5. kapitola

SOUSTAVY NEROVNOSTÍ O DVOU NEZNÁMÝCH

V této kapitole se soustředíme výlučně na úlohy z praxe. Pro přehlednost výkladu i obrázků jsou však v našich příkladech vhodně volena konkrétní čísla, aby myšlenkový postup řešení nebyl zastíněn zdlouhavými numerickými výpočty.

Příklad 5,1. V sériové výrobě dvou druhů výrobků A, B je výrobní náklad jednoho kusu výrobku A 1000,— Kčs a jednoho kusu výrobku B 3000,— Kčs. Prodejní cena jednoho kusu výrobku A je 3000,— Kčs a jednoho kusu výrobku B 4000,— Kčs. Velkosklad odkoupí nejvýše 6000 kusů výrobku A a 4000 kusů výrobku B. Kapacita výroby je rovněž omezena, maximálně je možno vyrobit 8000 kusů obou výrobků A i B dohromady. Úkolem je rozvrhnout za těchto podmínek výrobu tak, aby zisk výrobce byl co největší.

Zřejmě máme stanovit počet kusů výrobků A i B, které máme vyrobit; jde tedy o dvě neznámé. Písmenem x označme hledaný počet kusů výrobku A, písmenem y podobně počet kusů výrobku B. Při řešení musíme přihlédnout k tomu, kolik kusů za daných podmínek vůbec vyrobit můžeme. Teprve potom, až to budeme vědět, přistoupíme k hledání takového řešení, které je pro výrobce nejvýhodnější (optimální). Sledujme tedy nejdřív jednotlivé podmínky dané úlohy.

Při zvoleném označení dostáváme především

$$x \geqq 0\,, \qquad y \geqq 0\,, \tag{5,1}$$

neboť záporný počet výrobků nevyrábíme. Dále je zřejmé, že nemá smysl vyrábět víc kusů, než kolik jich prodáme. Zde je tento odbyt dán tím, že velkosklad převezme nejvýše 6000 kusů výrobku A a 4000 kusů výrobku B. To vede k nerovnostem

$$x \leqq 6000\,, \qquad y \leqq 4000\,. \tag{5,2}$$

Protože na druhé straně nemůžeme vyrobit více než 8000 kusů výrobků A i B dohromady, musíme počítat s nerovností

$$x + y \leqq 8000\,. \tag{5,3}$$

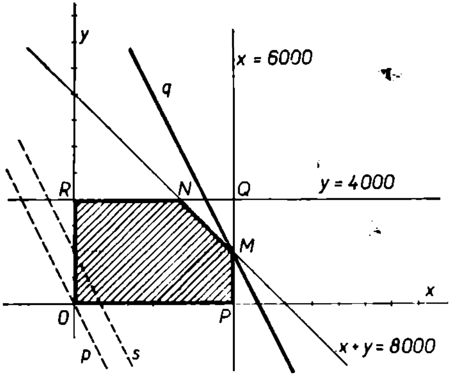
(Toto omezení plyne z povahy výroby. Může být způsobeno různými okolnostmi, například tím, že stroje, jichž k výrobě užíváme, větší zatížení nesnesou; jejich opotřebení by mohlo být takové, že by už další výrobu nevydržely, nebo by vyráběly zmetky.)

Zastavme se teď na chvíli u analytického vyjádření výrobních možností, zapsaného nerovnostmi (5,1) až (5,3) Znázorněme si je geometricky na obr. 24 dříve, než přistoupíme k otázce ceny a zisku. (Jednotlivé dílky měřítek na osách souřadných v obr. 24 neznamenají ovšem jednotky, ale tisíce.) Jde tu vesměs o lineární nerovnosti, jejichž geometrický význam jsme poznali v kapitole 1. Podle věty 1,14 první z nerovností (5,1) charakterizuje pravou polorovinu určenou hraniční přímkou o rovnici $x = 0$ (osou y) a první z nerovností (5,2) levou polorovinu určenou hraniční přímkou o rovnici $x = 6000$. Z toho už plyne, že přípustné řešení musíme na obr. 24 hledat jen mezi takovými body, které leží v pruhu ohraničeném zmíněnými dvěma rovnoběžkami o rovnicích $x = 0$ a $x = 6000$. Zbývající dvě nerovnosti ze vztahů (5,1) a (5,2) znamenají podobně pruh ohraničený dvěma rovnoběžkami o rovnicích $y = 0$ (tj. osa x) a $y = 4000$; to plyne z vět 1,12 a 1,13, neboť zmíněný pruh je množinovým průnikem příslušných polorovin. Vcelku tedy vidíme, že omezení plánů výroby, stanovené čtyřmi nerovnostmi (5,1) a (5,2), je geometricky znázorněno body obdélníka $OPQR$, který je průnikem obou výše zmíněných pruhů; v úvahu přicházejí ovšem jak vnitřní body tohoto obdélníka, tak i body hraniční, tj. body ležící na jeho obvodu (neboť nerovnosti (5,1) a (5,2) jsou neostré). Poslední nerovnost, totiž nerovnost (5,3), můžeme přepsat na tvar $x + y - 8000 \leqq 0$ a použít pak věty 1,15, kde klademe $a = b = 1 > 0$; jsou tedy splněny předpoklady věty 1,15 a z ní plyne, že nerovnost (5,3) je zobrazena v obr. 24 dolní polorovinou, určenou přímkou o rovnici $x + y = 8000$. Tato přímka protíná obdélník $OPQR$ v úsečce MN, jejíž krajní body M [6000; 2000] a N [4000; 4000] určíte snadným počtem. Polorovina, určená nerovností (5,3), vytíná z obdélníka $OPQR$ pětiúhelník $OPMNR$, který je na obr. 24 vyšrafován. Souřadnice bodů tohoto pětiúhelníka a jenom těchto bodů splňují všechny nerovnosti (5,1) až (5,3), jež naši výrobu omezují; proto říkáme, že body tohoto pětiúhelníka (vnitřní i na hranici) znázorňují tzv. *přípustné plány* naší výroby. Tomu je třeba rozumět tak, že každý bod tohoto pětiúhelníka představuje jedno skutečně realizovatelné rozvržení naší výroby.

Za zmínku stojí, že pětiúhelník $OPMNR$ jakožto průnik pěti polorovin určených nerovnostmi (5,1) až (5,3), je podle příkladu 3,7 množinou konvexní.

Po této přípravě přistupme konečně k řešení naší úlohy, formulované na začátku příkladu 5,1.

Protože výroba připouští nekonečně mnoho řešení, znázorněných všemi body pětiúhelníka *OPMNR*, je nasnadě myšlenka vybrat z nich taková řešení, která jsou z určitého hlediska výhodná, případně nejvýhodnější. V našem příkladě jde o výrobu s maximálním obchodním ziskem.



Obr. 24

Z daných podmínek úlohy bezprostředně plyne, že zisk z prodeje jednoho kusu výrobku A je 2000,— Kčs, neboť jej vyrábíme za 1000,— Kčs a prodáváme za 3000,— Kčs. Podobně prodejem jednoho kusu výrobku B získá výrobce 1000,— Kčs. Celkový zisk při x kusech výrobku A a y kusech výrobku B je tedy v Kčs vyjádřen číslem u, kde je

$$u = 2000x + 1000y. \qquad (5,4)$$

Naším úkolem je najít taková čísla x, y vyhovující nerovnostem (5,1) až (5,3), aby lineární funkce (5,4) dávala maximální možné u. To je matematická formulace úlohy našeho příkladu 5,1. Protože rovnice (5,4) znamená geometricky přímku, je geometrické vyjádření tohoto úkolu následující: ze všech takových přímek o rovnici (5,4), které procházejí aspoň jedním (vnitřním nebo hraničním) bodem pětiúhelníka $OPMNR$, najít v obr. 24 tu, pro kterou je číslo u maximální.

Při různých hodnotách u jsou ovšem všechny přímky o rovnicích (5,4) navzájem rovnoběžné (mají stejnou směrnici $k = -2$). V obr. 24 je jedna z nich označena s. Přitom číslo u je přímo úměrné úseku, který každá taková přímka vytíná na ose y. Musíme tedy ze všech těchto rovnoběžek s přímkou s najít tu, která má společný aspoň jeden bod s konvexním pětiúhelníkem $OPMNR$ a která přitom vytíná maximální možný úsek na ose y. Vzpomeneme-li si na větu 3,2, vidíme okamžitě, že hledaná přímka je jednou z opěrných přímek konvexního pětiúhelníka $OPMNR$, které jsou rovnoběžné s přímkou s. Jedna z těchto přímek prochází počátkem O a dává minimální $u = 0$, takže nás nezajímá; v obr. 24 je to přímka p. Druhá z nich, přímka q, prochází vrcholem M [6000; 2000], jehož souřadnice dosazeny do rovnice (5,4) dávají $u = 14\,000\,000$,— Kčs; její rovnice (bez krácení) zní

$$2000x + 1000y = 14\,000\,000\,.$$

To znamená, že souřadnice bodu M řeší naši úlohu. Geometrickou cestou jsme tedy našli toto optimální řešení úlohy z příkladu 5,1:

Maximálního zisku dosáhneme tehdy, když vyrobíme šest tisíc kusů výrobku A a dva tisíce kusů výrobku B; příslušný maximální zisk bude čtrnáct miliónů Kčs.

Tím je příklad 5,1 v podstatě dokončen. Jeho obměna je cvičení 5,1, na němž si můžete zkontrolovat, zda jste věci řádně porozuměli. Zdůrazňujeme ještě, že celý úkol zde řeší právě *opěrná* přímka q konvexního pětiúhelníka

OPMNR. Podobně je tomu i v dalších příkladech. Proto jsme o těchto pojmech mluvili v kapitole 3. Kdybychom místo opěrné přímky q zvolili například přímku s ní rovnoběžnou procházející bodem N, dala by nám sice možnost nekonečně mnoha řešení (totiž všechny body úsečky NP, v níž tato přímka protíná pětiúhelník $OPMNR$), ale ošidili bychom výrobní podnik o dva milióny Kčs; přesvědčíte se o tom dosazením souřadnic bodu N do rovnice (5,4). Kdybychom na druhé straně chtěli zisk zvýšit řekněme na 16 000 000,— Kčs, nepodařilo by se nám to, protože rovnice (5,4) by zde měla tvar $16\,000\,000 = 2000x + 1000y$ a představovala by přímku, která neprotíná pětiúhelník $OPMNR$; průnik přímky s pětiúhelníkem by tu byla množina prázdná. Tak bychom marně hledali řešení mimo podmínky přípustných plánů. Důležité jsou tedy při těchto úlohách právě opěrné přímky příslušných množin.

Funkce u, daná zde rovnicí (5,4), nazývá se v lineárním programování odborně *účelová funkce*. Úkolem pak je najít takové řešení, které dává optimální hodnotu účelové funkce. Tím rozumíme maximální nebo minimální hodnotu účelové funkce za příslušných podmínek, stanovených přípustnými plány. V příkladě 5,1 představovala účelová funkce zisk. V jiných příkladech a v dalších odvětvích hospodářství může účelová funkce mít nejrůznější význam. Nejde vždycky o maximální zisk. Někdy jde například o minimální náklady spojené s údržbou provozu (viz příklad 5,3), jindy o nejrychlejší výrobu (např. při plnění plánů v dopravě) nebo optimální využití počtu pracovních sil apod. V dalším příkladě, jehož účelem je ukázat řešení o něco málo složitějšího úkolu než prve, zůstaneme však pro jednoduchost u hledání maximálního zisku. Výklad bude však už mnohem stručnější než dosud.

Příklad 5,2. Z barytu a cementu chceme vyrábět barytové desky a speciální tvárnice. Na 1000 desek spotřebujeme 5 t (tun) cementu a 1 t barytu, na 1000 tvárnic 2 t cementu a 2 t barytu. Nákupní cena cementu je 1000,— Kčs za 1 t, nákupní cena barytu 6000,— Kčs za 1 t. Pro výrobu máme k dispozici 45 t cementu a 20 t barytu. Barytové desky budeme prodávat po 16,— Kčs za kus, tvárnice po 17,— Kčs za kus. Ale odběr na trhu je omezen; víme, že prodáme nejvýše 8000 kusů desek a 9000 kusů tvárnic. Kapacita výroby je rovněž omezena, můžeme vyrobit nejvýše 12 000 desek i tvárnic dohromady. Za těchto podmínek máme rozvrhnout výrobu tak, aby zisk výrobce byl co největší.

Na první pohled je patrné, že k řešení tohoto úkolu nějaké kupecké počty nestačí. Ale užitím analytické geometrie to vyřešíme snadno.

Zřejmě je třeba stanovit, kolik barytových desek a tvárnic budeme vyrábět. Označme tyto neznámé hodnoty zase písmeny x, y, ale v tisících kusech. Písmeno x neznamená tedy počet desek, ale počet tisíců těchto desek; podobně y značí počet tisíců tvárnic. Stejně jako v předcházejícím příkladě máme i zde

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0. \tag{5,5}$$

Odběr trhu omezuje naši výrobu nerovnostmi

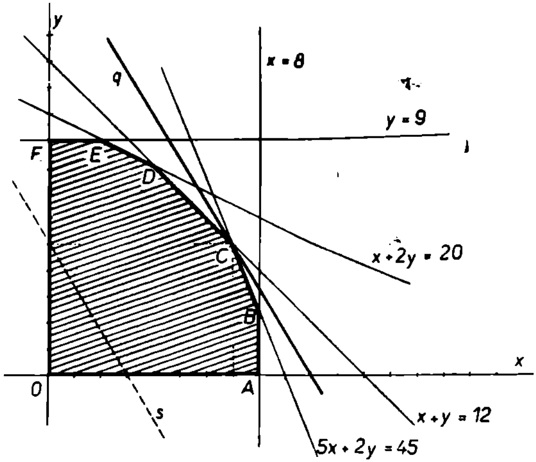
$$x \leqq 8, \qquad y \leqq 9. \tag{5,6}$$

neboť nemá smysl vyrábět víc kusů, než kolik jich prodáme. Obdobné k předcházejícímu příkladu 5,1 je zde i omezení dané kapacitou výroby, jež vede k nerovnosti

$$x + y \leqq 12\,. \tag{5,7}$$

Ale na rozdíl od předcházejícího příkladu přibudou zde ještě další dvě lineární nerovnosti. Musíme totiž přihlédnout k zásobám cementu a barytu. Z podmínky, že na 1000 desek spotřebujeme 5 t cementu a na 1000 tvárnic 2 t cementu, vychází nerovnost

$$5x + 2y \leqq 45, \tag{5,8}$$



Obr. 25

neboť víc než 45 t cementu nemáme. Spotřeba barytu je podobně omezena nerovností

$$x + 2y \leqq 20, \tag{5,9}$$

neboť na 1000 desek spotřebujeme 1 t barytu a na 1000 tvárnic 2 t barytu, jehož zásoba je 20 t.

Sedm nerovností (5,5) až (5,9) vymezuje přípustné plány naší výroby. Znázorníme-li si je geometricky na obr. 25, vidíme, že jde o průnik sedmi polorovin, což je konvexní sedmiúhelník $OABCDEF$, který je na obr. 25 vyšrafován. Dojdeme k němu stejnou úvahou jako k pětiúhelníku $OPMNR$ v předcházejícím obr. 24. Strany tohoto sedmiúhelníka leží v hraničních přímkách polorovin, určených nerovnostmi (5,5) až (5,9); jsou to osy x, y a pět přímek o rovnicích $x = 8$, $y = 9$, $x + y = 12$, $5x + 2y = 45$, $x + 2y = 20$. K stanovení průniku těchto polorovin užijte tak jako v předcházejícím příkladě zase vět 1,12 až 1,15 z první kapitoly a příkladu 3,7 z třetí kapitoly.

Sestavme nyní účelovou funkci, udávající zisk u. Snadno zjistíte, že při výrobě 1000 desek spotřebujeme cementu za 5000,— Kčs a barytu za 6000,— Kčs, celkem nás tedy výroba jednoho tisíce desek stojí 11 000,— Kčs. Protože desky prodáváme za 16 000,— Kčs, získáme při jejich výrobě 5000,— Kčs. Výroba tisíce tvárnic vynese podobně 3000,— Kčs, neboť cementu zde spotřebujeme za 2000,— Kčs, barytu za 12 000,— Kčs a prodáváme je za 17 000,— Kčs. Celkový zisk při x tisících desek a y tisících tvárnic je tedy dán rovnicí

$$u = 5000x + 3000y\,.$$

Tím je dána účelová funkce. Při různých hodnotách u jsou všechny tyto přímky spolu rovnoběžné, jejich směrnice je $k = -\frac{5}{3}$. Jedna z nich, přímka s, odpovídající hodnotě $u = 15\,000$,— Kčs, je v obr. 25 zakreslena. Optimální řešení podává ovšem opěrná přímka q konvexního sedmiúhelníka $OABCDEF$ protínající jej v jediném bodě C a rovnoběžná s přímkou s; ze všech přímek, rovnoběžných s přímkou s, má totiž právě přímka q tu vlastnost, že její úseky na osách souřadných jsou maximální a že zároveň jejich průnik s uvedeným sedmiúhelníkem není množina prázdná. Příslušné u pro přímku q stanovíme z podmínky, že tato přímka prochází bodem C. Protože bod C je průsečíkem přímek o rovnicích $x + y = 12$ a $5x + 2y = 45$, dostaneme jeho souřadnice řešením této soustavy dvou rovnic; vychází $x = 7$, $y = 5$. Dosazením těchto hodnot do rovnice pro u vychází $u = 50\,000$, rovnice přímky q (bez krácení) tedy zní

$$50\,000 = 5000x + 3000y.$$

Bod C [7; 5] řeší tedy naši úlohu při zisku $u = 50\,000$ korun. Slovy vyjádřeno:

Maximálního zisku 50 000,— *Kčs dosáhneme tím, že vyrobíme* 7000 *kusů barytových desek a* 5000 *kusů tvárnic.*

Analytickou geometrií v rovině můžeme někdy řešit i úkoly o třech a více neznámých. Ukážeme si příklad na řešení systému lineárních nerovností o třech neznámých.

Příklad 5,3. K vybavení nové kanceláře je třeba koupit 20 psacích strojů. Pro tento nákup je k dispozici 45 000,— Kčs. Jsou nabízeny tři typy strojů; typ A po 2000,— Kčs za kus s roční údržbou v hodnotě 20,— Kčs pro každý stroj, typ B po 2250,— Kčs za kus s roční údržbou 16,— Kčs pro každý stroj a typ C po 2500,— Kčs za kus s roční údržbou 10,— Kčs pro každý stroj. Vedení podniku se rozhodne koupit nejvýše 5 strojů typu A, protože nechce koupit mnoho nejlacinějších a tedy i nejméně kvalitních strojů. Jak se má nákup zařídit, aby celkové náklady na roční údržbu strojů byly co nejmenší?

Počet strojů typu A, B, C označme po řadě x, y, z. Hned z první věty textu úlohy vychází rovnice

$$x + y + z = 20. \qquad (5,10)$$

Protože stroje typu A jsou po 2000,— Kčs, je cena x kusů dána číslem $2000x$. Nákupní cena strojů typu B je podobně dána číslem $2250y$ a strojů typu C číslem $2500z$. Protože to dohromady nesmí přesáhnout 45 000 korun, máme nerovnost

$$2000x + 2250y + 2500z \leqq 45\,000. \qquad (5,11)$$

Z rozhodnutí nenakoupit příliš mnoho nejlacinějších strojů (typu A) plyne

$$x \leqq 5. \qquad (5,12)$$

Přidáme-li k tomu samozřejmý požadavek

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad z \geqq 0, \qquad (5,13)$$

máme v podstatě vymezeny přípustné plány nákupu. Příslušná účelová funkce je zde

$$u = 20x + 16y + 10z \qquad (5,14)$$

a znamená, jak každý snadno zjistí, roční náklady údržby všech zakoupených strojů, vyjádřené v Kčs.

Matematická formulace naší úlohy tedy zní: při podmínkách (5,10) až (5,13) stanovit x, y, z tak, aby hodnota u, daná rovnicí (5,14), byla co nejmenší.

Rovnice (5,10) dovoluje vyjádřit jednu neznámou pomocí ostatních, například

$$z = 20 - (x + y)\,, \qquad (5,15)$$

což dosazeno do nerovnosti (5,11) a do poslední nerovnosti (5,13) dává podmínky

$$500x + 250y \geqq 5000, \qquad 20 - x - y \geqq 0.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme konečně spolu s prvními dvěma nerovnostmi (5,13) celkem pět následujících podmínek určujících přípustné plány nákupu:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geqq 20, \\ x + y &\leqq 20, \\ x &\leqq 5, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned} \tag{5,16}$$

Tyto nerovnosti už umíme znázornit užitím analytické geometrie v rovině, neboť jde o dvě proměnné x, y. Dostáváme tak pět polorovin, jejichž průnikem je zde trojúhelník MNP (v obr. 26 vyšrafovaný), který je obrazem přípustných plánů. Uvedené poloroviny i s jejich hraničními přímkami stanovíte už snadno sami na základě vět 1,13 až 1,15 z kapitoly 1; pozor na to, že na rozdíl od předcházejících příkladů první nerovnost (5,16) zde dává horní polorovinu určenou přímkou o rovnici $2x + y = 20$.

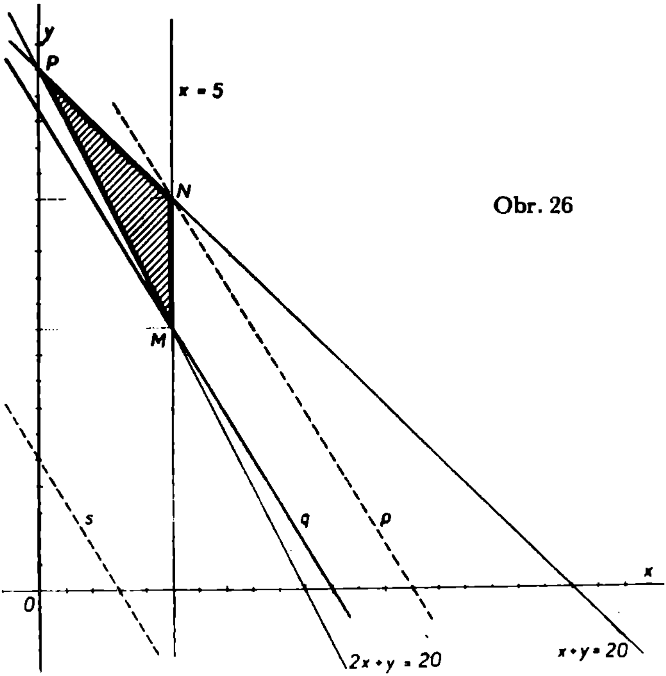
Účelová funkce (5,14) přejde po dosazení z rovnice (5,15) ve tvar

$$u = 10x + 6y + 200$$

čili

$$v = 10x + 6y, \tag{5,17}$$

kde klademe $v = u - 200$. Má-li být u minimální, musí být v zřejmě také minimální a obráceně. Číslo v je opět přímo úměrné úsekům, které na osách x, y vytínají jednotlivé navzájem rovnoběžné přímky o rovnicích (5,17). Jedna z nich, totiž přímka s, je na obr. 26 zakreslena. Naši úlohu tak jako dřív řeší opěrné přímky trojúhelníka MNP, které jsou rovnoběžné s přímkou s. Jedna z nich, přímka p, dává maximální přípustnou hodnotu v, druhá, přímka q, minimální hodnotu v a tu právě hledáme. Přímka q prochází vrcholem M [5; 10], jehož souřadnice určíme řešením soustavy rovnic $x = 5$, $2x + y = 20$. S použitím rovnice (5,15) dostáváme pak jako řešení naší úlohy hodnoty $x = 5$, $y = 10$, $z = 5$, které dosazeny do účelové funkce (5,14) dávají $u = 310$. Řešení příkladu (5,3) tedy zní: *Nakoupíme* 5 *strojů typu* A, 10 *strojů typu* B *a* 5 *strojů typu* C, *čímž dosáhneme minimální roční údržby* 310,— *Kčs.*



Obr. 26

Připomeňme, že tuto úlohu je možno řešit přímo ve třech proměnných obdobně jako zde, ale samozřejmě užitím prostorové analytické geometrie.

Prakticky důležitá je však tato poznámka: vztah účelových funkcí *u* a *v* z rovnic (5,14) a (5,17) je třeba pozorně sledovat. Zde minimu *u* odpovídalo minimum *v* a maximu *u* odpovídalo maximum *v*. Někdy se však může stát (viz cvičení 5,4), že vyloučením třetí neznámé minimu jedné účelové funkce odpovídá maximum druhé a obráceně, že tedy úloha, směřující například k hledání jistého minima, se vyloučením některé neznámé převede na hledání maxima. Příklad ze cvičení 5,4 vám jistě nebude dělat potíže; jen pro úplnost připomínám, že je vyřešen v Setzerově článku, uvedeném zde v seznamu literatury.

Dále je nutno upozornit čtenáře ještě na jednu okolnost, kterou jsme zde dosud nenápadně přešli. Kdybychom například nějak pozměnili volbu konkrétních čísel v textu našich příkladů, mohlo by se docela dobře stát, že řešením nebudou čísla celá, že v konečných výsledcích by se vyskytly zlomky. Proč by např. souřadnice bodu *M* v posledním obr. 26 musela být při celkem nepatrných změnách daných údajů právě čísla celá? Ale kdyby vyšly zlomky, nemělo by to praktický efekt — nelze přece koupit 2 a půl psacího stroje. V takových případech řešíme však naši úlohu stejnou metodou jako zde, ale pouze s tím rozdílem, že místo bodu *M* najdeme v trojúhelníku *MNP* na obr. 26 takový bod s celočíselnými souřadnicemi, který je k opěrné přímce *q* nejblíž. Body s celočíselnými souřadnicemi se nazývají v matematice odborně *mřížové body* a v souvislosti s lineárním programováním se o nich dočtete bližší podrobnosti v knížce Fr. Veselého citované v uvedené literatuře. Mřížové body hrály také odedávna důležitou roli v teorii čísel.

Závěrem si řekněme, že úlohy z příkladů 5,1 až 5,3 patří do tzv. *lineárního programování*. Lineárním programováním rozumíme úlohu najít n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujících m lineárním nerovnostem

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &\leqq A\,, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n &\leqq B\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n &\leqq M\,, \end{aligned}$$

tak, aby bylo $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ a aby lineární funkce

$$u = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n$$

nabývala maximální nebo minimální hodnoty. Přitom všechna písmena zde zapsaná znamenají ovšem reálná čísla.

V našich jednoduchých příkladech jsme měli dvě nebo tři neznámé, a proto jsme je mohli řešit analytickou geometrií; tohoto způsobu řešení se v praxi při malém počtu neznámých skutečně užívá. Snadno si však domyslíte, že u velkých technických, hospodářských nebo organizačních problémů přesahuje počet neznámých $x_1, x_2 \ldots, x_n$ několik desítek i více. Často je dokonce potřeba najít řešení rychle (např. v dopravě). V tom případě nelze uplatnit zdlouhavé počtářské nebo geometrické metody a je nutno vzít na pomoc stroje, hlavně samočinné počítače, jejichž rozvoji právě vděčíme za široké užití lineárního programování.

Cvičení

5,1. Ve výrobě jsou dva druhy výrobků A, B. Zisk výroby na jednom kusu výrobku A je 1000,— Kčs a na jednom kusu výrobku B 2000,— Kčs. Odběratelé koupí nejvýše 2000 kusů výrobku A a 3000 kusů výrobku B. Celkem je možno vyrobit nejvýše 4000 kusů obou výrobků A i B dohromady. Kolik kusů obou výrobků máme vyrobit, aby zisk výrobce byl co největší?

5,2. Řešte znovu úkol z příkladu 5,2 za předpokladu, že máme k dispozici 48 t cementu (místo původních 45 t) a že ostatní údaje zůstanou nezměněny.

5,3. Řešte úlohu z příkladu 5,3 za předpokladu, že nebudeme trvat na maximálním počtu pěti strojů typu A [tj., že vynecháme nerovnost (5,12)].

5,4. Vedoucí prodejny má uskladnit 3 druhy lahví vína, a to:

Velikost láhve	Nákupní cena	Prodejní cena	Zisk
1,0 l	28,— Kčs	38,— Kčs	10,— Kčs
0,7 l	20,— Kčs	28,— Kčs	8,— Kčs
0,5 l	12,40 Kčs	21,— Kčs	8,60 Kčs

Chce skladovat 1400 l vína, ale ne více než 2000 lahví. Přitom má být alespoň 450 lahví litrových, alespoň 450 lahví po 0,7 l a alespoň 500 lahví půllitrových. Celková nákupní cena se může pohybovat mezi 36 000 až 39 600 Kčs. Jak nákup provede, aby jeho zisk byl co největší?