Komplexní čísla a funkce

Úvod

In: Jiří Jarník (author): Komplexní čísla a funkce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 4–6.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403629

ÚVOD

Definici a základní vlastnosti komplexních čísel jste poznali ve škole. Víte, že komplexní čísla nejsou o nic méně — a o nic více — „skutečná" než čísla reálná. S jejich pomocí se řeší úlohy v aplikované matematice, fyzice i technice, které by jinak bylo možno řešit jen s velkými obtížemi.

Než začneme řešit příklady, na nichž si ukážeme různé vlastnosti komplexních čísel, zopakujme si alespoň stručně jejich definici i definice základních operací.

Definice. *Jsou-li a_1, a_2 reálná čísla, pak uspořádaná dvojice (a_1, a_2) se nazývá komplexní číslo. První číslo ve dvojici se nazývá reálná část, druhé číslo imaginární část komplexního čísla.*

Dvě komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se sobě navzájem jejich reálné části i jejich imaginární části:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

znamená totéž jako dvě rovnosti reálných čísel $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Součtem komplexních čísel (a_1, a_2) a (b_1, b_2) nazýváme komplexní číslo $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Součinem komplexních čísel (a_1, a_2) a (b_1, b_2) nazýváme komplexní číslo $(a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

Prostou (absolutní) hodnotou komplexního čísla (a_1, a_2) nazýváme reálné (nezáporné) číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Tyto definice tvoří základ algebry komplexních čísel.

Dosadíme-li za imaginární části všech komplexních čísel v našich definicích nulu, dostaneme definice, které se liší jen formou zápisu od definicí rovnosti a aritmetických operací pro reálná čísla. Můžeme proto ztotožnit komplexní číslo $(a, 0)$ s reálným číslem a. Tímto ztotožněním se množina reálných čísel stává částí množiny čísel komplexních, což je pro naše další úvahy důležité.

Pamatujete si jistě, že komplexní číslo $(0, 1)$ označujeme obvykle písmenem i. Podle definice sčítání a násobení komplexních čísel můžeme pak každé komplexní číslo (a_1, a_2) psát ve tvaru $a_1 + a_2\mathrm{i}$, neboť $a_1 + a_2\mathrm{i} = (a_1, 0) + (a_2, 0) \,.$ $.(0, 1) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, a_2)$.

Komplexní číslo můžeme znázornit vektorem v rovině. Jinými slovy, je-li dána v rovině pevně zvolená soustava souřadnic Pxy, můžeme každý vektor vyjádřit (uspořádanou) dvojicí reálných čísel (a_1, a_2). Vektor (a_1, a_2) přiřadíme komplexnímu číslu $a_1 + a_2\mathrm{i}$. Přesvědčili jste se ve škole, že pojmy rovnosti, součtu a prosté hodnoty komplexních čísel jsou při tomto přiřazení zachovány, tj., že dvěma komplexním číslům sobě rovným odpovídá týž vektor, součtu dvou komplexních čísel odpovídá vektor, vzniklý sečtením vektorů, odpovídajících daným komplexním číslům atd. Podobně jste viděli, že i násobení komplexních čísel lze snadno znázornit, a to tzv. symbolickým součinem vektorů. Tohoto přiřazení užíváme často k názornému zobrazení komplexních čísel.

V řadě úloh je výhodné použít tzv. goniometrického vyjádření komplexního čísla. Tento pojem znáte ze školy. Připomeňme tedy jen, že je-li komplexní číslo $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ vyjádřeno v goniometrickém tvaru např.

$$a = |a| (\cos\alpha + \mathrm{i} \sin\alpha),$$

pak α je tzv. argument (někdy říkáme též amplituda) čísla a. Srovnáním s algebraickým tvarem čísla a dostaneme ovšem podle definice rovnosti komplexních čísel

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}, \qquad \sin\alpha = \frac{a_2}{|a|}.$$

Při znázornění komplexních čísel vektory, o němž jsme hovořili výše, objeví se argument komplexního čísla jako úhel mezi reálnou osou (osou x) a vektorem, znázorňujícím číslo a. Pro nulu není ovšem argument definován.