táž čísla.

Nakonec ještě poznamenejme, že tohoto výsledku se užívá v důkazu tvrzení, že každá algebraická rovnice lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.

Na závěr této kapitoly si všimneme ještě odmocnin z komplexního čísla vyšších řádů.

Příklad 19. Co tvoří koncové body vektorů, znázorňující všechny hodnoty „třetí odmocniny z jedné", tj. všechna řešení rovnice $z^3 = 1$?

Řešení. Víme, že v reálném oboru má tato rovnice jediný kořen, číslo jedna. Známe totiž vzorec

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

(neznáte-li ho, snadno ho ověříte násobením a sloučením na pravé straně). Aby pravá strana byla rovna nule, musí být buď $z = 1$, nebo $z^2 + z + 1 = 0$. Tato kvadratická rovnice má však diskriminant $1 - 4 = -3$, což je záporné číslo. Nemá proto žádné řešení v množině reálných čísel. Jak snadno zjistíme, jsou její kořeny komplexní čísla $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ a $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. (Ověřte si znovu výpočtem, že obě tato čísla umocněna na třetí dají skutečně jednotku!)

Máme tedy tři kořeny rovnice $z^3 = 1$ a mohli bychom z nich odvodit i podmínku pro vektory, které jsou jejich geometrickým znázorněním. Jednodušší však je použít od počátku Moivrovy věty. Vyjádříme-li z v goniometrickém tvaru $z = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, je podle Moivrovy věty

$$z^3 = r^3(\cos 3\alpha + \mathrm{i}\sin 3\alpha),$$

takže naši rovnici lze psát ve tvaru

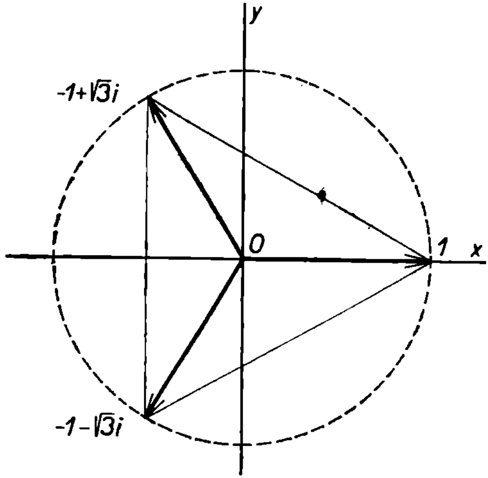
$$r^3(\cos 3\alpha + \mathrm{i}\sin 3\alpha) = 1$$

nebo jednodušeji $\cos 3\alpha + \mathrm{i}\sin 3\alpha = 1$, protože $r^3 = |z^3| = 1$. (Samozřejmě je potom také $r = 1$, takže prostá hodnota všech tří řešení dané rovnice je rovna jedné.) Je tedy

$$\cos 3\alpha = 1, \sin 3\alpha = 0,$$

což nastane pro 3α rovné násobku 2π (tj. $3\alpha = 0°, 360°, 720°, \ldots$). Je-li $3\alpha = 2n\pi$, je $\alpha = \frac{2n\pi}{3}$. Pro $n = 0$ je $\alpha = 0°$, $n = 1$ dává $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ čili $\alpha = 120°$, $n = 2$ dává $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ čili $\alpha = 240°$. Další hodnoty čísla n (i záporné) dávají některou z těchto hodnot zvětšenou (či zmenšenou) o násobek 2π. Taková hodnota argumentu dává ovšem totéž komplexní číslo (i tentýž vektor) jako hodnota původní. Máme tedy tři kořeny. Prostá hodnota všech tří je 1 (tj. všechny koncové body příslušných vektorů leží na jednotkové kružnici se středem v počátku), argumenty se liší navzájem o $120° = \frac{1}{3}\,360°$. Jsou tedy tato tři čísla znázorněna vektory, jejichž koncové body jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka (viz obr. 2).

Obdobnou metodou můžeme řešit i obecný případ.



Obr. 2

Příklad 20. Dokažte, že je-li a komplexní číslo různé od nuly, existuje právě n různých komplexních čísel takových, že $x^n = a$. Je-li $a = 0$, je ovšem také $x = 0$.

Řešení. Případ $a = 0$ je zřejmý. Budiž tedy $a \neq 0$ a nechť goniometrický tvar čísla a je $a = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Existuje-li číslo x tak, že $x^n = a$, je možno je psát také v goniometrickém tvaru jako $x = \varrho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ a má platit

$$\varrho^n\,(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r\,(\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Aby se tato dvě komplexní čísla rovnala, musí být $\varrho^n = r$ a číslo $n\theta$ musí být argumentem čísla a, čili $n\theta = \alpha + 2k\pi$, kde k je celé číslo.

Protože $r > 0$, existuje $\sqrt[n]{r} > 0$, takže $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (ϱ je prostá hodnota čísla x, takže záporná hodnota odmocniny pro sudé n není přípustná). Pro argument θ dostáváme n podstatně různých hodnot: $\frac{a}{n}, \frac{a + 2\pi}{n}, \frac{a + 4\pi}{n}, \ldots, \frac{a + (n-1)\,2\pi}{n}$. Další hodnoty už nedávají nová řešení rovnice, protože se liší od některého z uvedených řešení o násobek 2π. Naproti tomu uvedené hodnoty dávají skutečně podstatně různé hodnoty argumentu, takže existuje opravdu právě n různých řešení rovnice $x^n = a$. V obecném zápisu jsou to čísla

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{a + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{a + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Cvičení

1. Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny
(a) $2 - 3\mathrm{i}, 1$; (b) $2 - 3\mathrm{i}, \mathrm{i}$; (c) $\mathrm{i}, 0$; (d) jediný kořen $2 - 3\mathrm{i}$.

[(a) $z^2 + 3(\mathrm{i} - 1)z + 2 - 3\mathrm{i} = 0$;
(b) $z^2 + 2(\mathrm{i} - 1)z + 3 + 2\mathrm{i} = 0$; (c) $z^2 - \mathrm{i}z = 0$;
(d) $z^2 - 2.(2 - 3\mathrm{i})z - (5 + 12\mathrm{i}) = 0$.]

2. Řešte rovnici
(a) $\mathrm{i}z^2 + (3 - 2\mathrm{i})z - 6 = 0$; (b) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = 0$.

[(a) 2, 3i; (b) i.]

3. Najděte všechny kořeny rovnice
(a) $z^4 = 1$; (b) $z^4 = -1$ a napište je v algebraickém tvaru.

$$\left[\text{(a) } 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}; \text{ (b) } \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i}.)\right]$$

4. Znázorněte řešení minulého cvičení graficky! Co tvoří koncové body vektorů, znázorňujících kořeny rovnic?
[V obou případech vrcholy čtverce o úhlopříčce délky 2; (a) jsou vrcholy na osách souřadnic, (b) jsou vrcholy na přímkách

$$y = x, y = -x.]$$

5. Napište rovnici, která má všech osm kořenů ze cvičení 3 za řešení!

$$[z^8 = 1.]$$