Analytická geometrie a nerovnosti

Výsledky cvičení

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1,1. Věta 1,1 má tyto obdoby: Je-li $a \leqq b$, $b \leqq c$, je $a \leqq c$. Je-li $a \leqq b$, $b < c$, je $a < c$. — Věty 1,2 a 1,3 přejdou v tyto tvary: Je-li $a \leqq b$, je $a + c \leqq b + c$ a také $a - c \leqq b - c$. Věta 1,4 zde zní: Je-li $a \leqq b$, $c \leqq d$, je $a + c \leqq b + d$. Je-li $a \leqq b$, $c < d$, je $a + c < b + d$. **1,2.** Přejde v rovnici $0 = 0$. **1,3.** Tvrzení je správné. Kdyby bylo $ac > bc$, bylo by buď zároveň $c > 0$ i $a - b > 0$, nebo zároveň $c < 0$ i $a - b < 0$, což obojí odporuje předpokladům. **1,4.** a) V horní polorovině. b) V dolní polorovině. c) V obou polorovinách zároveň. **1,5.** Je-li $q > 0$, je horní polorovina charakterizována nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqq 1$ a dolní polorovina nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \leqq 1$. Je-li $q < 0$, je horní polorovina charakterizována nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \leqq 1$, dolní polorovina nerovností $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqq 1$. **1,6.** Každá ostrá nerovnost tu charakterizuje vnitřek příslušné poloroviny, tj. všechny body poloroviny s výjimkou těch, které leží na její hraniční přímce. **1,7.** $x - y\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1 \leqq 0$; užitím vzorců (1,13) a (1,4) určíme nejdříve rovnici hraniční přímky a pak postupujeme podle některé z vět 1,12 až 1,16. **1,8.** $3x + 5y - 13 \leqq 0$; viz návod ve cvičení 1,7, jen místo vzorce (1,4) užijeme vzorce (1,14). **1,9.** a) Horní polorovina vyťatá přímkou, která prochází body [0; 3] a [4; 0]. b) Dolní polorovina vyťatá přímkou, která prochází bodem [0; 1] a má směrový úhel $\varphi = 45°$. c) Levá polorovina, jejíž hraniční přímka prochází bodem [2; 0] a je rovnoběžná s osou y. **1,10.** a) $y = \frac{x}{3}$; funkce je rostoucí, neboť směrnice je $k = \frac{1}{3} > 0$. b) $y = 1 - x$; funkce je klesající, neboť směrnice je $k = -1 < 0$. c) $y = 2$, funkce není ani rostoucí, ani klesající.

2. kapitola

2,1. Všechny body, které leží současně v horních polorovinách vyťatých přímkami $x - y = 0$ a $x + y = 0$, tedy v pravém úhlu, jehož ramena jsou polopřímky o rovnicích (2,3). **2,2.** Všechny body s výjimkou bodů ležících v pravém úhlu, jehož ramena jsou polopřímky o rovnicích (2,3). **2,3.** Výsledek ve formě rozepsání dané funkce na jednotlivé polopřímky a úsečky zní: a) Pro $x < 0$ je $y = x$, pro $0 \leqq x < 1$ je $y = 0$ a pro $x \geqq 1$ je $y = x - 1$. b) Pro $x < -1$ je $y = 3x + 6$, pro $-1 \leqq x < 3$ je $y = -x + 2$ a pro $x \geqq 3$ je $y = x - 4$. **2,4.** Pro $x \leqq 0$ je v obou případech $y = 0$; pro $x > 0$ je a) $y = x$, b) $y = 2x$. **2,5.** Garáže je třeba postavit mezi obcemi B a C ve vzdálenosti 1 km od B; minimum neproduktivní dráhy je potom 51 km. Volíme-li při grafickém znázornění podle vzoru příkladu 2,6 počátek v obci B, je obdobou vztahu (2,16) rovnice $y = 3|x + 6| + 2|x| + 4|x - 8|$, **2,6.** Značí-li y množství vody v nádrži měřené v m^3, je $y = \frac{v}{2}|x| - \frac{v}{2}\left|x - \frac{10}{v}\right| + 5$. **2,7.** Jde o graf funkce $y = \frac{|x - 8|}{2} + \frac{9x}{2} - 4$ v intervalu $0 \leqq x \leqq 16$; graf se skládá ze dvou úseček se společným krajním bodem [8; 32], nanášíme-li na osu x hodiny a na osu y mzdu.

3. kapitola

3,1. $0 \leqq x \leqq 1$ a $0 < x < 1$. **3,2.** Správné jsou případy a), c), d), f), g) nesprávné jsou b), e). **3,3.** Pokaždé je $d = b - a$. **3,4.** Podle nerovností (3,2) je $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$; odtud plyne $a \leqq \dfrac{x+y}{2} \leqq b$. Pro ostatní intervaly stačí nerovnosti (3,2) nahradit nerovnostmi (3,3) až (3,5). **3,5.** Zřejmě je $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Na rozdíl od předpokladů ve cvičení 3,4 nemusí zde čísla a, b být prvky zkoumaného intervalu, neboť tento interval nemusí být uzavřený. **3,6.** Interval s krajními body $a < b$ obsahuje podle cvičení 3,5 aspoň jeden prvek $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$; ze stejného důvodu obsahuje i prvek $c_2 = \dfrac{a+c_1}{2}$, dále prvek $c_3 = \dfrac{a+c_2}{2}$, ... atd.; obsahuje tedy nekonečně mnoho prvků $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots$, kde je $c_{n+1} = \dfrac{a+c_n}{2}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ atd. Je tedy každý takový interval množina nekonečná. Tím spíš intervaly nekonečné délky jsou množiny nekonečné. **3,11.** a) $(0; 2)$. b) $(0; 2\rangle$. c) $\langle 1; 5\rangle$. d) $(3; 5)$. **3,12.** a) $-1 < x < 0$ a $0 < x < 1$ čili $0 \neq |x| < 1$. b) $0 \leqq x \leqq 3$. c) $a < x < +\infty$. **3,17.** a) $(1; 2)$. b) $(1; 2)$. c) $\langle 1; 2)$. **3,18.** a) $\mathbf{C} = (0; 4)$, $\mathbf{D} = \emptyset$. b) $\mathbf{C} = \langle 0; 5\rangle$, $\mathbf{D} = \langle 2; 3\rangle$. **3,19.** $(-\infty; +\infty)$. **3,20.** a) Průnikem intervalů $\mathbf{B}_n$ je množina obsahující jediný prvek, totiž číslo 0. b) Průnikem intervalů $\mathbf{B}_n'$ je množina prázdná. **3,21.** a) Tvrzení není správné, neboť u tupoúhlého trojúhelníka neleží průsečík jeho výšek v průniku polorovin trojúhelník vytvářejících. b) Tvrzení je správné. Průsečík os vnitřních úhlů je střed kružnice trojúhelníku vepsané; jí ohraničený kruh leží v každé ze tří polorovin vytvářejících tento trojúhelník a tedy tím spíše její střed leží v průniku těchto polorovin.

4. kapitola

4,1. a) Nerovnost nemá řešení. b) $x \leqq \frac{1}{5}$ nebo $x \geqq \frac{11}{3}$ čili $x \in \left[\left(-\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \left\langle\frac{11}{3}; +\infty\right)\right]$. c) $-5 < x < -\frac{1}{3}$ čili $x \in \left(-5; -\frac{1}{3}\right)$. d) $x \leqq -\frac{3}{2}$ nebo $x \geqq 1$ čili $x \in \left[\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 1; +\infty)\right]$. **4,2.** $x < -1$ nebo $x > \frac{3}{2}$, množinově zapsáno formulí (4,5). **4,3.** Položte $f(x) = |x - a|$, $g(x) = b$. Vychází: a) $a - b < x < a + b$ čili $x \in (a - b; a + b)$. b) $x < a - b$ nebo $x > a + b$ čili $x \in [(-\infty; a - b) \cup (a + b; +\infty)]$.

4,4. Jediné řešení $x = 2$. Jde o tři přímky $y = 2x + 3$, $y = 3x + 1$, $y = x + 5$, procházející bodem $[2; 7]$, jež mimo tento bod nesplňují požadované nerovnosti. **4,5.** $3 < x < 6$ čili $x \in (3; 6)$. Jde o ty body paraboly $y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2$, které leží pod osou x; vrchol paraboly je bod $V\left[\frac{9}{2}; -\frac{9}{4}\right]$. **4,6.** Jde o parabolu o rovnici $y - \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, která má vrchol $V\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ a prochází body $A[0; 1]$ a $B[-1; +1]$; všechny její body leží nad osou x.

5. kapitola

5,1. 1000 kusů výrobku A a 3000 kusů výrobku B při zisku 7 000 000,— Kčs. **5,2.** 8000 barytových desek a 4000 tvárnic při zisku 52 000,— Kčs. (Místo sedmiúhelníka v obr. 25 máme zde konvexní šestiúhelník při stejném počtu sedmi nerovností, neboť tři hraniční přímky potřebných polorovin tu procházejí jedním bodem.) **5,3.** 10 strojů typu A, žádný stroj typu B a 10 strojů typu C při minimální roční údržbě 300,— Kčs. **5,4.** 620 lahví litrových, 450 lahví po 0,7 l a 930 lahví půllitrových při zisku 17 798,— Kčs a nákupní ceně 37 892,— Kčs.