Analytická geometrie a nerovnosti

2. kapitola. Lomená čára

In: Karel Havlíček (author): Analytická geometrie a nerovnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1967. pp. 15–34.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403617

2. kapitola

LOMENÁ ČÁRA

Naše dosavadní úvahy o lineárních funkcích a nerovnostech se podstatně zpestří, přibereme-li na pomoc ještě pojem absolutní hodnoty reálného čísla. Rozšíří se tím také působnost těchto úvah, jak poznáme i na praktických příkladech.

Absolutní hodnotu čísla x značíme, jak víte, symbolem $|x|$; geometricky na ose číselné znamená $|x|$ vzdálenost bodu, přiřazeného číslu x, od počátku. Je tedy

$$|x| = x \qquad \text{pro } x \geqq 0\,, \tag{2,1}$$
$$|x| = -x, \qquad \text{pro } x < 0.$$

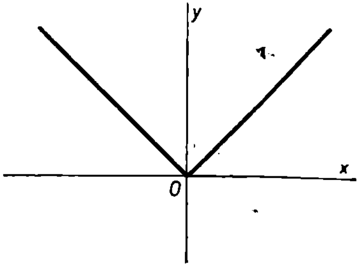
Mění-li se x tak, že probíhá množinu všech reálných čísel, je

$$y = |x| \tag{2,2}$$

funkce, jejíž graf je na obr. 3 a skládá se ze dvou polopřímek. Jejich rovnice dostaneme rozepsáním rovnice (2,2) pomocí rovnic (2,1); přitom ovšem musíme pečlivě vyznačit obory funkcí, určující tyto polopřímky. Tento rozpis rovnice (2,2) zní

$$y = x \qquad \text{pro } x \geqq 0,$$
$$y = -x \qquad \text{pro } x < 0. \tag{2,3}$$

Rozepsali jsme tedy rovnici (2,2) do dvou rovnic. Dostáváme tak dvě lineární funkce, z nichž každá je definována jenom na části množiny reálných čísel. Podle vět 1,10 a 1,11 vidíme, že jedna z nich je rostoucí, druhá klesající (ve svém definičním oboru). Protože rovnice (2,3) jsou úplně ekvivalentní s rovnicí (2,2), můžeme říci: absolutní hodnota reálného čísla je klesající v oboru záporných čísel (pro $x < 0$) a rostoucí v oboru zbývajícím (pro $x \geqq 0$), což je také dobře patrno z obr. 3.

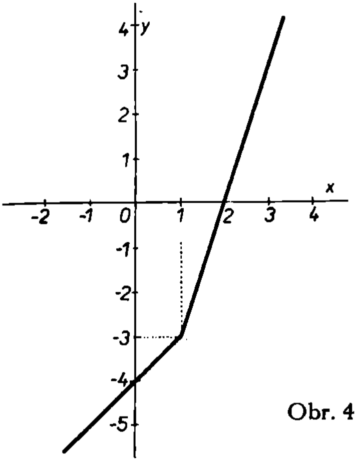


Obr. 3

Všimněme si přitom, že v bodě $x = 0$ má tato funkce nejmenší ze všech hodnot, kterých vůbec nabývá; funkce $|x|$ má tedy v bodě $x = 0$ své *minimum* a toto minimum je zde $y = 0$, jak plyne z rovnice (2,2).

Nepodceňujme tyto velmi jednoduché úvahy a výsledky. V jiných o málo složitějších případech lomených čar není určení minima na první pohled tak snadné, jako tomu bylo na obr. 3. Ale právě určení minima či maxima funkce bývá z hlediska praxe velmi důležité. V dalších příkladech poznáme, že někdy taková lomená čára žádné minimum ani maximum nemá, jindy nabývá svého minima či maxima třeba i v nekonečně mnoha bodech.

Některé jednoduché případy funkcí, jež vedou při grafickém znázornění k lomeným čarám, které jsou složeny z konečného počtu úseček a polopřímek, se probírají na středních školách. Uvedeme si zde takové i další příklady a přihlédneme i k jejich užití v praxi.



Obr. 4

Příklad 2,1. Graf funkce dané rovnicí

$$y = |x - 1| + 2x - 5 \tag{2,4}$$

je na obr. 4. Dojdeme k němu rozpisem rovnice (2,4) na dvě lineární funkce podobně, jako jsme z rovnice (2,2) došli k rovnicím (2,3). Se zřetelem k definici absolutní hodnoty [viz rovnice (2,1)] je zde nutno rozlišovat dva případy, a to $x - 1 \geqq 0$ a $x - 1 < 0$. Pro $x \geqq 1$ je pak $|x - 1| = x - 1$, pro $x < 1$ je $|x - 1| = 1 - x$, což dosazeno pokaždé do rovnice (2,4) dává po částech dvě rovnice téže funkce ve tvaru

$$y = 3x - 6 \qquad \text{pro } x \geqq 1, \qquad (2,5)$$
$$y = x - 4 \qquad \text{pro } x < 1.$$

Každá z těchto rovnic představuje polopřímku a snadno zjistíte, že obě tyto polopřímky mají společný počáteční bod*) $[1; -3]$. Obě polopřímky vytvoří pak lomenou čáru, která je grafem funkce (2,4). Z grafu je také patrno, že tato funkce je všude rostoucí. Tím se podstatně liší od funkce $y = |x|$ z obr. 3. Všimněme si, že tato okolnost není z rovnice (2,4) na první pohled patrná, kdežto obr. 4 nás o tom přesvědčí okamžitě. Je tedy vidět, že geometrie nám při vyšetřování funkcí tohoto typu vydatně pomáhá. Konečně také poznáváme, že naše funkce (2,4) nenabývá nikde svého minima ani maxima; je to už důsledek toho, že je všude rostoucí. (Slovíčko „všude" zde znamená, že proměnná x probíhá celou množinu všech reálných čísel.)

Poznámka. Zjednodušme si trochu názvosloví. Bod, ve kterém se lomená čára „láme", budeme nazývat *kritickým* bodem. Na obr. 3 to byl počátek, na obr. 4 bod $[1; -3]$. Kritickým je ten bod v tom smyslu, že v něm výraz vystupující v rovnici zkoumané funkce v absolutní hodnotě přechází ze záporných do kladných hodnot. V příkladě 2,1 je to výraz $x - 1$, neboť ten se v rovnici (2,4) vyskytuje v absolutní hodnotě. Skutečně pro $x < 1$ je $x - 1 < 0$ (a tedy $|x - 1| = 1 - x$) a pro $x \geqq 1$ je

*) Počáteční bod čili počátek polopřímky je jejím hraničním bodem; někdy k té polopřímce patří, někdy nikoli. V našem příkladě bod $[1; -3]$ leží na první z polopřímek (2,5), na druhé nikoli. Přesto říkáme, že obě tyto polopřímky mají společný počáteční bod. Podobné terminologie se pro stručnost užívá dále i u krajních bodů úseček či intervalů. Podrobněji je o tom psáno v kapitole třetí.

$x - 1 \geqq 0$ (a tedy $|x - 1| = x - 1$). Při vyšetřování průběhu takové funkce je samozřejmě výhodné stanovit nejdřív všechny její kritické body; v dosavadních příkladech měla každá funkce jen jeden kritický bod. V dalších příkladech poznáme funkce, které mají víc kritických bodů.

Příklad 2,2. Lomená čára zobrazující funkci

$$y = |2x + 1| + |2 - x| - x - 1 \qquad (2,6)$$

má dva kritické body, totiž body, pro které je $2x + 1 = 0$ a $2 - x = 0$. Rozdělíme tedy celou množinu reálných čísel x na tři úseky čili intervaly podle toho, je-li $x < -\frac{1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2} \leqq x < 2$, nebo $2 \leqq x$, a průběh funkce (2,6) budeme vyšetřovat v každém tomto intervalu zvlášť.

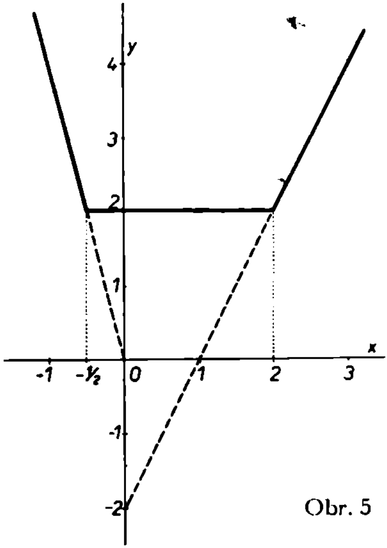
Pro $x < -\frac{1}{2}$ je $2x + 1 < 0$ a zároveň v důsledku $x < -\frac{1}{2} < 2$ je $x - 2 < 0$, tj. $2 - x > 0$; je zde tedy $|2x + 1| = -2x - 1$, $|2 - x| = 2 - x$, což dosazeno do rovnice (2,6) dává po snadném výpočtu první z rovnic (2,7).

Pro $-\frac{1}{2} \leqq x < 2$ je $2x + 1 \geqq 0$ a $x - 2 < 0$, takže zde máme $|2x + 1| = 2x + 1$ a $|2 - x| = 2 - x$, což dosazeno do rovnice (2,6) dává druhou rovnici (2,7).

Konečně pro $x \geqq 2$ je $2 - x \leqq 0$ a $2x + 1 > 0$ (neboť je $x \geqq 2 > -\frac{1}{2}$) a tedy $|2x + 1| = 2x + 1$ a $|2 - x| = x - 2$. Dosazením do rovnice (2,6) vychází třetí rovnice (2,7).

Celkem jsme tím rozepsali rovnici (2,6) na trojici těchto rovnic:

$$
\begin{aligned}
y &= -4x && \text{pro } x < -\frac{1}{2}\,, \\
y &= 2 && \text{pro } -\frac{1}{2} \leqq x < 2\,, \qquad (2,7) \\
y &= 2x - 2 && \text{pro } 2 \leqq x\,.
\end{aligned}
$$



Obr. 5

Tato trojice rovnic je ovšem s rovnicí (2,6) ekvivalentní. Graf této funkce je na obr. 5; je to lomená čára skládající se ze tří částí (dvě z nich jsou polopřímky a jedna je úsečka). Všechny tyto části mají společné hraniční či krajní body, a to právě v kritických bodech této lomené čáry. Z grafu poznáváme, že funkce (2,6) je pro $x < -\frac{1}{2}$ klesající a pro $x > 2$ rostoucí, což souhlasí s větami 1,10 a 1,11 [viz první a třetí rovnici (2,7)]. V intervalu $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ naše funkce není ani rostoucí, ani klesající, je tam konstantní a ve všech bodech tohoto intervalu nabývá minima, které je dáno hodnotou $y = 2$. Máme tedy příklad, kdy funkce nabývá svého minima v nekonečně mnoha bodech.

V dalších příkladech se už budeme vyjadřovat stručněji než dosud.

Příklad 2,3. Funkce

$$y = |x + 1| + 2|x| - 4|x - 2| \qquad (2,8)$$

je zobrazena na obr. 6*) lomenou čarou, skládající se ze čtyř částí, z nichž dvě jsou polopřímky a dvě úsečky. Kritické body nastávají pro hodnoty $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$. Rovnice (2,8) je ekvivalentní se čtveřicí těchto rovnic:

$$\begin{aligned} y &= x - 9 && \text{pro } x < -1, \\ y &= 3x - 7 && \text{pro } -1 \leqq x < 0, \qquad (2,9) \\ y &= 7x - 7 && \text{pro } 0 \leqq x < 2, \\ y &= -x + 9 && \text{pro } 2 \leqq x. \end{aligned}$$

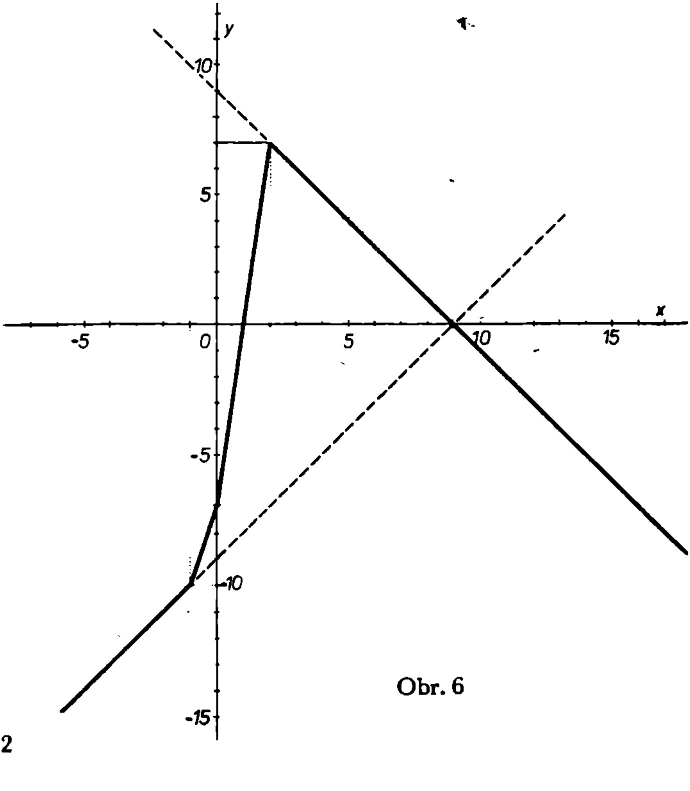
Tyto rovnice dostaneme známým způsobem z rovnic (2,8), rozlišíme-li jednotlivé intervaly mezi kritickými body.

---

*) V obr. 6 je pro úsporu místa v měřítkách na osách souřadnicových zvolena kratší jednotka míry než v obrázcích předcházejících.

Pro $x < -1$ je zároveň $x < 0$ a $x < 2$ a tedy $x + 1 < 0$, $x - 2 < 0$; celkem tedy dosazujeme do rovnice (2,8) v tomto případě $|x + 1| = -x - 1$, $|x| = -x$, $|x - 2| = 2 - x$. Tak dojdeme k první rovnici (2,9).

Pro $-1 \leqq x < 0$ je také $x < 2$ a tedy $x + 1 \geqq 0$, $x - 2 < 0$ čili $|x + 1| = x + 1$, $|x| = -x$, $|x - 2| = 2 - x$. To dává druhou rovnici (2,9).



Obr. 6

Pro $0 \leqq x < 2$ je také $x > -1$ a tedy $x + 1 > 0$, $x - 2 < 0$, což znamená, že třetí rovnici (2,9) dostaneme, dosadíme-li do rovnic (2,8) výrazy $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 2| = 2 - x$.

Konečně pro $x \geqq 2$ je zároveň $x > 0$ a $x > -1$, takže je $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$. Dosadíme-li to do rovnice (2,8), dostáváme čtvrtou rovnici (2,9).

Je vidět, že pro $x < 2$ je tato funkce stále rostoucí a pro $x > 2$ stále klesající. Pro $x = 2$ dostáváme její maximum $y = 7$, které je zobrazeno bodem [2; 7]. Má tedy tato funkce jediné maximum.

Všimněte si, že vyšetřením průběhu této funkce metodami analytické geometrie jsme její maximum našli pohodlně a bezpečně a že jeho hledání jen na základě rovnice (2,8) bez geometrického znázornění by asi bylo obtížnější.

Příklad 2,4. Všimněme si poměrně jednoduché funkce

$$y = \frac{|x|}{2} + \frac{|x - 1|}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (2,10)$$

Kritické body zde jsou $x = 0$ a $x = 1$ a oba leží na ose x. Snadným rozborem podle předcházejících vzorů dostáváme rozpis rovnice (2,10) na tři rovnice

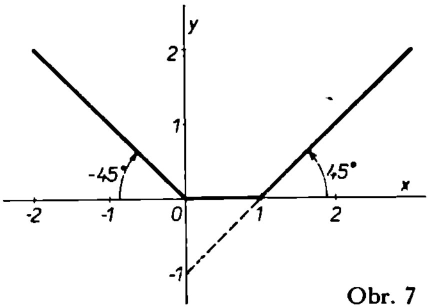
$$\begin{aligned} y &= -x & &\text{pro } x < 0, \\ y &= 0 & &\text{pro } 0 \leqq x < 1, \\ y &= x - 1 & &\text{pro } 1 \leqq x. \end{aligned} \qquad (2,11)$$

K tomuto rozpisu dojdete zase tím, že budete danou funkci zkoumat v každém z vypsaných intervalů zvlášť.

Přitom musíte vzít v úvahu, že pro $x < 0$ je také $x < 1$ a tedy $|x| = -x$ a $|x - 1| = 1 - x$ a podobně dál.

Graf této funkce je na obr. 7. V oboru $x < 0$ je funkce klesající, v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ je konstantní a pro $x > 1$ je rostoucí. V nekonečně mnoha bodech, totiž pro $0 \leqq x \leqq 1$, nabývá tato funkce svého minima $y = 0$.

Příklad 2,5. Na přímce p je dána úsečka a délky 1 jednotka míry. Úloha zní: stanovit nejmenší vzdálenost v bodu X pohybujícího se po přímce p od úsečky a.



Obr. 7

Je zřejmé, že v různých polohách pohybujícího se bodu X může se jeho vzdálenost v od úsečky a různě měnit; abychom vyjádřili tuto závislost čísla v na poloze bodu X, zvolíme přímku p za osu číselnou a umístíme na ní úsečku a do intervalu $0 \leqq x \leqq 1$, tj. zvolíme soustavu souřadnic na přímce p tak, že jeden krajní bod úsečky a má souřadnici $x = 0$ (je to počátek) a druhý je bod o souřadnici $x = 1$. Snadno si to představíte právě na obr. 7, ztotožníte-li tam přímku p s osou x. Souřadnici běžného bodu X přímky p označme opět x.

A nyní zřejmě platí:

Je-li bod x nalevo od počátku, je $x < 0$ a jeho vzdálenost od úsečky a je rovna jeho vzdálenosti od tohoto počátku, takže máme

$$v = -x \qquad \text{pro } x < 0 . \tag{2,12}$$

(Užíváme známého vzorečku

$$v = |x_1 - x_2| \tag{2,13}$$

pro vzdálenost dvou bodů na ose x, z nichž jeden má souřadnici x_1 a druhý x_2; v našem případě je $x_1 = 0$, $x_2 = x < 0$.)

Je-li dále bod X na úsečce a, je $v = 0$, což analyticky vystiženo zní

$$v = 0 \qquad \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1. \tag{2,14}$$

Je-li konečně bod X napravo od úsečky a, je jeho vzdálenost od této úsečky rovna jeho vzdálenosti od bodu o souřadnici 1, je tedy

$$v = x - 1 \qquad \text{pro } x > 1. \tag{2,15}$$

(Je zde totiž $v = |x - 1|$, ovšem bod ležící napravo od bodu $x = 1$ má souřadnici $x > 1$, takže tedy máme $x - 1 > 0$ čili $|x - 1| = x - 1$.)

Rovnice (2,12), (2,14) a (2,15) jsou ekvivalentní rovnicím (2,11) z předcházejícího příkladu — záměna označení v za y zde nehraje žádnou roli. Protože rovnice (2,11) jsou zase ekvivalentní rovnici (2,10), můžeme řešení úlohy našeho příkladu 2,5 zapsat jedinou formulí

$$v = \frac{|x|}{2} + \frac{|x - 1|}{2} - \frac{1}{2};$$

graf této závislosti vidíme tedy zase na obr. 7, nanášíme-li tam ve směru osy y hledanou vzdálenost v.

Právě podaný příklad ukazuje, že vyšetřování rovnice lomené čáry není samoúčelné, protože to lze užít při jiných přirozených závislostech, v našem případě pro stanovení vzdálenosti bodu od úsečky. Existují ovšem i aplikace v jiných oblastech (viz cvič. 2,5 až 2,7); zde si ukážeme příklad z ekonomie.

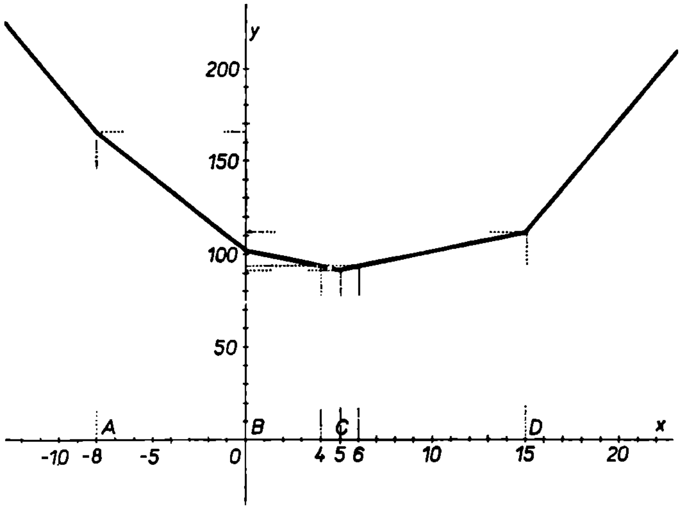
Příklad 2,6. U téže silnice jsou po řadě za sebou čtyři obce A, B, C, D. Jejich vzdálenosti jsou $AB = 8$ km, $BC = 5$ km, $CD = 10$ km. Přitom B leží mezi A a C, C leží mezi B a D. U silnice se mají postavit garáže pro autobusy (depo), které ze zdravotních důvodů musí být vzdáleny aspoň 1 km od každé obce. Garáže budou vybavovat denně 2 linky z obce A, 3 linky z obce B, 2 linky z obce C a 5 linek z obce D za stejných podmínek (tj. se stejným počtem vozů na každé lince). Úloha zní: najít při silnici místo G pro garáže tak, aby autobusy projezdily cestou z G na jednotlivé výchozí stanice co nejméně kilometrů, tj. aby jejich neproduktivní dráha (kdy nevezou cestující) byla co nejkratší.

Silnici, i když není přímočará, znázorněme osou x, počátek volme v obci B (obr. 8). Potom má obec A na této číselné ose souřadnici -8, obec C souřadnici 5 a obec D souřadnici 15. Neznámou souřadnici hledaných garáží G označme x. Abychom vyjádřili vzdálenost garáží od jednotlivých obcí, užijeme opět vzorce (2,13). Vzdálenost garáží od jednotlivých obcí A, B, C, D je pak v kilometrech dána výrazy

$$GA = |x + 8|, GB = |x|, GC = |x - 5|, GD = |x - 15|.$$

Přitom 2 linky, vedené denně z garáží do obce A bez cestujících, znamenají zřejmě $2|x+8|$ km neproduktivní dráhy. Pro ostatní obce dostáváme podobně neproduktivní kilometry ve tvarech $3|x|$, $2|x-5|$ a $5|x-15|$. Celková neproduktivní cesta, jejíž velikost v kilometrech označíme y, je dána součtem

$$y = 2|x+8| + 3|x| + 2|x-5| + 5|x-15|. \quad (2,16)$$



Obr. 8

Tak docházíme při tak jednoduché praktické úloze k rovnici lomené čáry, která má 4 kritické body. Postupem, který jsme se už naučili v předcházejících příkladech, snadno při trošce trpělivosti vypočítáme, že rovnice (2,16) je ekvivalentní těmto pěti rovnicím:

$$\begin{aligned}
y &= -12x + 69 \text{ pro } & x &< -8,\\
y &= -8x + 101 \text{ pro } & -8 \leqq x &< 0,\\
y &= -2x + 101 \text{ pro } & 0 \leqq x &< 5, \qquad (2,17)\\
y &= 2x + 81 \text{ pro } & 5 \leqq x &< 15,\\
y &= 12x - 69 \text{ pro } & 15 &\leqq x.
\end{aligned}$$

Příslušný graf je narýsován v obr. 8; k tomu je třeba poznamenat, že pro nedostatek místa je nutno volit v tomto obrázku na ose y menší měřítko než na ose x. I tak je z obrázku ihned patrno, že naše funkce (2,16) má minimum v bodě $x = 5$; důkaz spočívá ovšem v tom, že pro $x < 5$ je tato funkce klesající (srovnej první tři rovnice (2,17) s větou 1,11) a pro $x > 5$ rostoucí (srovnej poslední dvě rovnice (2,17) s větou 1,10). Její minimální hodnota $y = 91$ se pro $x = 5$ vypočte buď z rovnice (2,16), nebo ze čtvrté rovnice (2,17).

Tím není ovšem ještě úloha z příkladu 2,6 vyřešena. Nezapomeňme, že garáže musí být vzdáleny od každé obce aspoň 1 km, kdežto nalezené minimum leží právě v obci C. Je nasnadě hledat tedy místo pro garáže v okolí bodu C tak, že vzdálenost garáží od bodu C (o souřadnici $x = 5$) bude 1 km; to vede k bodům o souřadnicích $x = 4$ a $x = 6$ na ose x a snadným dosazením do rovnice (2,16) nebo do příslušných rovnic (2,17) vypočítáme, že pokaždé vychází $y = 93$ km a že pro x vzdálenější od bodu C, tedy pro $|x - 5| > 1$, je už příslušné y vždycky větší než 93 km.

Úloha příkladu 2,6 má tedy dvě rovnocenná řešení: garáže G je nutno vystavět ve vzdálenosti 1 km od obce C, lhostejno na které straně od obce C, buď mezi obcemi B, C, nebo mezi obcemi C, D.

K tomuto příkladu připojujeme několik poznámek. Především je nutno zdůraznit vedoucí úlohu matematiky při řešení ekonomických otázek. V našem, i když velmi jednoduchém příkladě, je to velmi názorně patrné. Kdybychom tuto úlohu řešili jen povrchním odhadem založeným na neodůvodněném tušení, přiklonili bychom se možná k návrhu postavit garáže co nejblíž k obci D, protože z ní vyjíždí denně nejvíc linek. V naší soustavě souřadnic by to znamenalo stavět garáže v bodě o souřadnici $x = 14$; rovnice (1,16) dává však pro $x = 14$ hodnotu $y = 113$. To by znamenalo hodnotu o 20 km větší než v případě stavby garáží v bodech $x = 4$ nebo $x = 6$, jež jsme prve našli. Autobusy by tedy projezdily denně zbytečně o 20 km více, než je nezbytně nutno. Při celoročním provozu by to znamenalo značnou položku figurující v rubrice, které by slušel nadpis „zbytečná vydání".

Účelem právě podaného příkladu je především ukázat užitečnost úvah, které jsme prováděli před tím. Je samozřejmé, že všude v praxi (i v autobusové dopravě) se vyskytují úlohy mnohem složitější, v nichž vystupuje víc činitelů než 12 autobusových linek denně jako v našem příkladě. Obvykle matematickou formulaci příslušného ekonomického či jiného problému nelze zapsat jedinou formulí, jako tomu bylo u rovnice (2,16) v našem příkladě. Některé, ovšem zase jednoduché příklady toho druhu si uvedeme v kapitole 5. Ale roste-li počet podmínek, je pak i početní řešení příslušné matematické úlohy složitější. V takových případech nám pomáhá i strojová technika, tedy samočinné počítače a strojní početní stanice. Tím se však nemůžeme v této knížce zabývat; spokojíme se zde jen právě podaným upozorněním na tyto možnosti.

Zastavme se konečně ještě u toho, že úloha z příkladu 2,6 má po matematické stránce dvě rovnocenná řešení $x = 4$ a $x = 6$, přestože rovnice (2,16) svádí k domněnce, že jde o úlohu lineární. Ale rozpis rovnice (2,16) do rovnic (2,17) ukazuje, že jde o funkci po částech lineární; to je vidět i z grafu na obr. 8, který se skládá z několika polopřímek a úseček. Není tedy nic divného, že ve dvou různých bodech nabývá tato funkce téže minimální hodnoty. Jde však o náhodu, při nepatrné obměně dané úlohy se může stát, že vyjde jediné řešení (viz cvičení 2,5).

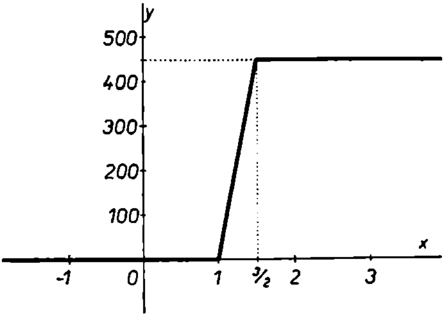
V životě se častěji setkáváme s jevy, jejichž grafem je lomená čára. Následující běžný případ nám zároveň poskytuje příležitost sestavit rovnici lomené čáry, známe-li její jednotlivé části.

Příklad 2,7. Sestrojme graf znázorňující množství vody ve vaně o objemu 450 litrů, začne-li voda rovnoměrně přitékat kohoutem v 1 hodinu a dává-li kohout 15 litrů vody za minutu.

Předpokládá se ovšem, že před otevřením kohoutu je vana prázdná. Označíme-li x čas měřený v hodinách a y množství vody ve vaně měřené v litrech, znamená to, že pro $x < 1$ je $y = 0$. Snadno se spočítá, že celá vana se pak naplní za 30 minut; v časovém rozmezí $1 \leqq x < \frac{3}{2}$ bude tedy $y = 900\,(x - 1)$, neboť voda přitéká stálou rychlostí 900 litrů za hodinu, takže y je přímo úměrné číslu $x - 1$ (v čase $x = 1$ je ještě $y = 0$). Pro $x \geqq \frac{3}{2}$ nebude už vody ve vaně přibývat (vana bude plná) a pak bude stále $y = 450$; přitékající voda bude buď z vany přetékat, nebo odtékat pojistným otvorem. Hledanou závislost můžeme tedy po částech rozepsat ve tři rovnice

$$
\begin{aligned}
y &= 0 && \text{pro } x < 1, \\
y &= 900(x-1) && \text{pro } 1 \leqq x < \frac{3}{2}, \\
y &= 450 && \text{pro } \frac{3}{2} \leqq x .
\end{aligned}
\tag{2,18}
$$

Graficky je to znázorněno opět lomenou čarou na obr. 9, kde na osu x nanášíme hodiny a na osu y litry; měřítka na obou osách volíme nezávisle na sobě.



Obr. 9

Abychom rovnice (2,18) zapsali jedinou formulí, uvažme, že kritické body naší lomené čáry zde nastávají pro hodnoty $x = 1$ a $x = \frac{3}{2}$, takže podle předcházejících příkladů lze očekávat, že naše funkce vznikne kombinací výrazů $|x - 1|$ a $\left|x - \frac{3}{2}\right|$ a že nadto musíme ještě připustit možnost, že by k tomu mohla přistoupit obyčejná lineární funkce. Zkusme tedy, je-li hledaná funkce tvaru

$$y = a\,|x-1| + b\left|x-\frac{3}{2}\right| + cx + d, \qquad (2{,}19)$$

kde a, b, c, d jsou dosud neznámá čísla. Určíme je na základě toho, že na naší lomené čáře známe 4 body, totiž počátek [0; 0], body [1; 0] a $\left[\frac{3}{2};\ 450\right]$ a např. bod [2; 450]. Dosazením souřadnic počátku do rovnice (2,19) vychází po jednoduchém počtu

$$a + \frac{3}{2}\,b + d = 0,$$

dosazením bodu [1; 0] podobně

$$\frac{1}{2}\,b + c + d = 0,$$

dále dosazením bodu $\left[\frac{3}{2};\ 450\right]$ dostáváme

$$\frac{1}{2}\,a + \frac{3}{2}\,c + d = 450$$

a konečně dosazení [2; 450] vede k rovnici

$$a + \frac{1}{2}\,b + 2c + d = 450.$$

Tak jsme dostali soustavu 4 lineárních rovnic pro 4 neznámé a, b, c, d, o níž se snadno přesvědčíte, že má jediné řešení*)

---

*) Neznáte-li vhodnější způsob, řešte tuto soustavu tak, že z některé rovnice vypočítáte jednu neznámou pomocí ostatních a výsledek dosadíte do zbývajících tří rovnic; tak redukujete úlohu na řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých a podobně pokračujete dále.

$$a = 450,\ b = -450,\ c = 0,\ d = 225.$$

Naše funkce (2,19) tedy zní

$$y = 450\,|x - 1| - 450\left|x - \frac{3}{2}\right| + 225$$

nebo po úpravě

$$y = 450\,|x - 1| - 225\,|2x - 3| + 225.$$

Proveďte si zkoušku tak, že tuto rovnici rozepíšete zpět v rovnice (2,18) způsobem, který jste poznali v předcházejících příkladech.

Budiž ještě připomenuto, že některé funkce tohoto druhu jsou svou praktickou povahou omezeny jen na určitý, nikoli nekonečný interval nezávisle proměnné x, takže jejich grafem není nekonečně dlouhá lomená čára, ale jen její část, skládající se z několika úseček. Příklad je ve cvičení 2,7.

Cvičení

2,1. Pro které body $[x; y]$ je $y \geqq |x|$?

2,2. Pro které body $[x; y]$ je $y < |x|$?

2,3. Narýsujte graf funkce

a) $y = \dfrac{|x-1|}{2} - \dfrac{|x|}{2} + x - \dfrac{1}{2}$,

b) $y = 2x + 1 + |x - 3| - 2|x + 1|$.

2,4. Porovnejte navzájem grafy funkcí

a) $y = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$, b) $y = x + |x|$.

2,5. U přímé silnice stojí tři obce A, B, C. Jejich vzdálenosti jsou $AB = 6$ km, $BC = 8$ km, B leží mezi A a C. U silnice se mají postavit autobusové garáže, které ze zdravotních důvodů mají být vzdáleny aspoň 1 km od každé obce. Garáže budou vybavovat denně 3 linky z obce A, 2 linky z obce B a 4 linky z obce C za stejných podmínek. Kde je třeba postavit garáže, aby autobusy projezdily cestou z nich na své výchozí stanice co nejméně kilometrů (čili aby měly co nejkratší neproduktivní dráhu)?

2,6. Nádrž má objem 10 m³. V čase $x = 0$ hodin začne do ní přitékat přívodem voda rovnoměrnou rychlostí v m³ za hodinu ($v > 0$). Sestrojte graf znázorňující množství vody v nádrži v jednotlivých okamžicích.

2,7. Při osmihodinové pracovní době činí mzda 4,— Kčs za hodinu. Za práci přesčas se platí 5,— Kčs za hodinu. Sestrojte graf znázorňující závislost denní mzdy y na odpracované době x, pracuje-li se nejvýše 16 hodin za den.