Kružnice

4. kapitola. Příklady řešené jinak, zejména stejnolehlostí

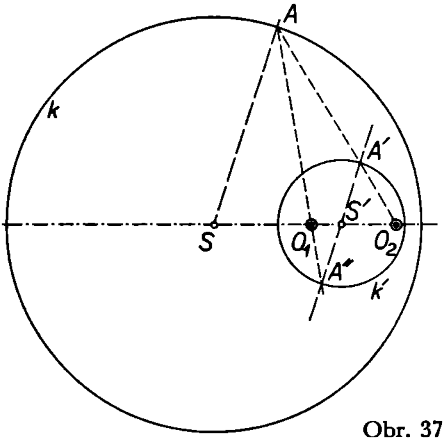
In: Stanislav Horák (author): Kružnice. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 65–84.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403595

4. kapitola

PŘÍKLADY ŘEŠENÉ JINAK, ZEJMÉNA STEJNOLEHLOSTÍ

Víme, že každé dvě kružnice různých poloměrů mají dva středy stejnolehlosti. Jestliže obě kružnice nemají žádný společný bod a jedna leží vně druhé, pak jeden střed stejnolehlosti je průsečík vnějších tečen a druhý je průsečík vnitřních tečen. Rozumí se, že oba leží na středné. Jestliže kružnice mají vnější nebo vnitřní dotyk, je jedním středem stejnolehlosti společný bod. Jestliže kružnice nemají žádný společný bod a jedna leží uvnitř druhé, dostaneme oba středy stejnolehlosti známou kon-



Obr. 37

strukcí, která je provedena v obr. 37. K tomu jen připomeneme, že přímka SA je rovnoběžná s přímkou $A'A''$.

Příklady

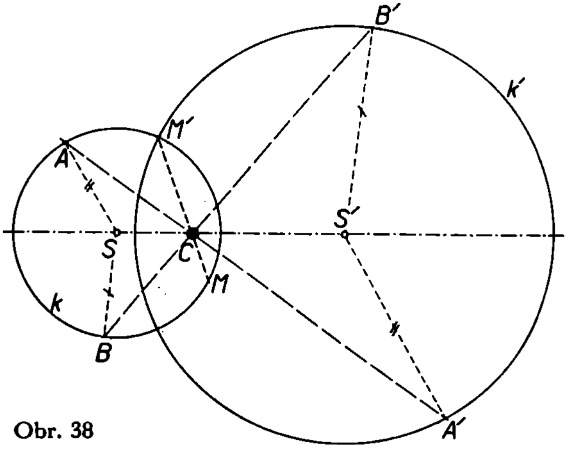
1. K dané kružnici k sestrojte kružnici k' s ní stejnolehlou pro střed stejnolehlosti v bodě C a pro koeficient stejnolehlosti λ.

Řešení (obr. 38). O středu S' hledané kružnice k' platí

$$CS' = |\lambda| . CS, \quad \lambda \neq 0.$$

Je-li $\lambda > 0$, bod S' leží na polopřímce CS; je-li $\lambda < 0$, bod S' leží na opačné polopřímce. Poloměr hledané kružnice je

$$r' = |\lambda| r.$$



Obr. 38

Podle toho kružnici k' snadno sestrojíme. (V obr. 38 je $\lambda = -2$.)

V obr. 38 si všimněme ještě jedné věci. Libovolnému bodu A na kružnici k odpovídá v naší stejnolehlosti bod A' na kružnici k', a to tak, že

$$CA' = |\lambda| . CA$$

a přitom současně $SA \| S'A'$. Obráceně, bodu B' na kružnici k' odpovídá bod B na kružnici k, a to tak, že

$$|\lambda| . CB = CB'$$

a současně platí $SB \| S'B'$. To platí i pro bod M', který je průsečíkem kružnic k, k'. Jemu, jakožto bodu kružnice k', v naší stejnolehlosti odpovídá bod M na kružnici k tak, že

$$CM' = |\lambda| CM.$$

Tato okolnost nás přivádí k řešení následujícího příkladu.

2. Je dána kružnice k a uvnitř ní bod C. Bodem C veďte sečnu tak, aby o jejích průsečících X, X' s danou kružnicí platilo

$$CX' = 2 . CX.$$

Řešení. Daný bod C považujme za střed stejnolehlosti, jejíž koeficient je 2. V této stejnolehlosti sestrojme kružnici k' jako obraz kružnice k. Průsečíky X', Y' kružnic k, k' jsou krajní body žádaných tětiv.

Důkaz správnosti popsané konstrukce provedeme takto. Přímka CX' protne kružnici k v bodě X, který je vzorem bodu X' v uvažované stejnolehlosti. Proto platí

$$2 . CX = CX',$$

jak bylo úlohou požadováno. Totéž platí i o druhé tětivě YY'.

Příklad má dvě různá řešení právě tehdy, když $SC > \frac{1}{3}r$. Jestliže $SC = \frac{1}{3}r$, kružnice k, k' se vzájemně dotýkají a je pouze jedno řešení. Jestliže posléze $SC < \frac{1}{3}r$, řešení neexistuje.

3. Jsou dány dvě kružnice k k', mající vnější dotyk v bodě T. Bodem T je vedena libovolná přímka, která kružnice k, k' protne po řadě v bodech $A \neq T$, $A' \neq T$. Tečna kružnice k v bodě A a tečna kružnice k' v bodě A' jsou navzájem rovnoběžné. Dokažte.

Řešení. Bod T je střed stejnolehlosti obou kružnic. Bod A' je obrazem bodu A v této stejnolehlosti a proto obě zmíněné tečny jsou vzájemně rovnoběžné.

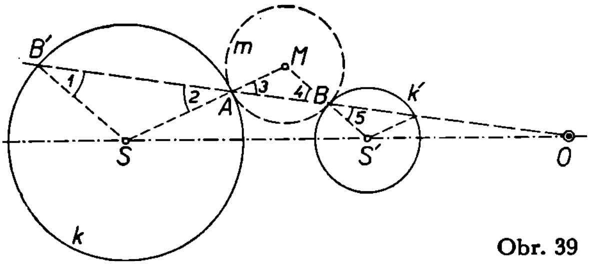
4. Jsou dány dvě kružnice k, k' v takové poloze, že každá z nich leží vně druhé. Sestrojme kružnici m o středu M, která se jich dotýká po řadě v bodech A, B. Jestliže kružnice m má s oběma danými vnější dotyk nebo s oběma vnitřní dotyk, prochází přímka AB pevným bodem O nezávislým na volbě kružnice m. Má-li kružnice m právě s jednou z daných kružnic vnitřní dotyk, prochází přímka AB pevným bodem $O' \neq O$. Dokažte. Jak se toto tvrzení změní, jsou-li kružnice k, k' shodné?

Řešení (obr. 39). Zvolme libovolnou kružnici m, která s oběma danými má vnější dotyk. Přímka AB protne kružnici k ještě v bodě B' a střednou SS' daných kružnic v bodě O. Nyní platí

$$\sphericalangle SB'A = \sphericalangle SAB' = \sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = \sphericalangle OBS'$$

a proto přímky BS', SB' jsou vzájemně rovnoběžné a přímka BB' prochází vnějším středem O stejnolehlosti kružnic k, k'.

Sami si už narýsujte obrázek a dokažte, že v druhém případě bod O' je vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k, k'.



Obr. 39

Jestliže dané kružnice k, k' jsou shodné, potom vnější střed stejnolehlosti O neexistuje a přímka AB je rovnoběžná se střednou SS' nezávisle na zvolené kružnici m, která má s oběma danými kružnicemi buď vnější, nebo vnitřní dotyk. Vnitřní střed stejnolehlosti ovšem existuje a jím prochází každá přímka AB, kterou dříve popsaným způsobem dostaneme z kružnice m, mající právě s jednou z daných kružnic vnitřní dotyk.

5. Nechť dvě kružnice k, k' mají společné právě dva různé body A, B. Bodem A veďme přímku tak, aby v obou kružnicích vytínala shodné tětivy.

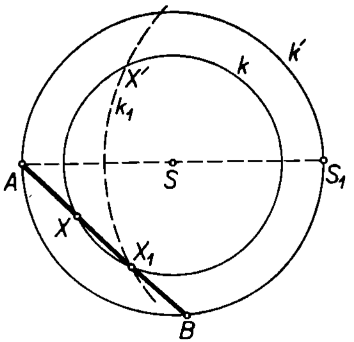
Řešení. Sestrojme kružnici k_1, která je souměrně sdružená s kružnicí k podle středu souměrnosti A. Kružnice k_1 protne kružnici k' v bodě X'. Přímka AX' je hledaná přímka.

Kružnice k_1, k' mají skutečně společné dva různé body A, X'. Kdyby totiž měly společný pouze bod A, kružnice k_1, k' by se vzájemně dotýkaly, ale potom by se dotýkaly i kružnice k, k', což by bylo proti předpokladu.

Popsaná konstrukce je skutečně správná. Bodu X' jako bodu kružnice k' odpovídá v užité středové souměrnosti bod X na kružnici k a na přímce AX'. Proto také $AX = AX'$.

Tak, jak je příklad formulován, existuje právě jedno řešení.

6. Jsou dány dvě soustředné a různé kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S, r')$. Na vnější je zvolen bod A. Tímto bodem se má proložit přímka p tak, aby její tětiva ve větší kružnici byla menší kružnicí rozdělena na tři stejné díly.



Obr. 40

Řešení (obr. 40). Ke kružnici k (je to vnitřní kružnice) sestrojme kružnici k_1 stejnolehlou podle středu A a o koeficientu 2. Kružnice k_1 protne kružnici k v bodě X_1.

Přímka AX_1 vyhovuje naší úloze. Skutečně, bodu X_1 na kružnici k_1 odpovídá ve zmíněné stejnolehlosti bod X na přímce AX_1 a na kružnici k, a to tak, že

$$AX_1 : AX = 2 : 1.$$

Tedy

$$AX = XX_1,$$

a ze souměrnosti obou kružnic platí též

$$AX = XX_1 = BX_1,$$

kde B je druhý průsečík přímky AX_1 s kružnicí k'.

Příklad má dvě různá řešení, pokud $r > \frac{1}{3} r'$. Jestliže $r = \frac{1}{3} r'$, má příklad jediné řešení (je to průměr AS). Jestliže $r < \frac{1}{3} r'$, neexistuje žádné řešení.

7. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$ a mimo ně bod P. Sestrojte tečnu t kružnice k a tečnu t' kružnice k' tak, aby obě tyto tečny byly vzájemně rovnoběžné a aby vzdálenosti bodu P od těchto dvou tečen byly v poměru $m : n$.

Řešení (obr. 41). Body dotyku tečen t, t' s kružnicemi k, k' označme po řadě T, T'. Paty kolmic, spuštěných z bodu P na tečny t, t', označme postupně U, V. Požadavek úlohy je

$$PU : PV = m : n.$$

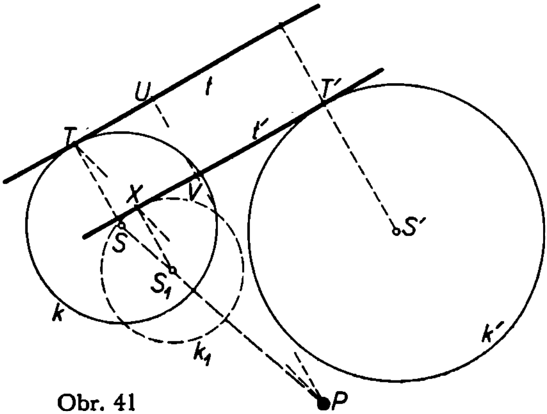
Přímka PT protne tečnu t' v bodě X a platí

$$PU : PV = PT : PX = m : n.$$

Sestrojme nyní pomocnou kružnici k_1, která je stejnolehlá s kružnicí k podle středu stejnolehlosti P a přitom koeficient stejnolehlosti je $m : n$. Kružnice k_1 se v bodě X dotýká přímky t'.

Konstrukce tečen t, t' je podle toho takováto: Sestrojíme kružnici k_1. Společná tečna kružnic k_1, k' je tečna t'. Tečna t v bodě T, který ve stejnolehlosti odpovídá bodu X, je pak s ní rovnoběžná.

Správnost konstrukce vyplývá z předešlého.

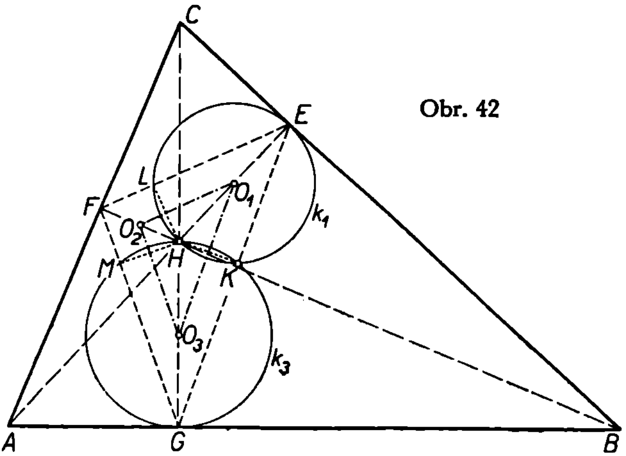


Obr. 41

Počet řešení závisí na počtu společných tečen kružnic k_1, k'. Podle toho může mít příklad nejvýše čtyři různá řešení (pokud ovšem $k_1 \not\equiv k'$), a to tenkrát, když každá z kružnic k_1, k' leží vně druhé. Jestliže tyto dvě kružnice mají vnější dotyk, existují tři různá řešení; jestliže mají společné právě dvě různé tečny, existují dvě různá řešení, a jestliže mají vnitřní dotyk, existuje jediné řešení. Jestliže jedna z kružnic k_1, k' leží uvnitř druhé, neexistuje žádné řešení. Jestliže tečna t' je zároveň tečnou kružnice k', pak tečny t, t' splývají.

To jsme stále předpokládali, že kružnice k_1, k' jsou různé. Kdyby splývaly, pak by existovalo nesčíslně mnoho řešení.

8. Buďtež E, F, G paty výšek daného trojúhelníka ABC, který není pravoúhlý; ortocentrum označme H. Sestrojme kružnici nad průměry EH, FH, GH. Ukažte,



Obr. 42

že tětivy společné první a druhé kružnici, druhé a třetí, první a třetí jsou shodné.

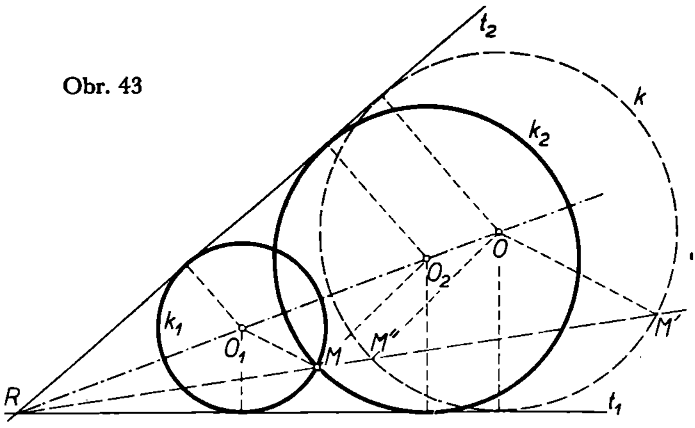
Řešení (obr. 42). Víme, že výšky daného trojúhelníka jsou osami úhlů ortického trojúhelníka EFG. Ortocentrum H má tedy od jeho stran EF, FG, EG shodné vzdálenosti. V obr. 42 jsou narýsovány jen dvě kružni c o průměrech GH (se středem O_3) a EH (se středem O_1). V trojúhelníku EGH je úsečka O_1O_3 střední příčkou a půlí proto vzdálenost vrcholu H od strany EG. Avšak úsečka O_1O_3 je zároveň středná uvažovaných dvou kružnic a proto půlí společnou tětivu kružnic k_1, k_3, tj. tětivu HK, kde K je druhý společný bod kružnic k_1, k_3. Tento bod K, jak plyne z předešlého, leží nutně na straně EG a platí o něm $HK \perp O_1O_3$ a tudíž také $HK \perp EG$. Totéž platí o kružnicích k_1, k_2 a jejich společné tětivě HL (resp. o kružnicích k_2, k_3 a jejich společné tětivě HM). Délky úseček HK, HL, HM jsou podle toho vzdálenosti bodu H od stran po řadě EG, EF, FG, a ty — jak jsme dříve uvedli — jsou shodné.

9. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou různoběžných přímek t_1, t_2 a prochází přitom daným bodem M, který neleží na žádné z daných přímek.

Řešení (obr. 43). Hledaná kružnice k_1 je stejnolehlá s každou kružnicí k, dotýkající se daných dvou tečen. Střed stejnolehlosti je průsečík R přímek t_1, t_2. Danému bodu M přitom odpovídá bod M' na kružnici k.

Konstrukce hledané kružnice je pak tato. Nejdříve sestrojíme pomocnou kružnici k libovolného poloměru,

Obr. 43



která se dotýká přímek t_1, t_2; její střed označíme O. Na ní zjistíme bod M', který ve zmíněné stejnolehlosti odpovídá bodu M. Potom poloměru OM' odpovídá poloměr O_1M hledané kružnice k_1. Poněvadž střed O_1 leží na ose úhlu tečen t_1, t_2, je tím bod O_1 určen a je určena i kružnice k_1. (Rozumí se, že sestrojujeme osu toho úhlu tečen t_1, t_2, v němž leží bod M.)

Kružnice k_1 skutečně splňuje podmínky kladené úlohou. Především je obrazem kružnice k v použité stejnolehlosti a dotýká se proto přímek t_1, t_2. Poněvadž kružnice k prochází bodem M', musí kružnice k_1 procházet bodem M, který je obrazem bodu M' v uvedené stejnolehlosti.

Příklad má při dané formulaci dvě různá řešení, neboť bod M má na kružnici k za svůj vzor buď bod M', nebo M''.

10. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou různoběžných tečen t_1, t_2 a dané kružnice $m \equiv (M, r)$.

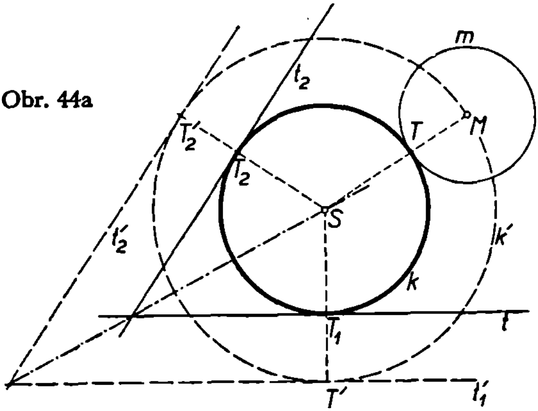
Řešení (obr. 44a, b) neprovedeme celé; spokojíme se s rozborem a s náznakem konstrukce. V obr. 44a má daná kružnice m s výslednou kružnicí k vnější dotyk. Sestrojme pomocnou kružnici k' tak, aby procházela bodem M a byla s kružnicí k soustředná. Kružnice k' se dotýká přímek t_1', t_2' rovnoběžných po řadě s přímkami t_1, t_2 a majících od středu S vzdálenost o r větší než dané přímky.

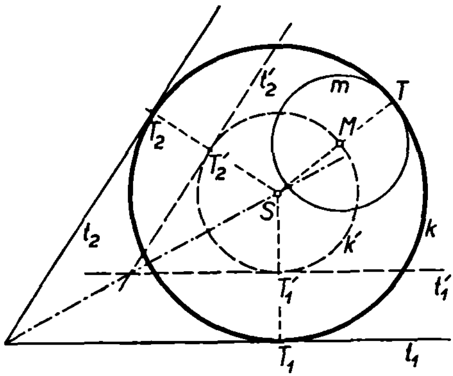
Podle toho stačí sestrojit přímky t'_1, t'_2 a pak kružnici k', která se těchto přímek dotýká a prochází přitom bodem M. Hledaná kružnice je s ní soustředná, ale poloměr má o r menší.

V obr. 44b má hledaná kružnice s danou kružnicí vnitřní dotyk. Pomocná kružnice k', která je s hledanou soustředná a prochází přitom bodem M, dotýká se přímek t_1', t_2', které jsou s přímkami t_1, t_2 rovnoběžné a od bodu S mají vzdálenost o r menší než je vzdálenost přímek t_1, t_2. Další si už čtenář odvodí sám.

Úloha může mít nejvýše čtyři různá řešení.

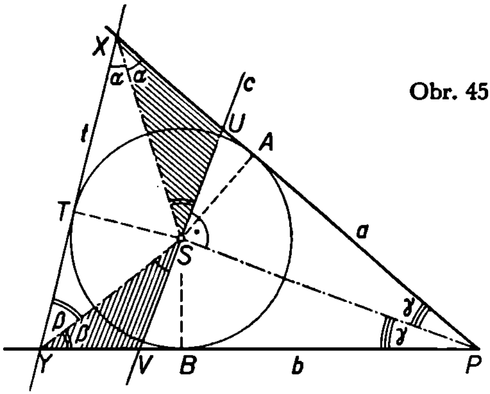
Obr. 44a





Obr. 44b

11. Je dána kružnice k o středu S a její dvě různoběžné tečny a, b, jejichž body dotyku po řadě označíme A, B; průsečík tečen je P. Sestrojme další tečnu t různou od tečen a, b, která protne tečnu a v bodě X a tečnu b v bodě Y. Sestrojme dále přímku c jdoucí středem S kolmo



Obr. 45

k přímce SP. Ta protne tečnu a v bodě U a tečnu b v bodě V. Dokažte, že platí $UX \cdot VY = SU^2$.

Řešení (obr. 45). Je nutné probrat dva případy. První je ten, kdy daná kružnice je uvnitř vepsána trojúhelníku XYP a druhý nastane, jestliže kružnice k je vně vepsána trojúhelníku XYP. Probereme jen případ první a druhý přenechám čtenáři.

V trojúhelníku XYP označme

$$\sphericalangle YXP = 2\alpha, \quad \sphericalangle XYP = 2\beta, \quad \sphericalangle XPY = 2\gamma.$$

O nich tedy platí

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°.$$

V dalším dokážeme, že

$$\triangle SVY \sim \triangle XUS.$$

To provedeme takto:

$$\sphericalangle SYV = \beta, \qquad \sphericalangle SVY = 90° + \gamma.$$

Proto třetí úhel v trojúhelníku SVY má velikost α.

V trojúhelníku XUS mají vnitřní úhly potom tyto velikosti:

$$\sphericalangle SXU = \alpha, \qquad \sphericalangle SUX = 90° + \gamma,$$

a to stačí k důkazu tvrzení, že zmíněné trojúhelníky jsou podobné. Potom však můžeme psát

$$SV : UX = VY : SU,$$

tj.

$$SU . SV = UX . VY,$$

a to jsme měli dokázat.

12. Kružnice k', která prochází středy stran daného trojúhelníka ABC, prochází i patami výšek a středy úseček, omezených ortocentrem a vrcholy A, B, C. Její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané danému trojúhelníku. (Je to tzv. kružnice devíti bodů nebo kružnice Eulerova, nebo též Feuerbachova.)

Důkaz (obr. 46). a) Středy stran daného trojúhelníka označme po řadě A', B', C' a paty výšek označme D (na straně BC), E (na AC), F (na AB). Střed kružnice k opsané trojúhelníku ABC je S. Je okamžitě zřejmé, že trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou stejnolehlé, neboť $AB \| A'B'$, $BC \| B'C'$ a $AC \| A'C'$. Střed této stejnolehlosti je jejich společné těžiště T a poměr stejnolehlosti je —2. Proto poloměr kružnice k', která je opsána trojúhelníku

$A'B'C'$, je roven polovině poloměru kružnice k, která je opsána trojúhelníku ABC.

b) Trojúhelník ACF je pravoúhlý a úsečka FB' je v něm těžnice, jdoucí vrcholem pravého úhlu. Proto

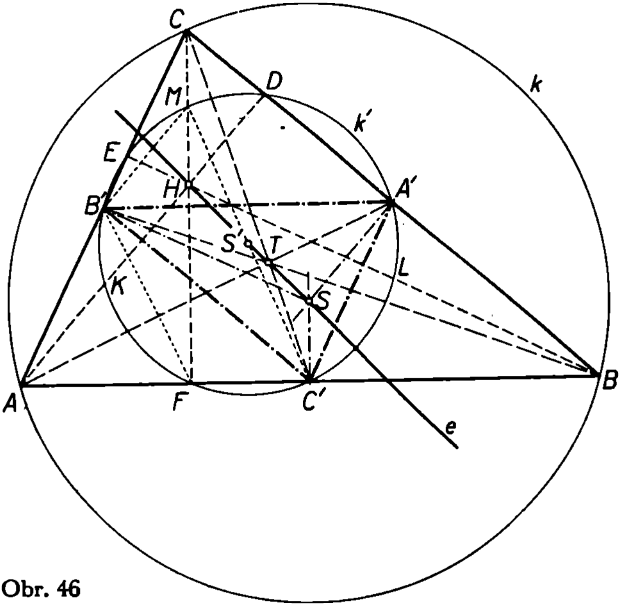
$$\tfrac{1}{2}AC = AB' = CB' = FB'.$$

Také však platí

$$\tfrac{1}{2}AC = A'C'$$

a proto

$$FB' = A'C'.$$



Obr. 46

Lichoběžník $FC'A'B'$ je tudíž rovnoramenný a lze mu tedy opsat kružnici. Ale to je kružnice k', čímž jsme dokázali, že bod F leží na kružnici k'. Podobně se dá ukázat, že i body D, E leží na kružnici k' a tím máme dokázánu další část vysloveného tvrzení.

c) Střed úsečky HC označme M. Úsečka MB' je střední příčka v trojúhelníku ADC a tudíž

$$MB' \parallel AD,$$

z čehož vyplývá, že

$$MB' \perp B'C'.$$

Nad přeponou MC' jsou podle toho sestrojeny dva pravoúhlé trojúhelníky, $MC'B'$, MFC'. Ty mají společnou opsanou kružnici, což je právě kružnice k'. Tím jsme dokázali, že bod M leží na kružnici k'. Podobně se dá dokázat, že i bod K (střed úsečky AH) a bod L (střed úsečky BH) leží na kružnici k', čímž je poslední část našeho tvrzení dokázána.

Důkaz byl proveden pro obecný trojúhelník. Věta však platí i pro trojúhelník pravoúhlý. V rovnoramenném trojúhelníku se kružnice devíti bodů dotýká základny a v trojúhelníku rovnostranném splývá s vepsanou kružnicí.

13. Kružnice k, k' z předešlého příkladu mají střed stejnolehlosti jednak ve společném těžišti T trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, a jednak v ortocentru H daného trojúhelníka.

Důkaz (obr. 46). O bodu T jsme to dokázali v předešlém příkladě. Všimneme si proto jen bodu H. Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě H a poměrem stejnolehlosti $2 : 1$. V ní bodům A, B, C odpovídají po řadě body K, L, M a kružnici k, která prochází body A, B, C, odpovídá kružnice jdoucí body K, L, M; ale to je právě kružnice k'. Tedy kružnice k, k' si v uvažované stejnolehlosti odpovídají, jak jsme měli dokázat.

14. Označme (viz obr. 46) $AH = v_a'$, $HD = v_a''$; $BH = v_b'$, $HE = v_b''$; $CH = v_c'$, $HF = v_c''$. Dokažte, že

$$v_a' . v_a'' = v_b' . v_b'' = v_c' . v_c''.$$

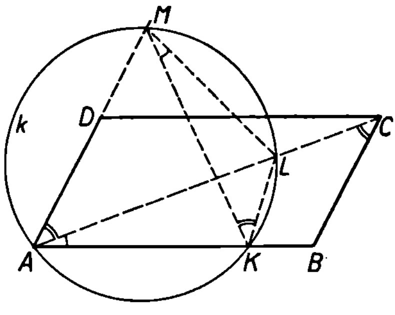
Důkaz. Mocnost bodu H vzhledem ke kružnici k' je

$$M = HK . HD = HL . HE = HM . HF. \qquad (1)$$

Ale

$$HK = \tfrac{1}{2} AH = \tfrac{1}{2} v_a', \quad HD = v_a'' \text{ atd.}$$

Po dosazení do (1) dostaneme daný vztah.



Obr. 47

15. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a kružnice k obsahující jeho vrchol A. Nechť polopřímky AB, AC, AD jsou touto kružnicí proťaty po řadě ještě v bodech K, L, M. Dokažte, že platí

$$AC . AL = AB . AK + AD . AM.$$

Důkaz (obr. 47). Čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový a platí tedy o něm Ptolemaiova věta:

$$AL.MK = AK.LM + AM.KL. \qquad (1)$$

Trojúhelníky ABC, MLK jsou podobné, neboť

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle KAL = \sphericalangle KML,$$
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle MAL = \sphericalangle MKL.$$

O stranách těchto trojúhelníků tudíž platí

$$AB : AC = LM : MK,$$
$$BC : AC = KL : MK.$$

Z těchto rovnic vyjádříme LM, KL a po dosazení do (1) obdržíme žádaný vztah.

16. Jsou dány tři kružnice $k_1 \equiv (O_1, r_1)$, $k_2 \equiv (O_2, r_2)$, $k_3 \equiv (O_3, r_3)$. Nechť každé dvě z nich mají vnější dotyk a nechť kružnice k_1, k_2 (k_1, k_3; k_2, k_3) se dotýkají v bodech T_3 (T_2; T_1). Přímka T_1T_3 (T_2T_3) protíná kružnici k_3 ještě v bodě K (L). Ukažte, že úsečka KL je průměrem kružnice k_3.

Důkaz. Kružnice k_2, k_3 jsou navzájem stejnolehlé podle středu stejnolehlosti T_1. V této stejnolehlosti odpovídá úsečce O_2T_3 úsečka O_3K. Platí tedy $O_3K \| O_1O_2$. Podobně dokážeme, že i $LO_3 \| O_1O_2$ a jsme s důkazem hotovi.

17. Je dán ostrý úhel α o vrcholu V a na jeho ose souměrnosti je dán bod O, nesplývající s vrcholem V. Kolem bodu O opište kružnici tak, aby její poloměr byl menší než OV a aby její průsečíky s oběma rameny určovaly lichoběžník daného obsahu k^2.

Řešení. Hledaná kružnice protne jedno rameno úhlu v bodech A, B a druhé rameno v bodech C, D. Lichoběžník je $ABCD$. Paty kolmic, spuštěných z bodu O na ramena daného úhlu, označme K (na rameni AB) a L (na CD). Úsečka KL je střední příčka lichoběžníka a protíná osu úhlu v bodě M. Výšku lichoběžníka označme v. Potom pro obsah lichoběžníka platí

$$P = KL.v = k^2, \quad \text{tj.} \quad v = k^2 : KL.$$

Ze získaného vzorce můžeme snadno sestrojit výšku v, její polovinu naneseme od bodu M v obou směrech na osu úhlu a takto získanými body procházejí základny lichoběžníka (kolmo k ose).

Je-li N střed kratší základny lichoběžníka, platí

$$ON < OV.$$

Ale

$$ON = \tfrac{1}{2}v + OM = \frac{k^2}{2.KL} + OV.\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

a proto

$$\frac{k^2}{2.KL} + OV.\sin^2\frac{\alpha}{2} < OV.$$

Z toho

$$k^2 < 2.KL.OV.\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

a to je podmínka řešitelnosti.

Cvičení

1. Dvě shodné úsečky AB, CD svírají ostrý úhel α a mají společný vnitřní bod R takový, že trojúhelníky ACR, BDR jsou rovnoramenné. Do těchto trojúhelníků jsou ve-

psány kružnice. Dokažte, že součet délek obou kružnic je nezávislý na délce AR.

2. Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ mají společné právě dva různé body A, B. Přímka AS_1 protne kružnici k_1 v bodě B_1 a přímka AS_2 protne k_2 v bodě B_2. Přímka B_1B_2 prochází bodem B a je rovnoběžná s přímkou S_1S_2. Dokažte.

3. Je dána kružnice k a její dvě různé, vzájemně rovnoběžné tečny a, b, jejichž body dotyku jsou po řadě A, B. Zvolme další tečnu t kružnice k, různoběžnou s tečnami a, b, která tečny a, b protne postupně v bodech K, L. Dokažte, že součin $AK . BL$ je nezávislý na poloze tečny t.

4. Do rovnoramenného trojúhelníka je vepsána kružnice k. Pak je sestrojena kružnice k_1 menšího poloměru, která se dotýká obou ramen daného trojúhelníka a kružnice k. Vypočtěte poloměr kružnice k_1.

5. Do rovnostranného trojúhelníka jsou vepsány tři kružnice takové, že každá z nich se dotýká dvou stran trojúhelníka a druhých dvou kružnic. Vypočtěte poloměr těchto kružnic.

6. Z řešení příkladu 13 je patrno, že střed kružnice opsané danému trojúhelníku, těžiště a ortocentrum tohoto trojúhelníka leží v přímce (Eulerova přímka). Proveďte podrobně. Jaký je poměr $TS : TH$?

7. Zjistěte, zda vztah dokázaný v příkladě 15 platí i tehdy, když kružnice k protne úsečky AB, AC, AD v bodech na prodloužení za bod A.