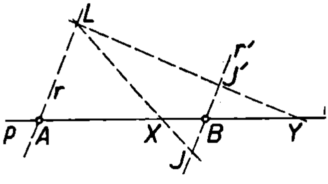
5. kapitola

KRUŽNICE JAKO MNOŽINA BODŮ

I. Je dána přímka p a na ní dva různé body A, B. Tu platí:

Věta 12. *Na přímce p existují právě dva různé body X, Y, které od bodů A, B (v tomto pořadí) mají daný poměr vzdáleností $\lambda \neq 0, 1$. Pro $\lambda = 1$ existuje jediný bod této vlastnosti (střed úsečky AB); hodnotě $\lambda = 0$ odpovídá sám bod A.*

Důkaz (obr. 48) provedeme prostě tak, že tyto dva body sestrojíme. Za tím účelem proložme bodem A přímku $r \nparallel p$ a bodem B přímku $r' \parallel r$. Na přímce r určeme bod L tak, aby $AL = \lambda$ a na přímce r' určeme dva různé body J, J' tak, aby $BJ = BJ' = 1$. Pak přímky LJ, LJ' vytnou na přímce p žádané body X, Y, z nichž jeden je mezi body A, B a druhý na prodloužení úsečky AB.



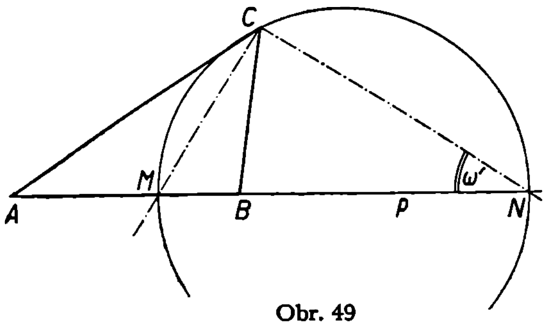
Obr. 48

Důkaz správnosti této konstrukce plyne z podobnosti trojúhelníků XAL, XBJ, případně YAL, YBJ'.

Jestliže $\lambda = 1$, potom popsaná konstrukce nás přivede k jedinému bodu — středu úsečky AB.

Jestliže posléze $\lambda = 0 = 0 : 1$, dostaneme jediný bod — bod A.

Věta 13. *Osa vnitřního (vnějšího) úhlu protne protější stranu daného trojúhelníka v bodě M (N), o němž platí* $AM : BM = b : a$ $(AN : BN = b : a)$.



Obr. 49

Důkaz provedeme pro osu vnitřního úhlu při vrcholu C. V obr. 49 je dán trojúhelník ABC; osa úhlu ACB protíná stranu AB v bodě M. Daný trojúhelník je rozdělen na dva trojúhelníky AMC, BMC. Použijeme-li sinové věty, dostaneme z prvního a z druhého trojúhelníka $(\omega = \sphericalangle BMC)$

$$AM = AC . \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \omega,$$

$$BM = BC . \sin \frac{\gamma}{2} : \sin \omega.$$

Z těchto dvou rovnic již máme

$$AM : BM = AC : BC = b : a.$$

Tím je věta dokázána pro osu vnitřního úhlu, neboť stejným způsobem se dá dokázat pro osy vnitřních úhlů CAB, CBA.

Osa vnějšího úhlu při vrcholu C protne protilehlou stranu v bodě N, který je na prodloužení úsečky AB. Označíme-li $\sphericalangle CNB = \omega'$, pak z trojúhelníků ANC, BNC užitím sinové věty obdržíme

$$AN : AC = \sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\omega',$$

$$BN : BC = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\omega'.$$

Z těchto dvou rovnic dělením dojdeme k výsledku

$$AN : BN = b : a.$$

Platí však i věta obrácená:

Věta 13'. *Jestliže přímka CM dělí stranu AB trojúhelníka ABC v poměru $AM : BM = b : a$, pak tato přímka je buď osou vnitřního, nebo osou vnějšího úhlu při vrcholu C podle toho, zda bod M leží mezi body A, B, nebo na prodloužené úsečce AB.*

D ů k a z. a) Jestliže $AM : BM = 1$ a bod M leží mezi body A, B, znamená to, že $a = b$ a věta je pravdivá.

b) Nechť $AM : BM \neq 1$ a bod M leží mezi body A, B. Osa vnitřního úhlu ACB protne stranu AB v bodě M', o němž platí

$$AM' : BM' = b : a.$$

To však je možné jedině tak, že $M' \equiv M$ a věta je pravdivá i v tomto případě.

Podobně se provede důkaz v případě, že bod M leží na prodloužení úsečky AB, ale poměr $AM : BM \neq 0, 1$.

Věta 14. *Množina všech bodů, které mají od dvou pevných a různých bodů stále stejný poměr vzdáleností $m : n$ (různý od 0 a 1), je kružnice zvaná Apolloniova.*

Důkaz (obr. 49). Dané dva různé body označme A, B. Ty leží na přímce p. Na ní existují, jak víme, dva různé body M, N, o nichž platí

$$AM : BM = m : n, \qquad (1)$$
$$AN : BN = m : n,$$

kde poměr $m : n$ je dán. Body M, N náleží naší množině bodů.

Nechť bod C, který neleží na přímce AB, náleží uvažované množině bodů. Pak platí

$$AC : BC = m : n. \qquad (2)$$

Poněvadž body A, B, C můžeme považovat za vrcholy trojúhelníka, plyne z rovnic (1) a (2) za použití věty *13'*, že přímka CM je osou vnitřního úhlu a přímka CN je osa vnějšího úhlu v trojúhelníku ABC. Avšak potom přímky CM, CN jsou navzájem kolmé a bod C je bodem kružnice k sestrojené nad průměrem MN.

Obráceně. Zvolme na kružnici k libovolný bod $C' \neq M, N$ a spojme jej s body A, B. Dostaneme tak trojúhelník ABC'. Přímka MC' rozdělí vnitřní úhel $AC'B$ na dva:

$$\sphericalangle AC'M = \gamma_1, \quad \sphericalangle BC'M = \gamma_2.$$

Rozumí se, že

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = \sphericalangle AC'B < 180°. \qquad (1)$$

Písmenem v označme ještě výšku trojúhelníka ABC' jdoucí vrcholem C'. Obsah trojúhelníka AMC' lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\tfrac{1}{2}\,AM\,.\,v = \tfrac{1}{2}\,AC'\,.\,MC' \sin \gamma_1.$$

Podobně obsah trojúhelníka BMC' lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$\tfrac{1}{2}\,BM\,.\,v = \tfrac{1}{2}\,BC'\,.\,MC' \sin \gamma_2. \qquad (1')$$

Z těchto dvou rovnic získáme novou

$$AM : BM = AC' \sin \gamma_1 : BC' \sin \gamma_2. \qquad (2)$$

Podobně z trojúhelníků ANC', BNC' dostaneme

$$AN : BN = AC' \sin (90° + \gamma_1) : BC' \sin (90° - \gamma_2) =$$
$$= AC' \cos \gamma_1 : BC' \cos \gamma_2. \qquad (3)$$

Víme však, že

$$AM : BM = AN : BN = m : n$$

a proto z rovnice (2) a (3) dostaneme další rovnici

$$\sin \gamma_1 : \sin \gamma_2 = \cos \gamma_1 : \cos \gamma_2$$

čili

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_2.$$

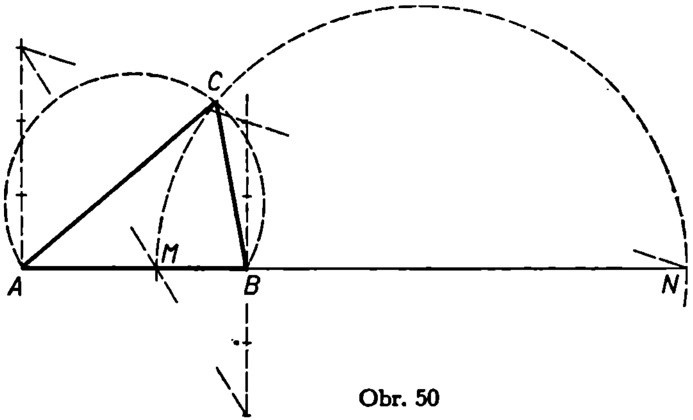
S ohledem na rovnici (1) docházíme k vztahu

$$\gamma_1 = \gamma_2,$$

tj. přímka MC' je osou vnitřního úhlu trojúhelníka ABC' a přímka NC' je osou vnějšího úhlu. Bod C' je bodem uvažované množiny. Tím je také důkaz vyslovené věty proveden.

Příklady

1. Sestrojte trojúhelník, v němž $c = 6$, $\gamma = 60°$, $a : b = 2 : 3$.



Obr. 50

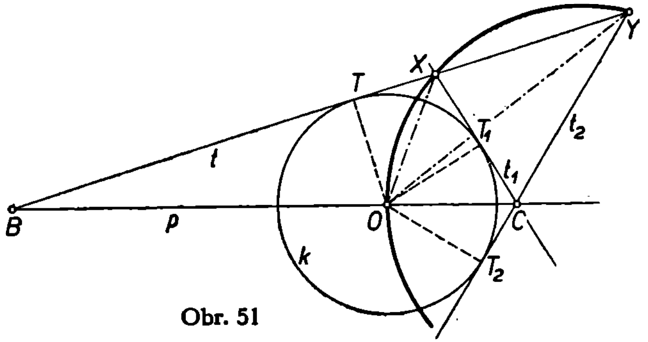
Řešení (obr. 50). Vrchol C hledaného trojúhelníka ABC musí ležet na tom oblouku kružnice k, z jehož bodů je úsečku AB vidět pod úhlem 60°. Potom leží i na Apolloniově kružnici opsané nad průměrem MN, přičemž body M, N jsou určeny vztahy

$$AM : BM = 3 : 2, \quad AN : BN = 3 : 2.$$

Poněvadž bodové dvojice A, B; M, N se vzájemně oddělují, má úloha vždy řešení, a to (až na řešení souměrné) jediné.

2. Na dané přímce p jsou dány tři různé body B, O, C v tomto pořadí. Kolem bodu O je opsána kružnice k libovolným poloměrem, ale tak, aby body B, C ležely buď vně této kružnice, nebo jeden vně (vzdálenější od O) a druhý na kružnici (bližší bodu O). Z bodů B, C jsou k ní sestrojeny tečny, které se protnou v bodě X. Jaká je množina všech bodů X, mění-li kružnice k svůj poloměr?

Řešení (obr. 51). a) Jestliže $BO = CO$, pak množinou všech bodů dané vlastnosti je osa úsečky BC s výjimkou bodu O.



Obr. 51

b) Věnujme tedy pozornost případu, kdy $BO \neq CO$. Z bodu B sestrojme jednu tečnu kružnice k (v obr. je to tečna t) a z bodu C sestrojme obě a označme je t_1, t_2. Jejich body dotyku jsou T_1, T_2. Průsečík přímek t, t_1 je X. V trojúhelníku BCX je přímka XO osou vnitřního úhlu BXC, neboť čtyřúhelník $OTXT_1$ je deltoid. Proto platí

$$BX : CX = BO : CO$$

a bod X leží na Apolloniově kružnici příslušné úsečce BC; poměr vzdáleností je roven $BO : CO$.

Podobně tečny t, t_2 se protínají v bodě Y, o němž platí

$$BY : CY = BO : CO,$$

neboť přímka YO je osou vnitřního úhlu trojúhelníka BYC. Tudíž i bod Y leží na téže Apolloniově kružnici jako bod X.

Obráceně. Zvolme na Apolloniově kružnici libovolný bod X' neležící na přímce p. Přímka OX' je osou úhlu trojúhelníka BCX' a proto existuje (jediná) kružnice se středem O dotýkající se přímek BO', CO'.

Došli jsme tak k výsledku:

Množinou všech průsečíků uvažovaných tečen je Apolloniova kružnice, jejíž každý bod má tu vlastnost, že poměr jeho vzdáleností od bodů B, C je roven $BO : CO$. Do této množiny nesmíme počítat průsečíky Apolloniovy kružnice s přímkou BC.

3. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$, z nichž každá leží vně druhé. Najděte množinu všech bodů, z nichž vidíme tyto dvě kružnice pod úhlem konstantní velikosti.

Řešení. a) Jestliže jsou obě kružnice shodné, pak hledanou množinou je ta osa souměrnosti obou kružnic, která půlí jejich střednou.

b) Mějme tedy kružnice různých poloměrů a nechť bod M náleží hledané množině bodů. Veďme z něho tečny t, u ke kružnici k a tečny t', u' ke kružnici k'. Body dotyku označíme postupně T, U, T', U'. Podle daného platí (obr. 52)

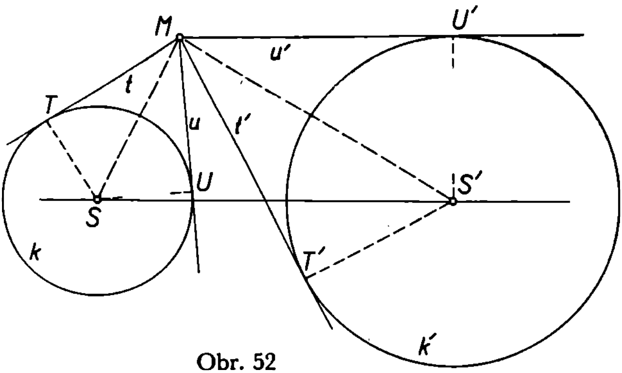
$$\sphericalangle tu = \sphericalangle t'u' = 2\omega < 180°.$$

Přímky MS, MS' půlí úhly těchto tečen. Z pravoúhlých trojúhelníků MST, $MS'T'$ vyplývá

$$MS . \sin \omega = r, \quad MS' . \sin \omega = r'$$

a z toho

$$MS : MS' = r : r'.$$



Obr. 52

Bod M leží podle toho na Apolloniově kružnici, která je množinou všech bodů, jež mají od bodů S, S' poměr vzdáleností rovný $r : r'$.

Obráceně, zvolme na této kružnici libovolný bod M'. Poněvadž je bodem Apolloniovy kružnice, platí

$$SM' : S'M' = r : r'. \qquad (1)$$

Z bodu M' sestrojené tečny ke kružnici k svírají úhel $2\omega < 180°$ a tečny sestrojené z téhož bodu ke kružnici k svírají úhel $2\omega' < 180°$. Platí proto

$$SM' . \sin \omega = r, \qquad S'M' . \sin \omega' = r'.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (1), dostaneme

$$\sin \omega = \sin \omega'.$$

Poněvadž však

$$2\omega < 180°, \text{ tj. } \omega < 90°,$$
$$2\omega' < 180°, \text{ tj. } \omega' < 90°,$$

plyne z toho, že

$$\omega = \omega'.$$

Došli jsme tak k výsledku: Množinou všech bodů, z nichž jsou vidět dvě kružnice různých poloměrů, z nichž každá leží vně druhé, pod konstantním úhlem, je Apolloniova kružnice, která má oba středy stejnolehlosti daných kružnic za průměr. (Viz cvič. 20.)

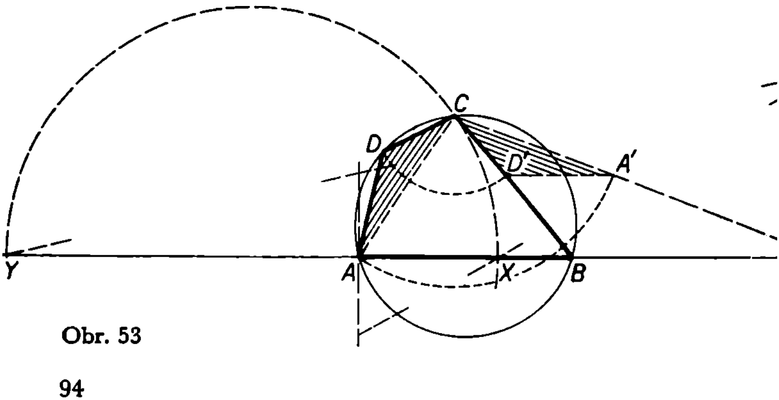
4. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jestliže jsou dány délky jeho stran: $AB = a = 6$, $BC = b = 5{,}2$, $CD = c = 2{,}2$, $AD = d = 3$.

Řešení (obr. 53). Trojúhelník ACD otočme kolem vrcholu C tak, aby polopřímka CD splynula s polopřímkou CB. Vrchol D tím přejde v bod D' na polopřímce CB a bod A přejde do bodu A'. Platí tedy

$$\triangle CDA \cong \triangle CD'A'.$$

Poněvadž protější úhly ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou výplňkové, je $D'A' \parallel BE$, kde E je průsečík přímky CA' s přímkou AB. Potom však

$$\triangle CD'A' \sim \triangle CBE$$



Obr. 53

a odtud $\qquad CD' : D'A' = CB : BE.$

Stručnější zápis je

$$c : d = b : BE, \quad \text{tj.} \quad BE = \frac{b \, . \, d}{c}.$$

Známe tedy délku úsečky BE. Počítejme ještě poměr

$$AC : EC = A'C : EC = D'C : BC = c : b.$$

Podle toho vrchol C má poměr vzdáleností od bodů A, E roven poměru $c : b$ a leží tudíž na Apolloniově kružnici, která vzdálenost bodů A, E dělí v poměru $c : b$.

Z předchozí úvahy plyne tato konstrukce:

a) Sestrojíme úsečku $BE = \frac{b \, . \, d}{c}$ a pak na libovolné přímce určíme body A, B, E tak, aby $AB = a$, $BE = \frac{b \, . \, d}{c}$ a aby přitom platilo $AE = AB + BE$.

b) Sestrojíme Apolloniovu kružnici, která body A, E odděluje v poměru $c : b$. Na ní a na kružnici (B, b) leží vrchol C.

c) Sestrojíme vrchol D.

Sestrojený čtyřúhelník je skutečně tětivový, neboť sestrojená délka BE předpokládá, že $D'A' \parallel BE$, což ve svých důsledcích vede k tomu, že trojúhelníky CDA, $CD'A'$ jsou shodné, a to má za následek, že úhly ABC, CDA jsou výplňkové.

V diskusi si musíme nejprve všimnout toho, za jakých podmínek dostaneme bod C. To je průsečík Apolloniovy kružnice s kružnicí $(B; b)$. Počítejme proto poloměr Apolloniovy kružnice. Především (X, Y jsou průsečíky Apol. kružnice s AB).

$$AX + EX = \frac{ac + bd}{c},$$

$$AX : EX = c : b.$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$AX = \frac{ac + bd}{b + c}, \quad EX = \frac{b(ac + bd)}{c(b + d)}.$$

Podobně řešením soustavy

$$EY + AY = \frac{ac + bd}{c},$$

$$AY : EY = c : b,$$

dostaneme za předpokladu $b > c$.

$$AY = \frac{ac + bd}{b - c}, \quad EY = \frac{b(ac + bd)}{c(b - c)}.$$

Označíme-li r poloměr Apolloniovy kružnice, je

$$2r = XY = EY - EX = \frac{2b(ac + bd)}{b^2 - c^2}.$$

Je-li S střed Apolloniovy kružnice, platí

$$SB = \frac{b(ab + cd)}{b^2 - c^2}.$$

Aby vrchol C existoval, musí platit

$$|SC - BC| < SB < SC + BC.$$

Po dosazení a úpravě dojdeme k dvěma nerovnostem

$$a - d < b + c, \quad b - c < a + d. \tag{1}$$

Pro existenci bodu D obdobně platí

$$|CD - AD| < AC < CD + AD,$$

což jinak psáno, dá

$$|c - d| < \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} < c + d.$$

Všimneme si zatím nerovnosti

$$|c - d| < \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Umocníme a po kratší úpravě dostaneme

$$(c - d)^2 < (a + b)^2,$$

tj.

$$|c - d| < a + b. \tag{2}$$

Podobně z nerovnosti

$$\sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} < c + d$$

dostaneme

$$|a - b| < c + d. \tag{3}$$

Vztahy (1), (2), (3) jsou podmínky pro to, aby se čtyřúhelník $ABCD$ dal sestrojit. Dalo by se také říci, že podmínky řešení jsou: Každá strana čtyřúhelníka je menší než součet ostatních stran.

Vraťme se nyní k případu $b = c$, který jsme v diskusi vyloučili. Kdyby tato rovnost platila, bylo by

$$BE = d, \quad \text{tj.} \quad A' \equiv E, \quad D' \equiv B.$$

Z toho by dále platilo

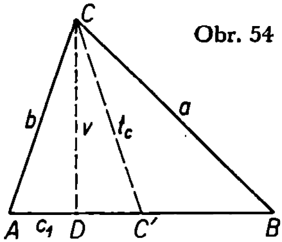
$$CE = CA$$

a příklad by se dal řešit podstatně jednodušeji.

II. Kružnice jako množina bodů určité vlastnosti se vyskytuje velmi často. Uvedeme si ještě několik příkladů, avšak pro další budeme potřebovat několik vět, které si odvodíme.

Věta 15. *Délka těžnice trojúhelníka ABC, jež vychází z vrcholu C, je dána vzorcem*

$$t_c^2 = \tfrac{1}{4}\,[2(a^2 + b^2) - c^2].$$



Obr. 54

Důkaz (obr. 54). Patu výšky spuštěné z vrcholu C označme D, střed strany AB označme C'. Tedy

$$CD = v, \quad CC' = t_c.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka CDC' plyne

$$t_c^2 = CD^2 + C'D^2.$$

Nejprve vypočítáme délky úseček

$$c_1 = AD, \quad c_2 = BD,$$

pak vypočítáme délku výšky v a naposled délku těžnice t_c.

Je patrno, že platí

$$v^2 = AC^2 - AD^2 = b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2.$$

Odtud vyplývá následující vztah

$$c_2^2 - c_1^2 = a^2 - b^2,$$

a ten postupně upravujeme:

$$(c_2 + c_1)(c_2 - c_1) = a^2 - b^2,$$

$$c_2 - c_1 = (a^2 - b^2) : c.$$

K této rovnici připišme rovnici

$$c_1 + c_2 = c.$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic dostaneme

$$c_1 = (b^2 + c^2 - a^2) : 2c, \qquad c_2 = (a^2 - b^2 + c^2) : 2c.$$

Nyní se dá vypočítat délka výšky jako funkce stran:

$$v^2 = b^2 - c_1^2 = b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2) : 2c]^2.$$

Ještě vyjádříme délku úsečky DC':

$$DC' = \tfrac{1}{2}c - c_1 = (a^2 - b^2) : 2c$$

a můžeme již přistoupit k výpočtu délky těžnice.

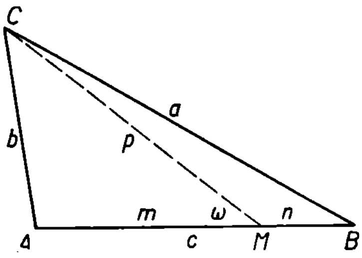
$$t_c^2 = b^2 - [(b^2 + c^2 - a^2) : 2c]^2 + [(a^2 - b^2) : 2c]^2.$$

Z toho pak po kratší úpravě dostaneme vzorec dříve uvedený. Cyklickou záměnou dojdeme k obdobným vzorcům pro těžnice t_a, t_b.

Tak, jak jsme právě vyjádřili délku těžnice pomocí stran, mohli bychom vyjádřit i délku výšek nebo délku osy vnitřního či vnějšího úhlu. Existuje však vzorec — tzv. *Stewartův* — který vyjadřuje délku kterékoli úsečky omezené vrcholem trojúhelníka a bodem na protější straně.

Věta 16. *V trojúhelníku ABC je dána úsečka CM, kde M je bod na straně AB a dělí tuto stranu na úsečky délek $AM = m$, $BM = n$. Jestliže $CM = p$, pak platí*

$$cp^2 = ma^2 + nb^2 - cmn.$$



Obr. 55

Důkaz (obr. 55). Na trojúhelníky AMC, BMC použijeme kosinové věty:

$$b^2 = m^2 + p^2 - 2mp \cos \omega,$$
$$a^2 = n^2 + p^2 + 2np \cos \omega.$$

Vyloučíme-li z obou rovnic $\cos \omega$ a použijeme-li vztahu $m + n = c$, dojdeme k Stewartovu vzorci.

V tomto vzorci je obsažen vzorec dříve odvozený pro délku těžnice t_c. Stačí totiž položit $m = n = \frac{c}{2}$. Je v něm obsažen vzorec pro délku výšky v_c. To bychom museli položit

$$m = c_1 = (b^2 + c^2 - a^2) : 2c, \quad n = c_2 = (a^2 - b^2 + c^2) : 2c.$$

Proveďte oba případy.

Vraťme se však ke vzorci

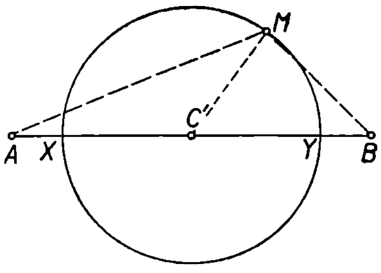
$$t_c^2 = \frac{1}{4}\,[2(a^2 + b^2) - c^2],$$

z něhož vyplývá

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\,(4\,t_c^2 + c^2). \qquad (1)$$

Odtud je patrno: Jsou-li v trojúhelníku dány strana c a těžnice t_c, potom vrchol C leží na kružnici (C', t_c) a zbývající dvě strany jsou vázány vztahem (1). Můžeme však vyslovit větu mnohem silnější.

Věta 17. *Množina všech bodů, pro něž součet čtverců vzdáleností od dvou pevných a různých bodů je konstantní a roven $k^2 \neq 0$, je kružnice. Její střed půlí vzdálenost pevných bodů a její poloměr r je dán vzorcem $r^2 = (2k^2 - c^2) : 4$, kde c je vzdálenost daných dvou bodů.*



Obr. 56

Důkaz (obr. 56). Dané dva body označíme A, B a střed úsečky AB označíme C'. Bod M, který neleží na přímce AB, je bodem naší množiny a tudíž o něm platí

$$AM^2 + BM^2 = k^2.$$

V trojúhelníku ABM je MC' těžnicí a platí tedy

$$MC'^2 = [2(AM^2 + BM^2) - AB^2] : 4.$$

Po dosazení za součet $AM^2 + BM^2$ nabude rovnice jednoduššího tvaru:

$$MC'^2 = (2k^2 - c^2) : 4 = \text{konst.}$$

Bod M je podle toho bodem kružnice (C', MC'), která má pevný střed C' a konstantní poloměr MC'.

Obráceně, na této kružnici zvolme libovolný bod M', který neleží na přímce AB. Pro těžnici $M'C'$ trojúhelníka ABM' platí

$$M'C'^2 = [2(AM'^2 + BM'^2) - AB^2] : 4,$$

což jinak psáno, dá

$$AM'^2 + BM'^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2,$$

což je veličina konstantní. Znamená to, že bod M' a tedy i každý jiný bod zmíněné kružnice má součet čtverců vzdáleností od bodů A, B rovný dané konstantě k^2. Tím je důkaz proveden pro body neležící na přímce AB. Ukážeme však, že i body společné přímce AB a uvažované kružnice náleží naší množině bodů. Označme tyto body X, Y. Je patrno, že

$$AX = c : 2 - t_c, \quad BX = c : 2 + t_c,$$

a proto

$$AX^2 + BX^2 = c^2 : 2 + 2t_c^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2 = k^2.$$

Pro bod Y se důkaz provede podobně.

V obr. 56 je nakreslena situace pro $k < c$. Úsečka XY leží proto uvnitř úsečky AB. Platí-li $k > c$, potom by $XY > AB$. Kdyby posléze $k = c$, platilo by pak $XY =$

$= AB$, tj. $X \equiv A$, $Y \equiv B$. V každém případě by však body X, Y náležely uvažované množině bodů, i když rovnice, pomocí nichž by se to dokazovalo, by byly poněkud jiné.

Příklady

1. Vypočtěte délky stran a, b v trojúhelníku ABC, jestliže je dána strana c, protilehlý úhel $\gamma = 60°$ a těžnice t_c.

Řešení. Víme, že

$$a^2 + b^2 = (4t_c^2 + c^2) : 2. \tag{1}$$

K tomu připíšeme kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - ab.$$

Z obou rovnic dostaneme

$$ab = (4t_c^2 - c^2) : 2.$$

Známou úpravou rovnic (1) a (2) dojdeme k jednodušší soustavě

$$a + b = \sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2},$$
$$a - b = \sqrt{(3c^2 - 4t_c^2) : 2}.$$

Odtud již snadno jednak

$$a_1 = \left[\sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2} + \sqrt{(3c^2 - 4t_c^2) : 2}\right] : 2,$$
$$b_1 = \left[\sqrt{(12t_c^2 - c^2) : 2} - \sqrt{(3c^2 - 4t_c^2) : 2}\right] : 2,$$

a jednak

$$a_2 = b_1, \quad b_2 = a_1.$$

Je okamžitě patrno, že podmínky řešitelnosti jsou

$$12\, t_c^2 - c^2 > 0,$$
$$3\, c^2 - 4\, t_c^2 \geqq 0,$$
$$12\, t_c^2 - c^2 > 3c^2 - 4\, t_c^2\,.$$

Pro dané délky tak dostáváme

$$\tfrac{2}{3}\, t_c \sqrt{3} \leqq c < 2t_c,$$

což jsou podmínky řešitelnosti. V případě rovnosti má úloha jediné řešení — rovnoramenný trojúhelník.

2. Je dána pevná kružnice k a na ní dva pevné a různé body A, B. Na kružnici k zvolme libovolný bod $M \neq A$, B a na polopřímce BM sestrojme bod $C \neq B$ tak, aby $BM = CM$. Bod C spojme ještě se středem O tětivy AB. Jaká je množina všech průsečíků X přímek AM, CO, jestliže se bod M pohybuje po kružnici k?

Řešení (obr. 57). V trojúhelníku ABC jsou přímky AM, CO těžnice, bod X je těžiště a tudíž

$$AX = \tfrac{2}{3}\, AM.$$

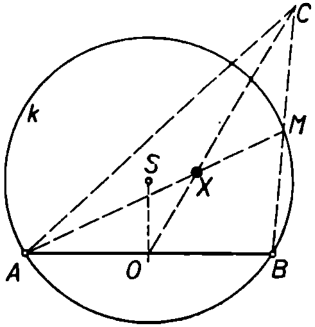
Víme, že bod M opisuje kružnici k a z právě napsané rovnice plyne, že bod X leží na kružnici k', která ve stejnolehlosti o středu A a koeficientu $\frac{2}{3}$ je obrazem kružnice k.

Obráceně, zvolme na kružnici k' bod Y mimo bod A a mimo průsečík přímky AB s kružnicí k'. Jemu v uvažované stejnolehlosti odpovídá na kružnici k bod N, a to tak, že

$$AN = \tfrac{3}{2}\, AY, \quad \text{tj.} \quad AY = \tfrac{2}{3}\, AN.$$

Vzhledem k tomuto vztahu se dá sestrojit trojúhelník ABC' tak, že Y je jeho těžiště a N je střed strany BC'.

Z toho všeho je patrno: Množina všech bodů X (nebo též množina všech těžišť trojúhelníků ABC) je kružnice, která ve stejnolehlosti o středu A a koeficientu $\frac{2}{3}$ je obrazem kružnice k. Přitom obrazy bodů A, B je nutné z množiny vyjmout.



Obr. 57

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Kolem jeho hlavního vrcholu C je opsána kružnice poloměrem $r < CB = CA$ a z vrcholů A, B jsou k ní sestrojeny tečny. Najděte množinu všech průsečíků těchto tečen, jestliže poloměr r se mění.

Řešení (obr. 58). a) Množina všech průsečíků tečen, které jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti daného trojúhelníka, je právě tato osa s výjimkou bodu C. (Je to množina bodů U, V.)

b) Hledejme tedy množinu všech průsečíků takových tečen, které nejsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti daného trojúhelníka. V obr. 58 jsou to např.

tečny t, u, jež se protínají v bodě X. Body dotyku tečen t, u označme po řadě K, L. Podle věty *Ssu* o shodnosti trojúhelníků je

$$\triangle CKB \cong \triangle CLA,$$

neboť

$$CB = CA, \quad CK = CL$$

a oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. Proto

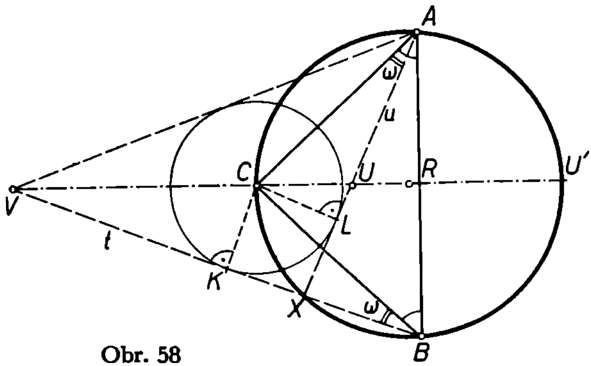
$$\sphericalangle CBK = \sphericalangle CAL = \omega.$$

Důsledek toho je, že i

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AXB.$$

(Obě ramena úhlu ACB se v kladném smyslu otočila o týž úhel ω.) Proto bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Obráceně. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC zvolme libovolný bod X' různý od bodů A, B, C. Přímky $u' \equiv AX'$, $t' \equiv BX'$ jsou tečny kružnice o středu C. Toto tvrzení snadno dokážeme. Přímky u', t' jsou navzájem



Obr. 58

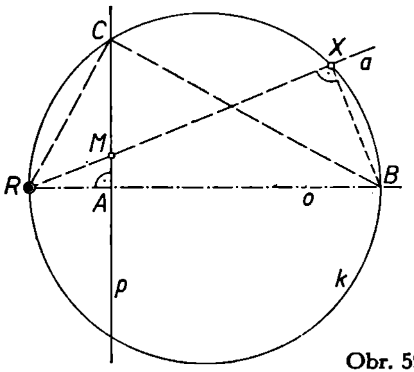
kolmé (obvodový úhel nad průměrem) a mají dvě osy souměrnosti, které procházejí středy oblouků $\widehat{AB}$; to jsou body U', C. Oba tyto středy jsou zároveň středy kružnic dotýkajících se přímek u', t'. Pro nás má význam jen bod C.

Došli jsme tak k výsledku: Množina všech bodů X je kružnice opsaná trojúhelníku ABC s výjimkou bodu C.

4. Je dána přímka p a mimo ni bod R. Bodem R je vedena libovolná přímka a, která přímku p protne v bodě M. Na polopřímce RM určíme bod X tak, aby $RM \,.\, RX = k^2$, kde $k \neq 0$. Najděte množinu všech bodů X, jestliže přímka a se otáčí kolem bodu R.

Řešení (obr. 59). Sestrojme přímku o jdoucí bodem R kolmo na přímku p. Její patu označme A. Na polopřímce RA existuje jediný bod B, pro nějž platí

$$RA \,.\, RB = k^2.$$



Obr. 59

Pata kolmice, spuštěná z bodu B na přímku a, je hledaný bod X. Důkaz tohoto tvrzení provedeme takto:

$$\triangle RAM \sim \triangle RXB,$$

neboť mají jeden úhel společný a oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. I platí

$$RA : RM = RX : RB$$

a odtud již máme

$$RA . RB = RM . RX = k^2.$$

Bod X leží tedy na kružnici k sestrojené nad průměrem RB.

Obráceně. Na kružnici k zvolme libovolný bod $X' \not\equiv R, B$. Jeho spojnice s bodem R protne přímku p v bodě M'. Body R, B, X' jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka podobného trojúhelníku $RM'A$. Z toho pak plyne

$$RA : RM' = RX' : RB,$$

z čehož opět dostaneme

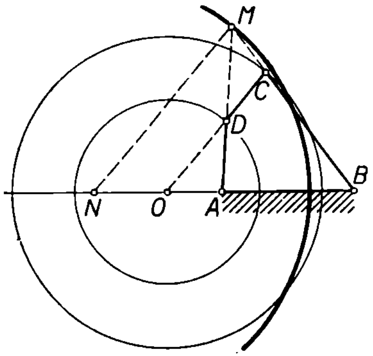
$$RA . RB = RM' . RX' = k^2.$$

Z toho vidíme, že bod X' odpovídá bodu M' na přímce p. Výsledek lze vyjádřit větou: Množina všech bodů X je kružnice nad průměrem AB s výjimkou bodu R, který neodpovídá žádnému bodu přímky p.

Poznámky. Rovnicí $RM . RX = k^2$, kde $k \neq 0$, je v rovině mezi body určena příbuznost, v níž bodu M odpovídá bod X. Této příbuznosti říkáme kruhová inverze.

Bod X můžeme také zvolit na polopřímce MR, ale pak bod B musí ležet na polopřímce AR.

5. Je dán proměnný konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž protější strany AB, CD mají konstantní délku a v prodloužení se protínají v pevném bodě O. Strana AB je kromě toho pevná, nepohyblivá, zatímco strana CD se otáčí kolem bodu O. Najděte množinu všech průsečíků M stran AD, BC.



Obr. 60

Řešení (obr. 60). Pro rychlejší vyjadřování označme

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c,\ OD = d,$$
$$AB = b - a = k,\quad CD = c - d.$$

Bodem M veďme rovnoběžku s přímkou OC a ta protne přímku OB v bodě N. Z podobnosti trojúhelníků MNB, COB plyne

$$MN : NB = CO : OB = c : b,$$

z čehož

$$MN = \frac{c}{b}\, NB. \tag{1}$$

Dále je patrno, že

$$\triangle OAD \sim \triangle NAM,$$

a proto

$$OD : OA = MN : NA = d : a,$$

$$MN = \frac{d}{a} NA. \qquad (2)$$

Poněvadž levé strany rovnic (1) a (2) jsou shodné, shodují se i pravé strany:

$$\frac{c}{b} NB = \frac{d}{a} NA.$$

Ale $NB = NA + k$ a tudíž po dosazení

$$\frac{c}{b} NA + \frac{kc}{b} = \frac{d}{a} NA,$$

z čehož se dá vypočítat NA:

$$NA = \frac{kac}{bd - ac} = \text{konst.},$$

za předpokladu, že $bd - ac \neq 0$. Úsečka NA má tedy stálou, neproměnnou délku, což znamená, že bod N je pevný. Procházejí jím tudíž všechny přímky rovnoběžné s OC a proložené průsečíkem M. Poněvadž zároveň

$$MN = \frac{d}{a} NA = \text{konst.},$$

plyne odtud, že průsečík M leží na kružnici (N, NM).

Zvolme obráceně na této kružnici bod M' a s přímkou NM' veďme bodem O rovnoběžku, která na kružnicích (O, OD), (O, OC) vytne body D', C'. Přímka $M'D'$ protne přímku OB v bodě A'. Potom

$$\triangle M'NA' \sim \triangle D'OA'$$

a proto

$$M'N : NA' = OD' : OA'.$$

Víme však, že

$$M'N = MN = \frac{d}{a} NA.$$

Tím předešlá rovnice po dosazení nabude tvaru

$$\frac{d}{a} NA : NA' = d : a.$$

Z toho máme

$$NA' = NA$$

čili body A, A' splývají, neboť oba leží na polopřímce NB. Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý. Přímky $M'N$, OC jsou rovnoběžné a body A, A' leží v polorovině OCB, opačné k polorovině OCM. To však znamená, že přímka $M'D'$ prochází bodem A nebo jinak, body M', D', A leží v přímce.

Podobně bychom dokázali, že i body M', C', B leží v přímce. Tím jsme dokázali, že množina všech bodů M je kružnice $\left(N, \frac{kcd}{bd - ac}\right)$ s výjimkou průsečíků s přímkou AB.

Poznámky. Při řešení jsme vyloučili případ

$$bd - ac = 0.$$

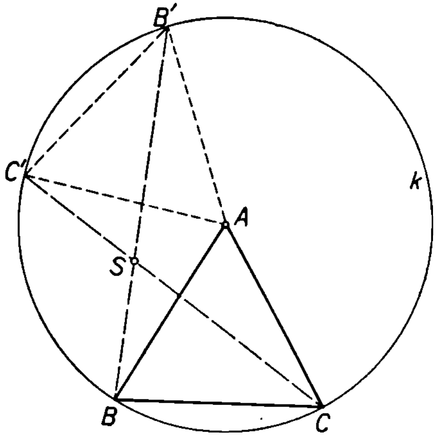
Kdyby totiž tato rovnice platila, plynulo by z ní

$$b : a = c : d.$$

Přímky AD, BC by byly rovnoběžné a bod M by neexistoval. Hledat množinu bodů M by ztratilo smysl.

V kinematické geometrii, kam příklad svou povahou náleží, se čtyřúhelníku $ABCD$ říká kloubový. Strana AB se nazývá rám, strany AD, BC jsou vahadla (nebo kliky), strana CD je ojnice.

6. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC, který je pevný a množina všech rovnostranných trojúhelníků $AB'C'$, které z něho vzniknou otočením kolem vrcholu A. Jaká je množina všech průsečíků přímek BB', CC'?



Obr. 61

Řešení (obr. 61). Z uvažované množiny trojúhelníků si zvolme trojúhelník $AB'C'$, který je různý od trojúhelníka ABC. Trojúhelníky ABC, $AB'C'$ jsou souhlasně shodné. Přímky BB', CC' se proto protnou a jejich průsečík označme S. Body B, C, B', C' leží na kružnici $k \equiv (A, AB)$ a jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníka vepsaného kružnici k. Podle věty o obvodových úhlech platí

$$\sphericalangle CB'B = \sphericalangle CC'B = \tfrac{1}{2} \sphericalangle CAB = 30°,$$
$$\sphericalangle C'BB' = \sphericalangle C'CB' = \tfrac{1}{2} \sphericalangle C'AB' = 30°.$$

Podle toho

$$\sphericalangle BSC' = 180° - \sphericalangle CC'B - \sphericalangle C'BB' = 120°,$$

tj. $\sphericalangle BSC = 60°$. To však znamená, že velikost úhlu BSC nezávisí na velikosti úhlu, o nějž se trojúhelník $AB'C'$ otočil ze základní polohy ABC. Množina bodů S leží tedy na kružnici $BSAC$ opsané trojúhelníku ABC.

Kdyby velikost úhlu, o který se trojúhelník ABC otočí do polohy $AB'C'$, byla právě 60°, pak by $B \equiv C' \equiv S$ a z toho je patrno, že bod B náleží uvažované množině bodů. Podobně při opačném smyslu otočení o 60° bychom ukázali, že i bod C náleží naší množině bodů.

Kdyby posléze bod C' ležel na menším oblouku BC kružnice k, platilo by

$$\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BB'C = 30°$$

a z toho

$$\sphericalangle CSB' = 120°.$$

Vidíme, že i v tomto případě bod S leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Obráceně, na kružnici opsané trojúhelníku ABC mějme libovolný bod S' a uvažujme nejprve případ, že leží na oblouku BAC. Spojme jej s body B, C. Tyto přímky protnou kružnici k ještě v bodech B'', C''. Tu platí

$$B''C'' = BC,$$

neboť $BCB''C''$ je rovnoramenný lichoběžník. Kromě toho

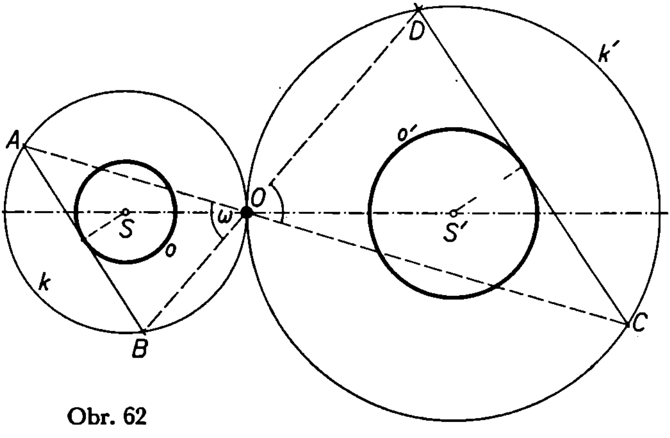
$$\sphericalangle C''S'B'' = \sphericalangle CS'B = 60°$$

a proto kružnice opsaná trojúhelníku $B''C''S'$ prochází i bodem A. Vidíme, že trojúhelník $AB''C''$ je rovnostranný, tj. vznikl otočením trojúhelníka ABC kolem vrcholu A. Stejným způsobem bychom postupovali, kdybychom S' zvolili na menším oblouku Bc.

Můžeme tedy říci: Množina všech průsečíků přímek BB', CC' je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

7. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$, které v bodě O mají vnější dotyk. Bodem O jsou proloženy dvě přímky, které spolu svírají ostrý úhel ω konstantní velikosti. Tyto přímky protnou první kružnici v bodech A, B a druhou kružnici v bodech C, D. Zjistěte, jaké křivky se dotýkají tětiva AB a tětiva CD, jestliže se obě přímky otáčejí kolem bodu O, ale stále přitom svírají týž úhel ω.

Řešení (obr. 62). Úhel ω v první kružnici je obvodový a poněvadž se otáčením jeho velikost nemění, vytínají jeho ramena na kružnici k (na kružnici k') tětivy stejné délky.



Obr. 62

Proto se tyto tětivy dotýkají kružnice o (kružnice o') soustředné s kružnicí k (kružnicí k'). Ale při otáčení se stane, že obvodovým úhlem bude úhel velikosti 180°— ω. Jeho ramena vytínají však na kružnici k (na kružnici k') tětivy téže délky; ty se pak dotýkají kružnice o (kružnice o').

Jestliže máme obráceně tětivu $A'B'$ kružnice k (tětivu $C'D'$ kružnice k'), která se dotýká kružnice o (kružnice o'), musí být

$$A'B' = AB\ (C'D' = CD)$$

a potom buď

$$\sphericalangle A'OB' = \omega \qquad (\sphericalangle C'OD' = \omega),$$

nebo

$$\sphericalangle A'OB' = 180° - \omega \quad (\sphericalangle C'OD' = 180° - \omega).$$

Máme tedy výsledek: Tětivy AB v první kružnici (tětivy CD v druhé kružnici) tvoří množinu všech tečen kružnice o, soustředné s kružnicí k (kružnice o' soustředné s kružnicí k').
K tomu je však zapotřebí připustit i ty dvě polohy úhlu ω, kdy se stane úsekovým.

8. Je dána kružnice k a v ní tětiva AB, která není průměrem. Sestrojme libovolnou kružnici m, která má střed na kružnici k a zároveň se dotýká přímky AB. Pak tečny a, b, sestrojené po řadě z bodů A, B, ke kružnici m (a různé od tečny AB), se protínají v bodě X. Najděte množinu všech bodů X při proměnné kružnici m.

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že střed M kružnice m je vnitřním bodem menšího oblouku AB kružnice k. Z trojúhelníka ABM plyne (obr. 63a)

$$\sphericalangle AMB = \mu = 180° - (\alpha + \beta).$$

Ale úhel μ má konstantní velikost, neboť to je obvodový úhel nad (větším) obloukem AB. Proto i

$$\alpha + \beta = \text{konst.}$$

Z trojúhelníka ABX se dá vypočítat úhel $\xi = \sphericalangle AXB$:

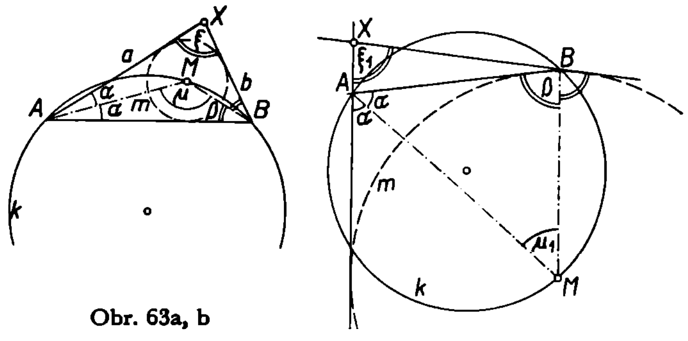
$$\xi = 180° - (2\alpha + 2\beta) = \text{konst.}$$

Tím jsme však dokázali: Jestliže bod M je vnitřním bodem menšího oblouku $\widehat{AB}$, pak velikost úhlu ξ nezávisí na poloze bodu M. Důsledkem toho je, že bod X leží na kruhovém oblouku opsaném nad tětivou AB a poloměru rovném AB : 2sin 2μ.

Ještě vypočteme, jak spolu souvisí úhly μ, ξ. Snadno zjistíme, že

$$\mu = 90° + \frac{\xi}{2}.$$

Obráceně. Na kruhovém oblouku AXB zvolme libovolný bod X' různý od bodů A, B a spojme jej s body A, B. Tím vznikne trojúhelník ABX'. Tomuto trojúhelníku vepišme kružnici m' se středem M'. Ukážeme, že bod M' leží na menším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k.



Obr. 63a, b

Označme

$$\sphericalangle BAX' = 2\alpha', \quad \sphericalangle ABX' = 2\beta', \quad \sphericalangle AX'B = \xi.$$

O těchto úhlech platí

$$2\alpha' + 2\beta' + \xi = 180°.$$

Střed kružnice vepsané trojúhelníku ABX' označme M'. Počítejme:

$$\mu' = \sphericalangle AM'B = 180° - (\alpha' + \beta') = 90° + \frac{\xi}{2} = \mu.$$

To však znamená, že bod M' je bodem menšího oblouku AB kružnice k, jak jsme měli dokázat.

b) Zvolme nyní bod M na větším kruhovém oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k, a to tak, aby pata kolmice spuštěné z bodu M na tětivu AB byla vnitřním bodem této tětivy (obr. 63b). Označme

$$\mu_1 = \sphericalangle AMB = 180° - \mu = \text{konst.}$$

Přitom μ je velikost úhlu v případě a). Označíme-li ještě

$$\sphericalangle MAB = \alpha, \quad \sphericalangle MBA = \beta,$$

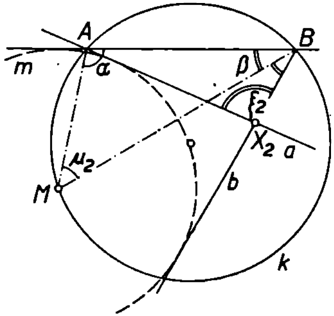
můžeme psát

$$\alpha + \beta = 180° - \mu_1.$$

Tečny, sestrojené z bodů A, B ke kružnici m, se protnou v bodě X_1 a svírají přitom úhel velikosti ξ_1, o němž platí:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sphericalangle AX_1B = 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = \\ &= 2\alpha + 2\beta - 180° = 360° - 2\mu_1 - 180° = \\ &= 180° - 2\mu_1 = 2\mu - 180° = \xi = \text{konst.}\end{aligned}$$

Zde opět ξ je velikost úhlu z případu a). Z výpočtu je patrno, že bod X_1 leží na tomtéž kruhovém oblouku, na němž ležely body X v případě a). Docházíme tak k téže množině bodů jako prve.



Obr. 63c

c) Zvolme ještě bod M na větším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice k, a to tak, aby se kružnice m dotýkala přímky AB na prodloužení, např. za bod B. Tečny ke kružnici m vedené body A, B se protnou v bodě X_2. Označme opět (obr.63c)

$$\sphericalangle MAB = \alpha, \quad \sphericalangle MBA = \beta,$$

$$\sphericalangle AMB = \mu_2 = 180° - \mu, \quad \sphericalangle AX_2B = \xi_2.$$

O těchto úhlech platí

$$\mu_2 = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$\xi_2 = 2(180° - \beta) - 2\alpha = 360° - 2\mu = 180° - \xi.$$

Bod X_2 leží podle toho na kruhovém oblouku, který oblouk z případů a), b) doplňuje — zatím s výjimkou bodů A, B — na kružnici.

Obrácený postup se provádí obdobně jako u dřívějších dvou případů a proto je přenechávám čtenářům.

d) Všimněme si však ještě případu, kdy kružnice m se přímky AB dotýká právě v bodě A (nebo v bodě B). Potom bod B (nebo bod A) můžeme považovat za průsečík tečen vedených z bodů A, B ke kružnici m a proto můžeme body A, B počítat k bodům uvažované množiny.

9. Je dán pravý úhel GOH a jeho vnitřní bod B. Tímto bodem prochází pevná přímka p neobsahující bod O a proměnná přímka h také neobsahující bod O. Přímka p protíná ramena OG, OH po řadě v bodech A, B a přímka h je protíná v bodech K, L. Trojúhelníkům BAK, BCL jsou opsány kružnice, které kromě bodu B mají společný ještě bod X. Zjistěte množinu všech bodů X, otáčí-li se přímka h kolem bodu B.

Řešení. Mějme nejprve případ, kdy bod K leží mezi body O, A a pak nutně bod C leží mezi body O, L (obr. 64). Nejdřív si dokážeme, že středy obou proměnných kružnic, a tím i bod X, leží v polorovině pL. Trojúhelník ABK je vždy tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu K. Střed jeho opsané kružnice leží tedy vně trojúhelníka, ale je to vnitřní bod úhlu AKB. Leží tedy v polorovině opačné k polorovně $pK \equiv pO$, tj. v polorovině pL. Totéž se dá říci o středu kružnice opsané trojúhelníku BCL a to pak znamená, že tím spíš v této polorovině leží bod X.

Všimněme si nyní, že čtyřúhelník $AXBK$ je tětivový a proto

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle OKL.$$

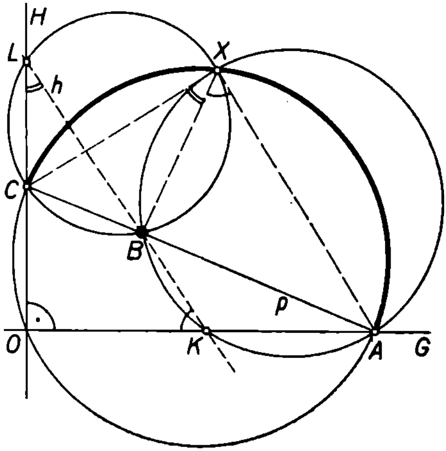
Potom také je

$$\sphericalangle CXB = \sphericalangle CLB.$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$\sphericalangle AXC = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXB = \sphericalangle OKL + \sphericalangle CLB = 90°.$$

Bod X leží tudíž na kružnici opsané trojúhelníku OAC, přesněji řečeno (s ohledem na dřívější) leží na půlkružnici $\widehat{AC}$ této kružnice, která neobsahuje bod O.



Obr. 64

Stejným způsobem dojdeme k témuž výsledku, jestliže bod A leží mezi body O, K a bod L mezi body O, C.

Obráceně. Na této půlkružnici zvolme libovolný bod $X' \not\equiv A$, C a trojúhelníkům ABX', BCX' opišme kružnice. Ty protnou polopřímky OG, OH ještě v bodech K', L'. Nyní platí

$$\sphericalangle OL'B = \sphericalangle BX'C,$$
$$\sphericalangle AK'B = \sphericalangle AX'B.$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$\sphericalangle OL'B + \sphericalangle AK'B = \sphericalangle BX'C + \sphericalangle AX'B = 90°$$

a body K, B, L leží v přímce.

Je nutné si ještě všimnout případu, kdy kružnice opsaná trojúhelníku BCX se dotýká (v bodě C) přímky OH. Znamená to, že body C, L splynou. Potom však nutně i kružnice opsaná trojúhelníku ABX se v bodě A dotýká přímky OG. Obě tyto kružnice se protínají v bodě, který náleží uvažované množině bodů.

Výsledek shrneme do věty: Hledaná množina všech průsečíků X je ta půlkružnice $\widehat{AC}$ z kružnice opsané trojúhelníku ACO, která neleží v polorovině pO. Do množiny nesmíme počítat body A, C.

Cvičení

1. Je dána úsečka $AB = 7$. Sestrojte a) vnitřní bod X této úsečky tak, aby $AX : BX = \sqrt{2}$, b) vnější bod Y tak, aby platilo $AY : BY = \sqrt{3}$, c) oba body přímky AB, pro něž $AZ : BZ = \sqrt{5} : \sqrt{15}$.

2. Kde leží bod M, pro nějž $AM : BM = -1$?

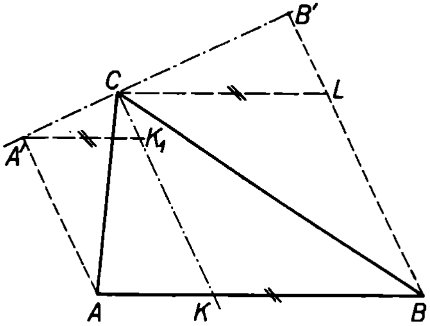
3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$. Jestliže O je jejich střed stejnolehlosti, platí $SO : S'O = r : r'$. Dokažte.

4. Sestrojte trojúhelník, jestliže je dána strana AB, na ní bod $M \neq A$, B osy vnitřního úhlu ACB a výška v_c. — Volte $AB = 7$, $AM = 2{,}2$, $v_c = 3{,}5$.

Návod: Sestrojte nejdřív průsečík N osy vnějšího úhlu s přímkou AB.

5. Větu 13 lze dokázat též na základě přiloženého obr. 65, v němž přímka CK je osa vnitřního úhlu a přímka $A'B'$ je osa vnějšího úhlu.

Návod: Vyjděte z toho, že $\triangle CAA' \sim \triangle CBB'$ a $\triangle CA'K_1 \sim \triangle B'CL$.



Obr. 65

6. Dokažte, že ve cvičení 5 z 3. kapitoly platí $AM^2 + AN^2 = k^2$, kde $k \neq 0$ je konstanta nezávislá na poloze průměru MN.

7. Vypočtěte délky těžnic v pravoúhlém trojúhelníku, v němž $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

8. Ze vzorců pro délky těžnic odvoďte

a) $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$,

b) $16(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4)$.

9. V Stewartově vzorci položte a) $m = c$, $n = ?$, b) $m = 0$, $n = ?$. Co dostanete?

10. Jak se změní Stewartův vzorec, jestliže příčka CM protne stranu AB na prodloužení? Uvažujte oba možné případy.

11. Vypočtěte délky úseček, které na straně AB troj-

úhelníka ABC vytíná osa vnitřního úhlu a pak užitím Stewartovy věty vypočtěte délku osy vnitřního úhlu.

12. Trojúhelník ABM má stranu AB pevnou, nepohyblivou, ale vrchol M se pohybuje po kružnici opsané trojúhelníku ABM.

a) Zjistěte množinu všech středů kružnic, vepsaných trojúhelníkům ABM.

b) Zjistěte množinu všech ortocenter trojúhelníků ABM.

c) Zjistěte množinu všech těžišť trojúhelníků ABM.

13. Úsečka AB konstantní délky $c \neq 0$ se svými krajními body pohybuje po dvou přímkách k sobě kolmých. Jaká je množina všech středů těchto úseček?

14. Je dána kružnice k a na ní pevný bod O, který je vrcholem ostrého úhlu velikosti ω. Tento úhel se otáčí kolem svého vrcholu, ale nemění svou velikost. Co obaluje tětiva, kterou ramena úhlu vytínají na kružnici?

15. Kružnice $k \equiv (S, r)$ se otáčí kolem svého bodu A. Ke každé pootočené kružnici je sestrojena tečna daného pevného směru. Jaká je množina všech bodů dotyku?

16. Trojúhelník ABC má pevnou stranu AB a těžnice AA' má konstantní délku t_a. Zjistěte množinu všech vrcholů C trojúhelníků ABC, které je možné z daných dvou prvků sestrojit.

17. Vnitřním bodem A dané kružnice $k \equiv (O, r)$ je proložena přímka, která kružnici k protne v bodech B, C. Pak jsou sestrojeny dvě kružnice, dotýkající se kružnice k, z nichž první prochází body A, B a druhá body A, C. Tyto dvě kružnice mají kromě bodu A společný ještě bod M. Určete množinu všech bodů M, jestliže sečna BC se mění.

18. Dvě dané kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$ mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A je proložena libovolná přímka, která dané kružnice protne po řadě v bodech K, K'. Najděte množinu průsečíků všech přímek KS, $K'S'$, otáčí-li se přímka kolem bodu A.

19. V dané kružnici je dána pevná tětiva AB jako základna rovnoramenného lichoběžníka vepsaného dané kružnici. Druhá základna mění stále svou polohu. Najděte množinu všech středů ramen lichoběžníků.

20. Příklad 3 ze str. 92 řešte za předpokladu, že kružnice k, k' mají společné dva body nebo že jedna z nich leží uvnitř druhé.