Analytická geometrie a nerovnosti

3. kapitola. Množiny

In: Karel Havlíček (author): Analytická geometrie a nerovnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 35–52.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403618

3. kapitola

MNOŽINY

Ačkoliv teorie množin pronikla už dávno celou matematikou, přece naši středoškolští studenti nemají často potřebnou představu o tom, co znamená slovo množina. Někteří pojem množiny mylně spojují s pojmem „nekonečně mnoho", jiní jej zaměňují s pojmem „geometrického místa bodů" (jako by se jinde než v geometrii množiny neuplatňovaly) a téměř všem je slovo množina jakýmsi samoúčelným trikem, jímž matematikové oslňují svět.

Přesvědčíme se, že tomu tak není, že totiž i v jednoduchých úvahách množinové pojetí velmi zpřesňuje vyjadřování a příslušné pojmy.

Slovem *množina* rozumíme v dalším textu souhrn (soubor, množství, ...) nějakých věcí (předmětů, objektů, ...), které nazýváme *prvky* (elementy) určité množiny. Množina je dána, dovedeme-li o každém objektu rozhodnout, je-li jejím prvkem, či nikoli.

Poznamenejme, že místo slova množina se původně v české literatuře užívalo slovo množství. Čeští matematikové zavedli slovo množina, jež se zřetelněji skloňuje a jež nelze dobře zaměňovat ani se slovem počet, jako je tomu někdy v případě slova množství.

I když budeme v našem textu potřebovat jen množiny čísel a množiny bodů v rovině, uveďme stručně i několik příkladů jiných množin.

Množina všech sedadel v Národním divadle; jejími prvky jsou sedadla. Například každé sedadlo v přízemí Národního divadla je prvkem této množiny. Ale židle, na které sedíte doma při studiu, není prvkem uvedené množiny.

Množina všech dnes žijících občanů naší republiky má za své prvky lidi. Ale nepatří k ní všichni lidé. Například spisovatel Karel Čapek není prvkem této množiny, protože už není naživu. Dnešní ministerský předseda Velké Británie rovněž není prvkem této množiny, třebaže je živ; není totiž občanem našeho státu. Prvky této množiny jsou tedy žijící občané našeho státu.

Organizaci spojených národů (OSN) můžeme chápat jako množinu států, jejímiž prvky jsou členské státy OSN. Například ČSSR je prvkem této množiny, naproti tomu Švýcarsko nikoli, protože není členem OSN.

Všechny dosavadní příklady množin měly tu vlastnost, že počet prvků každé této množiny lze vyjádřit určitým přirozeným číslem, tedy číslem celým kladným. Proto říkáme, že jsou to množiny *konečné*; mají totiž konečný počet prvků. Ale v matematice se vyskytují také množiny s nekonečným počtem prvků, čili množiny *nekonečné*.

Nejjednodušším příkladem nekonečné množiny je množina všech přirozených čísel. Jejími prvky jsou tedy čísla 1, 2, 3, 4, ..., atd. Například číslo 100 je prvkem této množiny, číslo $\frac{2}{3}$, π, $\sqrt{2}$ nikoli, protože to nejsou celá kladná čísla. Rovněž sedadlo v Národním divadle není prvkem této množiny, protože sedadlo není číslo (zvláště pak ne celé kladné); nic nevadí, že na takovém sedadle číslo může být napsáno, přesto toto číslo je pojmově něco jiného než zmíněné sedadlo.

Jiný příklad nekonečné množiny, tentokráte z geometrie, je množina všech bodů ležících uvnitř kružnice, tedy vnitřek kruhu. Prvky této množiny jsou tedy body.

Z dosavadních příkladů je zřejmé, že množiny mohou být vytvořeny nejrůznějšími prvky. Zde byly prvky množin tak nesourodé objekty jako sedadla, lidé, státy, čísla a body. V matematice se jeví účelné zavádět i takovou množinu, která vůbec žádné prvky nemá.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá množina *prázdná* a označuje se symbolem $\varnothing$. Množinu prázdnou počítáme mezi množiny konečné.

Vyplatí se zavést jednoduchou symboliku pro různé vztahy mezi množinami, případně jejich prvky. Pro vztah „býti prvkem množiny", užívá se všude ve světě znak $\in$. Zápis

$$a \in \boldsymbol{M} \qquad (3,1)$$

tedy znamená, že a je prvkem množiny $\boldsymbol{M}$, že a patří k množině $\boldsymbol{M}$, případně do množiny $\boldsymbol{M}$, že a leží v množině $\boldsymbol{M}$ atp. Je vidět, že celkem jednoduchou věc musíme říci několika slovy. To je vada řeči, která může vést i k nedorozumění. Naproti tomu vztah (3,1) říká totéž užitím jediného symbolu $\in$. Chceme-li vyjádřit, že něco není prvkem určité množiny, zapíšeme to tak, že symbol $\in$ prostě přeškrtneme, že tedy napíšeme $\notin$. Označíme-li tedy například množinu všech přirozených čísel, o níž jsme před chvíli mluvili, znakem $\boldsymbol{P}$, jsou pravdivé tyto zápisy:

$$100 \in \boldsymbol{P}, \qquad \frac{2}{3} \notin \boldsymbol{P}.$$

Čteme to takto: číslo 100 je prvkem množiny $\boldsymbol{P}$, číslo $\frac{2}{3}$ není prvkem množiny $\boldsymbol{P}$. Jinak řečeno: číslo 100 je přirozené číslo (tj. celé kladné), číslo $\frac{2}{3}$ nikoli.

Z číselných množin (tj. z množin, jejichž prvky jsou reálná čísla) nás budou v této knížce zajímat hlavně *intervaly*. Snad jste si všimli, že jsme několikrát užili tohoto slova už dříve; teď si vymezíme přesně jeho obsah.

Mysleme si, že jsou dána dvě reálná čísla a, b, přičemž je $a < b$. *Uzavřeným intervalem* od a do b pak rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a \leqq x \leqq b. \tag{3,2}$$

Pro tento uzavřený interval zavádíme symbol $\langle a;\ b\rangle$.

Podobně *otevřeným intervalem* od a do b rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a < x < b. \tag{3,3}$$

Pro tento otevřený interval zavádíme symbol $(a;\ b)$.

Je vidět, že uzavřený interval vzniká z otevřeného tím, že k němu přidáme jeho krajní body. Zapsáno naší symbolikou to vypadá takto:

$$a \in \langle a;\ b\rangle,\quad b \in \langle a;\ b\rangle,\quad a \notin (a;\ b),\quad b \notin (a;\ b).$$

Zaveďme stručně další intervaly.

Polouzavřeným intervalem $\langle a;\ b)$ rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a \leqq x < b. \tag{3,4}$$

Polouzavřeným intervalem $(a;\ b\rangle$ rozumíme množinu všech takových reálných čísel x, pro která platí

$$a < x \leqq b. \tag{3,5}$$

Pro polouzavřené intervaly se používá někdy také názvu *polootevřené intervaly*.

Každý z těchto intervalů je ovšem na ose číselné zobrazen úsečkou s krajními body a, b; proto říkáme, že čísla a, b jsou *krajní body* příslušného intervalu. Všechna ostatní čísla tohoto intervalu nazýváme pak jeho *vnitřními body*. Rovněž délku této úsečky, zobrazující náš interval na ose číselné, prohlásíme za *délku* příslušného intervalu.

Mezi intervaly počítáme také intervaly mající nekonečnou délku; na ose číselné se zobrazují polopřímkami. Množinu všech takových reálných čísel x, pro něž platí $a \leqq x$, nazýváme polouzavřeným intervalem $\langle a; +\infty)$; symbol ∞ není ovšem číslo, ale znamená odedávna pojem nekonečna; nerovnost $a \leqq x$ nahrazujeme tedy i zápisem $a \leqq x < +\infty$. Podobně polouzavřený interval $(-\infty; a\rangle$ je množina všech takových čísel x, pro která platí $-\infty < x \leqq a$, čili prostě $x \leqq a$. Stejně otevřeným intervalem $(a; +\infty)$ rozumíme množinu všech čísel x splňující podmínku $a < x < +\infty$ čili $a < x$; symbol $(-\infty; a)$ znamená otevřený interval, tj. množinu všech čísel x, pro která je $-\infty < x < a$ čili $x < a$. Množinu všech reálných čísel vůbec počítáme rovněž mezi otevřené intervaly a označujeme ji symbolem $(-\infty; +\infty)$.

Intervaly nám poslouží jako konkrétní příklady množin, na nichž se naučíme zacházet s dalšími množinovými pojmy. Jsou to tyto pojmy: podmnožina, sjednocení množin a průnik množin. Budou nám užitečné v dalších kapitolách.

Říkáme, že množina $\mathbf{A}$ je *podmnožinou* množiny $\mathbf{B}$, když každý prvek množiny $\mathbf{A}$ je zároveň prvkem množiny $\mathbf{B}$. Symbolicky to píšeme ve tvaru

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

Pro naše intervaly zřejmě například platí

$$(a; b) \subset \langle a; b\rangle.$$

Místo slova podmnožina užíváme též někdy slov „část množiny", ale vzhledem k výsledku ve cvičení 3,7 to není zcela výstižné.

Řekneme-li, že každý prvek jedné množiny je zároveň prvkem druhé množiny, je to logicky totéž, jako když řekneme, že v první množině neexistuje prvek, který není prvkem druhé množiny. Z toho důvodu pokládáme prázdnou množinu za podmnožinu každé množiny a píšeme tedy pro každou množinu $\boldsymbol{A}$ vztah

$$\emptyset \subset \boldsymbol{A}. \tag{3,6}$$

Některé jednoduché množinové vztahy jsou ve cvičení 3,7 a 3,8 a ve cvičení 3,13 až 3,16. Jde v nich vlastně jen o získání návyku na množinovou symboliku; proto nemá smysl uvádět jejich řešení v seznamu výsledků cvičení. Zde si všimněme aspoň jednoho případu:

Příklad 3,1. Jestliže pro dvě množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí zároveň oba vztahy $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, pak jsou obě tyto množiny totožné (stejné, shodné) a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

To je totiž zřejmé, neboť z předpokladů $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ plyne, že každý prvek kterékoli z těchto množin je zároveň prvkem druhé z nich, a proto se obě tyto množiny skládají z týchž prvků. Novinkou je tu pro čtenáře jen to, že pro takové dvě množiny zavádíme symbol rovnosti $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, všeobecně známý z jiných partií matematiky.

Přistupme k dalším pojmům.

Sjednocením dvou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumíme množinu $\boldsymbol{C}$, jejímiž prvky jsou všechny prvky množiny $\boldsymbol{A}$ i všechny prvky množiny $\boldsymbol{B}$ a žádné jiné; symbolicky to zapisujeme pomocí znaku $\cup$ takto:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Tento zápis tedy znamená, že je $m \in \boldsymbol{C}$ tehdy a jen tehdy, platí-li $m \in \boldsymbol{A}$, nebo $m \in \boldsymbol{B}$, přičemž se nevylučuje případ, že m je zároveň prvkem obou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

Příklad 3,2. Je-li $\boldsymbol{A} = \langle 0;\ 2 \rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 1;\ 3 \rangle$, je $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \langle 0;\ 3 \rangle$.

Věc je sice zřejmá, ale rozepišme to napoprvé podrobně. Množina $\boldsymbol{A}$ je interval, který obsahuje všechna čísla x, jež splňují nerovnosti $0 \leqq x \leqq 2$. Podobně interval $\boldsymbol{B}$ obsahuje všechna taková čísla y, pro která platí $1 \leqq y \leqq 3$. Všechna čísla obou těchto intervalů jsou tedy čísla z, splňující nerovnosti $0 \leqq z \leqq 3$. Proto je $\langle 0;\ 3 \rangle = \langle 0;\ 2 \rangle \cup \langle 1;\ 3 \rangle$.

Příklad 3,3. Která čísla x jsou prvky sjednocení $\boldsymbol{C}$ intervalů $\langle 1;\ 2 \rangle$ a $\langle 4;\ 6 \rangle$?

Zde je $\boldsymbol{C} = \langle 1;\ 2 \rangle \cup \langle 4;\ 6 \rangle$. Jeho prvky nelze ovšem charakterizovat jedinou nerovností, neboť oba dané intervaly se ani nepřekrývají, ani se nestýkají. Hledaná čísla $x \in \boldsymbol{C}$ jsou tedy čísla, která splňují buď nerovnosti $1 \leqq x \leqq 2$, nebo nerovnosti $4 \leqq x \leqq 6$. Znázorněte si množinu $\boldsymbol{C}$ na ose číselné; její obraz se skládá ze dvou od sebe oddělených úseček.

Další příklady tohoto druhu najdete ve cvičení.

Poznámka. Konstrukci sjednocení množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ lze si představit tak, že k prvkům množiny $\boldsymbol{A}$ „přidáme" ještě všechny prvky množiny $\boldsymbol{B}$ (pokud ovšem již nejsou prvky množiny $\boldsymbol{A}$). Z toho důvodu se dříve pro sjednocení množin užívalo názvu součet množin a mluvilo se o množinovém součtu. Pro odlišení tohoto pojmu od součtu čísel bylo účelné zavést samostatný název sjednocení množin, který se plně vžil.

Vedle sjednocení množin má stejnou důležitost další základní pojem, totiž průnik množin.

Průnikem dvou množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumíme množinu $\boldsymbol{D}$, jejímiž prvky jsou všechny společné prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a žádné jiné; jinými slovy řečeno: průnik $\boldsymbol{D}$ je množina tvořená společnými prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ čili všemi těmi prvky množiny $\boldsymbol{A}$, které leží zároveň v množině $\boldsymbol{B}$. Zapisujeme to užitím symbolu $\cap$ takto:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}.$$

Tento zápis tedy znamená, že je $n \in \boldsymbol{D}$ tehdy a jen tehdy, platí-li zároveň vztahy $n \in \boldsymbol{A}$ a $n \in \boldsymbol{B}$.

Příklad 3,4. Je-li $\boldsymbol{A} = \langle 0; 2 \rangle$, $\boldsymbol{B} = \langle 1; 3 \rangle$, je $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \langle 1; 2 \rangle$.

Prvky množiny $\boldsymbol{A}$ jsou totiž čísla splňující nerovnosti $0 \leqq x \leqq 2$ a prvky množiny $\boldsymbol{B}$ jsou čísla x splňující nerovnosti $1 \leqq x \leqq 3$. Čísla patřící jak do množiny $\boldsymbol{A}$, tak do množiny $\boldsymbol{B}$ splňují tedy všechny zde vypsané podmínky zároveň, což v důsledku nerovností $0 < 1 < < 2 < 3$ dává $1 \leqq x \leqq 2$.

Všimněte si přitom rozdílu mezi příklady 3,2 a 3,4.

Příklad 3,5. Průnikem intervalů $\langle 1; 2 \rangle$ a $\langle 4; 6 \rangle$ je množina prázdná.

Neexistuje totiž číslo x, pro které by zároveň platily nerovnosti $1 \leqq x \leqq 2$ a $4 \leqq x \leqq 6$. Průnik obou zkoumaných intervalů nemá tedy žádný prvek, proto píšeme

$$\langle 1; 2 \rangle \cap \langle 4; 6 \rangle = \varnothing.$$

Z dosavadních příkladů je jistě zřejmé, co znamenají slova sjednocení či průnik dvou množin. V matematice rozšiřujeme ovšem tyto pojmy i pro případy, kdy jde o více než dvě množiny. Sjednocení libovolného počtu či systému množin je prostě souhrn všech jejich prvků vůbec. Průnik těchto množin je zase souhrn všech takových prvků, které leží ve všech těchto daných množinách zároveň.

Vedle číselných množin (přesněji intervalů a jejich skupin), jež jsme si dosud uvedli, budou nám v poslední kapitole užitečné i některé úvahy o množinách bodů v rovině; množiny se totiž uplatňují výhodně i v geometrii roviny. Některé z těchto množin znáte. Základní význam má pro nás polorovina, jak lze už vidět z 1. kapitoly. Každá polorovina má důležitou vlastnost, že totiž úsečka, která spojuje dva libovolné body téže poloroviny, v ní leží celá; říkáme to stručně slovy, že polorovina je konvexní útvar. Tuto vlastnost mají i jiné množiny bodů v rovině, proto si příslušný pojem zavedeme obecně. Vyhneme se však množině prázdné; každou množinu, která není prázdná, nazveme neprázdnou.

Konvexní množinou bodů rozumíme takovou neprázdnou množinu, která má tuto vlastnost: jsou-li P, Q dva různé body této množiny, pak každý bod X úsečky PQ je rovněž bodem této množiny. Přitom množinu, která má jen jeden prvek, pokládáme také za množinu konvexní.

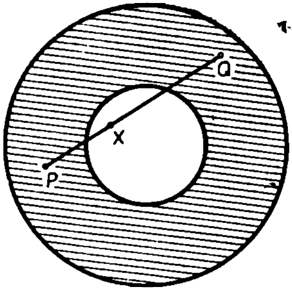
Z předcházejících výkladů vychází tento nejjednodušší příklad:

Příklad 3,6. Polorovina je konvexní množina.

Je důležité uvědomit si také aspoň jeden příklad množiny, která není konvexní. V obr. 10 je znázorněno mezikruží. To ovšem není konvexní množina, neboť v mezikruží lze zvolit body P, Q tak, že úsečka PQ v něm celá neleží; lze na ní pak najít bod X, který danému mezikruží nepatří.

Pro průnik konvexních množin platí důležitá, i když jednoduchá a snadno srozumitelná věta:

Věta 3,1. *Neprázdný průnik konvexních množin je zase konvexní množina.*

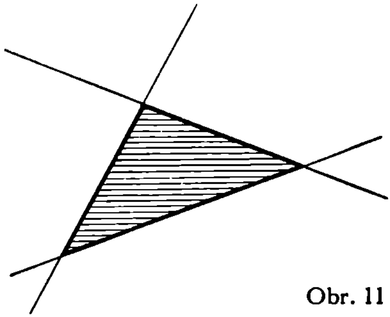


Obr. 10

Důkaz: Dané konvexní množiny, jichž může být i nekonečně mnoho, mají společný aspoň jeden bod, neboť předpokládáme, že jejich průnikem není množina prázdná. Obsahuje-li tento průnik právě jeden bod, je věta dokázána, neboť jednobodovou množinu pokládáme za konvexní množinu už podle definice. Zbývá tedy dokázat větu 3,1 pro případ, že zkoumaný průnik obsahuje aspoň dva různé body. Zvolme libovolné dva takové body P, Q tohoto průniku. Pak ovšem podle definice průniku množin leží body P, Q v každé z daných konvexních množin a v každé z nich leží tedy i celá úsečka PQ (neboť jde o konvexní množiny). To znamená, že úsečka PQ celá leží i v průniku daných množin (neboť leží v každém z nich) a náš průnik je tedy konvexní množina. Tím je věta 3,1 dokázána.

P ř í k l a d 3,7. Neprázdný průnik libovolného systému polorovin je konvexní množina.

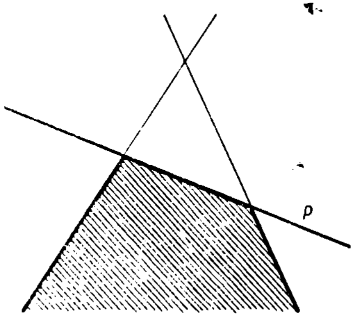
To je okamžitý důsledek věty 3,1 a příkladu 3,6. Nejběžnějším případem toho druhu je trojúhelník, který je vždycky průnikem tří polorovin (obr. 11). Obráceně



Obr. 11

však průnikem tří polorovin nemusí být vždycky trojúhelník, jak ukazuje obr. 12, ale přesto je to i v tomto případě konvexní množina. Rovněž mnohoúhelníky, které lze vytvořit jako průnik konečného počtu polorovin, jsou konvexní množiny a jsou zahrnuty v příkladu 3,7; nazývají se *konvexní mnohoúhelníky* a právě ty budeme v poslední kapitole potřebovat. Extrémním případem příkladu 3,7 je kruh, který lze vždycky vytvořit jako průnik nekonečně mnoha polorovin; každá taková polorovina má za hraniční přímku tečnu kruhu a obsahuje jeho střed. Je tedy kruh rovněž konvexní množinou. Podrobnosti o tom se dočtete v příslušné literatuře uvedené vzadu, máme zde na mysli hlavně knížku Vyšínovu.*)

Upozorňuji ještě, že ve cvičení 3,21, jež na tento příklad 3,7 navazuje, rozumíme ovšem slovy „bod trojúhelníka" bod příslušné množiny, totiž bod ležící v průniku tří polorovin. Je to tedy bod ležící uvnitř trojúhelníka nebo na jeho obvodu.

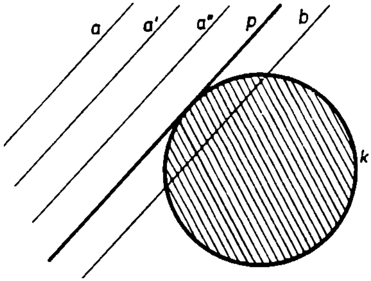


Obr. 12

U konvexních množin je ještě jeden důležitý pojem, totiž pojem opěrné přímky. Všimněme si kruhu, k němuž počítáme i jeho hranici, totiž kružnici k v obr. 13 a přibližujme k němu přímku a, která není sečnou ani tečnou kružnice k. Posunujeme přímku a do poloh a', a'', ..., atd. tak, aby všechny tyto přímky byly stále

*) Nebudete-li si moci tuto či jinou knížku koupit, můžete si ji vypůjčit v knihovnách, hlavně v odborných a školních knihovnách. Knížky této naší edice jsou obvykle dost brzy vyprodané; snaživý zájemce se tedy nespoléhá jen na knižní trh, ale v případě potřeby se obrací ke knihovnám; je dobře si na to zvyknout už v mládí.

spolu rovnoběžné. V jistém okamžiku přejde přímka *a* do polohy přímky *p*, která má s kružnicí *k* a tím i s celým kruhem jeden bod společný. Přímka *p* je zde zřejmě tečnou kružnice *k*. Z představy, že celý kruh se o tuto přímku opírá, je pro přímku *p* odvozen název *opěrná přímka* zmíněného kruhu. Kdybychom přímku *a* posunuli dále až do polohy sečny *b* kružnice *k*, rozdělí



Obr. 13

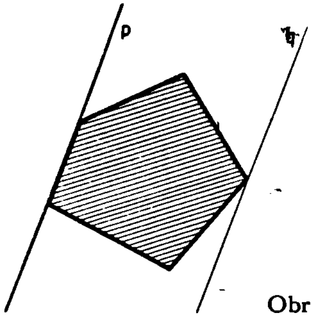
přímka *b* daný kruh ve dvě části a nemůžeme už tedy pro ni užít názvu opěrná přímka; body našeho kruhu jsou už rozloženy po obou stranách přímky *b*, tj. body kruhu leží v tomto případě v obou polorovinách vyťatých přímkou *b*. Na základě tohoto pozorování vyslovíme definici opěrné přímky množiny bodů takto:

Nechť je v rovině dána nějaká neprázdná množina bodů, označme ji $\boldsymbol{M}$. Přímka *p* se nazývá *opěrná přímka* této množiny $\boldsymbol{M}$, když má tyto dvě vlastnosti:

1. přímka *p* obsahuje aspoň jeden bod množiny $\boldsymbol{M}$;
2. množina $\boldsymbol{M}$ leží celá jen v jedné polorovině vyťaté přímkou *p*.

Tato definice opěrné přímky se hodí pro každou neprázdnou množinu bodů v rovině, tedy i pro množinu, která není konvexní. Nás však zde zajímají hlavně konvexní množiny.

Na obr. 14 je konvexní pětiúhelník s opěrnou přímkou *p*. Chceme tím ukázat, že opěrná přímka může mít s příslušnou množinou, která se o ni opírá, i nekonečně mnoho bodů společných. Obr. 15 zase ukazuje, že ně-



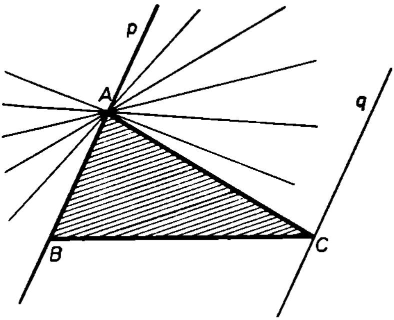
Obr. 14

kterým bodem množiny **M**, kterou je zde trojúhelník *ABC*, může procházet více a dokonce nekonečně mnoho opěrných přímek množiny **M**; v tomto obrázku jsou to všechny přímky vedené např. bodem *A*, jež neprotínají protější stranu *BC* v jejich vnitřních bodech. Jsou to všechny ty přímky vedené bodem *A*, které leží ve vnějších úhlech tohoto trojúhelníka při vrcholu *A*.

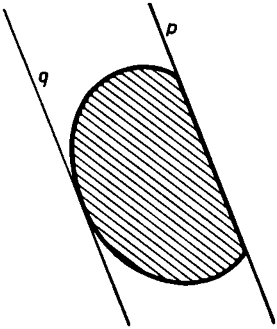
Pro konvexní množiny už z názorné představy vychází celkem tato snadno srozumitelná věta:

Věta 3,2. *Je-li* **M** *množina bodů v rovině a s nějaká přímka téže roviny, pak existují nejvýše dvě opěrné přímky množiny* **M**, *jež jsou rovnoběžné s přímkou s.*

Důkaz zde nepodáváme pro nedostatek místa. Najdete ho ve zmíněné už Vyšínově knížce a dozvíte se tam, že tato věta platí i v případě, že **M** není konvexní množinou. Ale pro konvexní množiny je tato věta zvlášť názorná, jak ukazují už obr. 14, 15, 16, kde jsou vždycky dvě rovnoběžné opěrné přímky příslušné množiny označeny *p*, *q*.



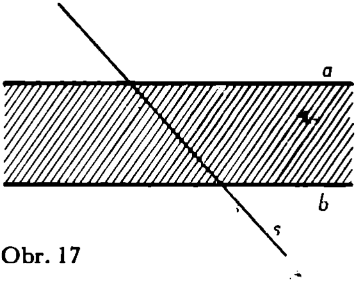
Obr. 15



Obr. 16

Je však potřeba rozumět dobře obsahu věty 3,2. Mluví se tam o tom, že počet příslušných opěrných přímek je nejvýše 2. Tuto možnost ukazují právě obr. 14, 15, 16. Musíme ovšem počítat s tím, že tento počet může být menší, tedy 1 nebo i 0. Např. v obr. 12 je jedna opěrná přímka příslušné množiny označena *p* a přitom je zřejmé, že tato množina už nemá žádnou další opěrnou přímku rovnoběžnou s přímkou *p*. Na obr. 17 je vyznačena šrafováním množina **M**, ohraničená dvěma rovnoběžnými přímkami *a*, *b*. Pro tuto množinu neexistuje žádná opěrná přímka rovnoběžná s přímkou *s*, jakmile přímka *s* není rovnoběžná s přímkami *a*, *b*.

V některých úlohách z lineárního programování, jež poznáme v kapitole 5, užijeme věty 3,2 pro konvexní mnohoúhelníky. V tom případě existují ovšem vždycky dvě opěrné přímky rovnoběžné s daným směrem.



Obr. 17

Cvičení

3,1. Vyjádřete nerovnostmi, která čísla x leží v intervalech $\langle 0; 1\rangle$ a $(0; 1)$.

3,2. Které z těchto zápisů jsou správné a které nikoli:

a) $0 \in \langle 0; 1\rangle$; b) $0 \in (0; 3)$;

c) $\sqrt{2} \in (0; 2)$; d) $\sin x \in \langle -1; +1\rangle$;

e) $\pi \in \langle 2; 3\rangle$; f) $\frac{2}{3} \in (0; 1)$;

g) $\pi \in \left(\frac{223}{71}; \frac{22}{7}\right)$.

3,3. Pro $a < b$ vypočtěte délku d intervalů $\langle a; b\rangle$, $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$.

3,4. Jsou-li x, y dva prvky téhož intervalu s krajními body a, b, je číslo $\frac{x + y}{2}$ také prvkem tohoto intervalu. Dokažte to!

3,5. Pro $a < b$ je číslo $\dfrac{a+b}{2}$ prvkem každého intervalu s krajními body a, b. Dokažte to a všimněte si rozdílu proti předcházejícímu cvičení.

3,6. Je interval množina konečná nebo nekonečná? Dokažte příslušné tvrzení!

3,7. Pro každou množinu $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}$ (tj. každá množina je podmnožinou sama sebe).

3,8. Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ takové tři množiny, že platí $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$ pak platí také $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$. (Slovy: Je-li $\mathbf{A}$ podmnožinou množiny $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ podmnožinou množiny $\mathbf{C}$, je také $\mathbf{A}$ podmnožinou množiny $\mathbf{C}$. Můžeme pak tedy psát $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$.)

3,9. Přesvědčte se, že pro $a < b$ platí

a) $(a; b) \subset \langle a; b\rangle \subset \langle a; +\infty) \subset (-\infty; +\infty)$;

b) $\langle a; b) \subset \langle a; b\rangle \subset (-\infty; b\rangle$;

c) $(a; b\rangle \subset \langle a; b\rangle$.

3,10. Pro $a < a' < b' < b$ platí

a) $(a'; b') \subset (a; b)$;

b) $\langle a'; b'\rangle \subset (a; b)$.

3,11. Určete sjednocení intervalů $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, je-li

a) $\mathbf{A} = (0; 1\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 1; 2)$;

b) $\mathbf{A} = (0; 2)$, $\mathbf{B} = \langle 1; 2\rangle$;

c) $\mathbf{A} = \langle 1; 5\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 2; 3\rangle$;

d) $\mathbf{A} = (3; 4)$, $\mathbf{B} = \langle 4; 5)$.

3,12. Nerovnostmi charakterizujte čísla x, tvořící sjednocení intervalů

a) $(-1; 0)$ a $(0; 1)$; b) $\langle 0; 2)$ a $(1; 3\rangle$;

c) $(a; +\infty)$ a $(a; b)$.

3,13. Dokažte: Je-li $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, je $\mathbf{A} \dot{\subset} \mathbf{C}$.

3,14. Pro každou množinu A platí a) $A = A \cup A$; b) $A = A \cup \emptyset$.

3,15. Je-li $D = A \cap B$, je $D \subset A$ i $D \subset B$. (Průnik množin je podmnožinou každé z nich.)

3,16. Pro každou množinu A platí $A = A \cap A$.

3,17. Stanovte průnik intervalů

a) $(0; 2)$ a $(1; 3)$;
b) $(0; 2)$ a $(1; 3\rangle$;
c) $(0; 2)$ a $\langle 1; 3\rangle$.

3,18. Stanovte sjednocení C i průnik D tří intervalů

a) $(0; 2)$, $(1; 3)$ a $(2; 4)$;
b) $\langle 0; 3\rangle$, $\langle 1; 4\rangle$ a $\langle 2; 5\rangle$.

3,19. Je dáno nekonečně mnoho intervalů $A_n = \langle n; n + 1\rangle$, kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, čili n probíhá množinu všech celých čísel. Stanovte sjednocení všech těchto intervalů A_n.

3,20. Je dáno nekonečně mnoho intervalů a) $B_n = \left\langle 0; \frac{1}{n} \right\rangle$, b) $B'_n = \left(0; \frac{1}{n} \right\rangle$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (n probíhá množinu všech přirozených čísel). Stanovte průnik všech intervalů B_n a všech intervalů B'_n.

3,21. Rozhodněte, zda jsou správná tato tvrzení:

a) průsečík výšek každého trojúhelníka je bodem tohoto trojúhelníka;
b) průsečík os vnitřních úhlů každého trojúhelníka je bodem tohoto trojúhelníka.