Kružnice

3. kapitola. Mocnost bodu ke kružnici

In: Stanislav Horák (author): Kružnice. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 45–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403594

Terms of use:

© Stanislav Horák, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

3. kapitola

MOCNOST BODU KE KRUŽNICI

Mocnost bodu ke kružnici je pojem v elementární geometrii velmi důležitý a užitečný.

Věta 7. *Je dána kružnice k a mimo ni bod P. Bodem P proložme libovolnou sečnu, která má s danou kružnicí společné body A, B. Číslo*

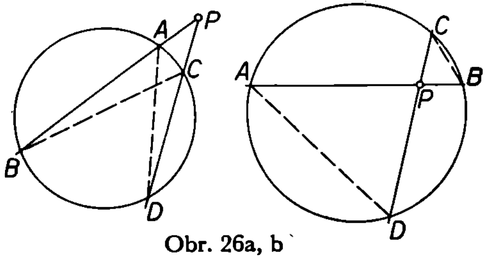
$$M_P = PA.PB$$

je nezávislé na poloze sečny a nazývá se mocnost bodu P ke kružnici k.

Důkaz (obr. 26a, b) provedeme tak, že narýsujeme ještě sečnu $CD \neq AB$ (jdoucí bodem P) a dokážeme, že $PA.PB = PC.PD$.

Za tím účelem spojme ještě body A, D a B, C. Obdržíme tak dva vzájemně podobné trojúhelníky

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB.$$



Obr. 26a, b

Jsou podobné proto, že se shodují ve dvou úhlech:

$$\sphericalangle PDA = \sphericalangle PBC, \qquad \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle CPB.$$

O stranách těchto trojúhelníků proto platí

$$PA : PD = PC : PB$$

a z toho

$$PA . PB = PC . PD.$$

Tím jsme dokázali, že součin $PA . PB$ je skutečně nezávislý na poloze sečny; pro daný bod P je tento součin konstanta. Později uvidíme, že je závislý na vzdálenosti bodu P od středu kružnice a na poloměru kružnice.

Platí však mnohem víc:

Věta 7'. *Mějme dvě různoběžné přímky a, b; jejich průsečík označme P.*

a) *Jestliže dva různé body A, B leží na téže polopřímce přímky a s počátkem P a jestliže body C, D jsou body téže polopřímky přímky b s počátkem P a přitom platí*

$$PA . PB = PC . PD,$$

jsou body A, B, C, D koncyklické (tj. leží na téže kružnici).

b) *Jestliže body A, B jsou body ležící na opačných polopřímkách přímky a s počátkem P a jestliže body C, D leží na opačných polopřímkách přímky b s počátkem P a přitom platí*

$$PA . PB = PC . PD,$$

pak body A, B, C, D jsou koncyklické.

Důkaz. Daný vztah lze psát takto:

$$PA : PC = PD : PB.$$

Připíšeme-li k této rovnici ještě shodnost úhlů

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD,$$

vidíme z toho, že

$$\triangle APC \sim \triangle DPB$$

a tudíž

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP.$$

Opíšeme-li tedy trojúhelníku ACD kružnici, musí na ní ležet i bod B, neboť úhly ACP, DBP jsou obvodové úhly v uvažované kružnici nad týmž obloukem.

Poznámky. 1. Z důkazu je patrno, že větu o mocnosti bodu ke kružnici jsme dokázali užitím věty o obvodových úhlech nad týmž obloukem. Ukazuje se však, že tato věta a věta o obvodových úhlech nad týmž obloukem jsou věty ekvivalentní.

2. Mocnost bodu ke kružnici je číslo. Je opatřeno znaménkem $+$, je-li bod P vně kružnice; je opatřeno znaménkem $-$, leží-li bod P uvnitř kružnice. Bod na kružnici má mocnost rovnou nule. Nejmenší mocnost, kterou bod může mít, je $-r^2$ a náleží středu kružnice.

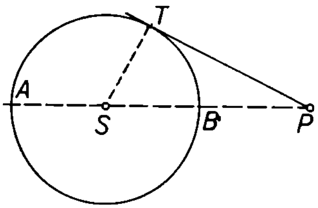
Věta 8. *Mocnost vnějšího bodu je rovna čtverci délky tečny, sestrojené z tohoto bodu ke kružnici.*

Důkaz (obr. 27). Bod P spojme se středem S dané kružnice. Tato přímka protne kružnici v bodech A, B. Mocnost bodu P je:

$$\begin{aligned} M_P &= PA \, . \, PB = (PS + SA)\,(PS - SB) = \\ &= (PS + SA)\,(PS - SA) = PS^2 - SA^2 = \\ &= PS^2 - ST^2 = PT^2, \end{aligned}$$

kde T je bod dotyku tečny sestrojené z bodu P k dané kružnici. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. Tím je také prokázáno, že mocnost bodu ke kružnici skutečně závisí na vzdálenosti bodu P od středu kružnice a na poloměru kružnice.



Obr. 27

Takřka samozřejmá je věta následující, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 9. *Množina všech bodů, které mají k dané kružnici $k \equiv (S; r)$ danou mocnost $M > -r^2$, je kružnice soustředná o poloměru $r'^2 = M + r^2$.*

Příklady

1. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a přímka p. Na přímce p najděte bod, který má vzhledem ke kružnici k danou mocnost $M > -r^2$ (např. $M = 5r^2$).

Řešení (obr. 28). Na kružnici k zvolíme libovolný bod T, v něm sestrojíme tečnu t a na ní určíme bod U, aby jeho mocnost $M_U = M$. To znamená, že $TU = \sqrt{M}$.

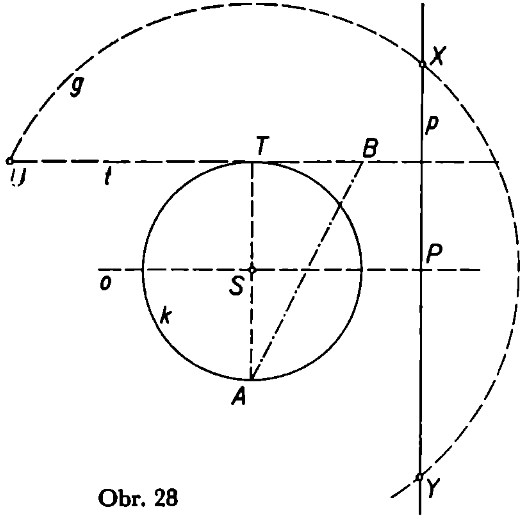
K sestrojení délky TU pro případ $M = 5r^2$ bylo použito Pythagorovy věty. Příslušný pravoúhlý trojúhelník je TAB, v němž odvěsna $TA = 2r$, $TB = r$ a potom přepona je

$$AB^2 = TA^2 + TB^2 = 5r^2 = M.$$

Je patrno, že

$$TU = AB.$$

Kružnice $g \equiv (S;\ SU)$ je množinou všech bodů, které mají vzhledem ke kružnici k tutéž mocnost M $(= 5r^2)$. Body X, Y společné přímce p a kružnici g jsou žádané body.



Obr. 28

Abychom mohli diskusi provést pohodlněji, spusťme ze středu S kolmici na přímku p a její patu označme P. Položme ještě $PS = d$. Pak můžeme říci:

a) Jestliže $d < \sqrt{M}$, úloha má dvě různá řešení;

b) jestliže $d = \sqrt{M}$, úloha má právě jedno řešení;

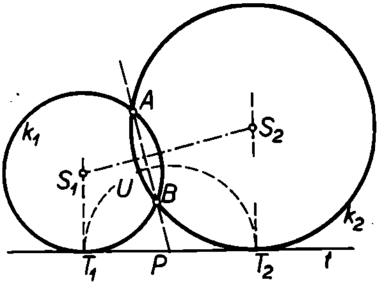
c) jestliže $d > \sqrt{M}$, úloha nemá žádné řešení.[1])

[1]) Kdyby $M = 0$, pak by řešení existovalo právě tehdy, jestliže by přímka p měla s kružnicí k společné body.

2. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t a prochází přitom dvěma různými body A, B.

Řešení (obr. 29). Předpokládejme, že přímka AB protíná tečnu t v bodě P. Mocnost bodu P k hledané kružnici označme M a pak platí

$$M = PA.PB = PT^2, \qquad \text{(a)}$$



Obr. 29

kde T je bod dotyku kružnice k s tečnou t. Z rovnice (a) lze např. užitím Euklidovy věty sestrojit délku úsečky PT. Známe-li bod T, umíme pak sestrojit i kružnici k.

Úloha má řešení jedině tenkrát, když body A, B leží v téže polorovině vyťaté tečnou t. Jestliže to jsou vnitřní

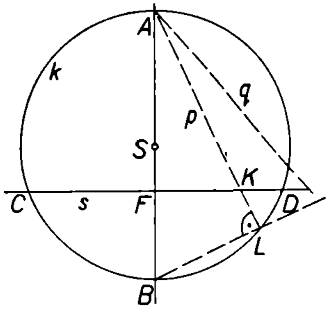
Kdyby $-r^2 < M < 0$ $\left(\text{např.} -\frac{1}{2} r^2\right)$, sestrojili bychom úsečku délky

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

a potom bychom sestrojili v kružnici k tětivu délky $2a$. Kružnice g', která se této tětivy dotýká, je množinou všech bodů, které mají ke kružnici k tutéž mocnost $M \left(= -\frac{1}{2} r^2\right)$. Body X', Y', společné přímce p a kružnici g', jsou žádané body.

body téže poloroviny a jestliže ještě kromě toho jsou různě vzdáleny od tečny t, jsou dvě různé kružnice vyhovující dané úloze. Jestliže to jsou vnitřní body téže poloroviny, ale mají od tečny t shodné vzdálenosti, vyhovuje úloze jediná kružnice. V tomto případě bod P neexistuje a příklad se dá řešit jednodušeji. Jestliže právě jeden z bodů A, B leží na přímce t, má úloha jediné řešení a jestliže oba body leží na přímce t, úloha nemá řešení.

3. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její sečna $s \equiv CD$ kolmá k danému průměru AB. Bodem A veďme libovolnou přímku p, která tětivu CD protne v bodě K a kružnici k v dalším bodě L. Dokažte, že $AK \, . \, AL$ = konst.



Obr. 30

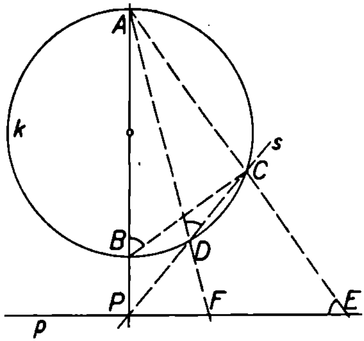
Řešení (obr. 30). a) Průsečík přímek AB, CD označme F. Jestliže přímka p splyne s přímkou AB, pak $K \equiv F$, $L \equiv B$ a podle Euklidovy věty je

$$AK \, . \, AL = AF \, . \, AB = AC^2 = AD^2 = \text{konst.}$$

b) Předpokládejme, že $p \not\equiv AB$ a bod K leží mezi body D, F. Je zřejmé, že čtyřúhelník $BLKF$ je tětivový, neboť dva jeho protější úhly jsou pravé. Lze mu proto opsat kružnici. Mocnost bodu A vzhledem k této kružnici je

$$M_A = AK.AL = AF.AB = AD^2 = \text{konst.}$$

a tím je důkaz vyslovené věty proveden.



Obr. 31

4. Je dána kružnice k a v ní průměr AB. Dále je dána přímka p kolmá k AB a nemající s kružnicí k žádný společný bod. Průsečíkem P přímek p, AB je proložena sečna $s \neq AB$, která kružnici k protíná v bodech $C \neq D$. Přímky AC, AD protnou přímku p v bodech E, F. Dokažte, že platí $PE.PF$ = konst.

Řešení (obr. 31). Předpokládejme, že označení bodů C, D je zvoleno tak, že body A, C jsou sousední a že bod B leží mezi body A, P. Potom

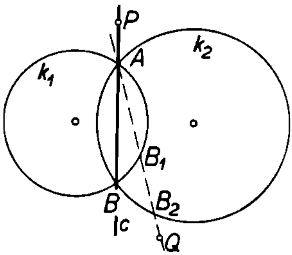
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC,$$
$$\sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle ABC,$$
$$\sphericalangle PEA = 90° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC.$$

Shrneme:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle PEA.$$

Potom však čtyřúhelník $CDFE$ je tětivový. Mocnost M bodu P vzhledem ke kružnici opsané tomuto čtyřúhelníku je

$$M = PE.PF = PD.PC = PB.PA.$$



Obr. 32a

Avšak posledně napsaný součin je nezávislý na poloze sečny s a tudíž je konstantní; tím je vyslovené tvrzení dokázáno.

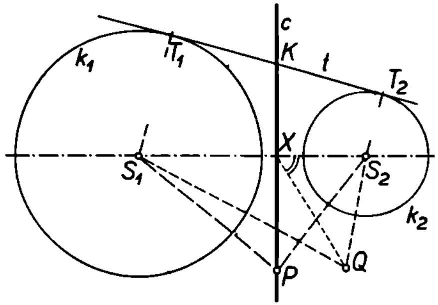
V dalším si všimneme mocností bodů vzhledem k dvěma nesoustředným kružnicím.

Věta 10. *Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím k_1, k_2, je přímka zvaná chordála, kolmá na střednou daných kružnic.*

Důkaz. a) Jestliže dané kružnice mají společné dva různé body A, B (obr. 32a), je chordála přímka AB. Skutečně, mocnosti bodů A, B vzhledem k oběma kružnicím jsou stejné, rovné nule.

$$M_A = M_B = 0.$$

Body A, B náležejí proto hledané množině bodů. Zvolme nyní na přímce AB libovolný bod P, ale tak, aby nesplýval se žádným z bodů A, B. Jeho mocnost k oběma kružnicím k_1, k_2 je táž a je rovna součinu $PA \,.\, PB$. Z toho je vidět, že všechny body přímky AB mají stejnou mocnost k oběma kružnicím.



Obr. 32b

Mějme nyní bod $Q \not\equiv A$ o němž předpokládáme, že má tutéž mocnost k oběma daným kružnicím. Bod Q spojme s bodem A. Další průsečíky této spojnice s kružnicemi k_1, k_2 označme po řadě B_1, B_2. Mocnosti bodu Q vzhledem k uvažovaným kružnicím jsou

$$M_1 = QA \,.\, QB_1, \qquad M_2 = QA \,.\, QB_2.$$

Podle předpokladu však platí

$$QA \,.\, QB_1 = QA \,.\, QB_2,$$

ale to není jinak možné, než že

$$B_1 \equiv B_2 \equiv B,$$

tj. bod Q musí ležet na přímce AB.

b) Jestliže se kružnice vzájemně dotýkají v bodě A, chordála je tečna ve společném bodě. Důkaz se provádí jako v předešlém případě.

c) Jestliže kružnice nemají žádný společný bod a každá leží vně druhé, půlí chordála délku společné tečny t obou kružnic (obr. 31b). Body dotyku tečny t s oběma kružnicemi označme T_1, T_2 a střed úsečky T_1T_2 označme K. Jeho mocnost ke kružnicím k_1, k_2 je po řadě (X je průsečík středné a chordály)

$$M_1 = KT_1^2 = KS_1^2 - r_1^2 = KX^2 + XS_1^2 - r_1^2, \qquad (1)$$

$$M_2 = KT_2^2 = KS_2^2 - r_2^2 = KX^2 + XS_2^2 - r_2^2. \qquad (2)$$

Poněvadž obě mocnosti jsou stejné, plyne z toho

$$XS_1^2 - r_1^2 = XS_2^2 - r_2^2. \qquad (3)$$

Zvolme nyní na přímce c libovolný bod $P \neq X$, který neleží na žádné společné tečně kružnic k_1, k_2. Jeho mocnosti k daným kružnicím jsou

$$M_P = PS_1^2 - r_1^2 = PX^2 + XS_1^2 - r_1^2,$$
$$M'_P = PX^2 + XS_2^2 - r_2^2.$$

S ohledem na rovnici (3) dostaneme

$$M'_P = PX^2 + XS_1^2 - r_1^2 = M_P.$$

Mějme obráceně bod Q, který má tutéž mocnost ke kružnicím k_1, k_2. Tedy

$$M_Q = M'_Q. \qquad (4)$$

Označme $\sphericalangle QXS_1 = \omega$. Potom (používáme kosinové věty)

$$M_Q = QS_1^2 - r_1^2 = QX^2 + XS_1^2 - 2 . QX . XS_1 . \cos\omega - r_1^2,$$
$$M'_Q = QS_2^2 - r_2^2 = QX^2 + XS_2^2 + 2 . QX . XS_2 . \cos\omega - r_2^2.$$

Ale platí rovnice (4) a proto

$$XS_1^2 - 2\,.\,QX\,.\,XS_1\,.\cos\omega - r_1^2 =$$
$$= XS_2^2 + 2\,.\,QX\,.\,XS_2^2\,.\cos\omega - r_2^2.$$

S ohledem na rovnici (3) se právě napsaná rovnice ještě zjednoduší

$$(XS_1 + XS_2)\cos\omega = 0.$$

Avšak

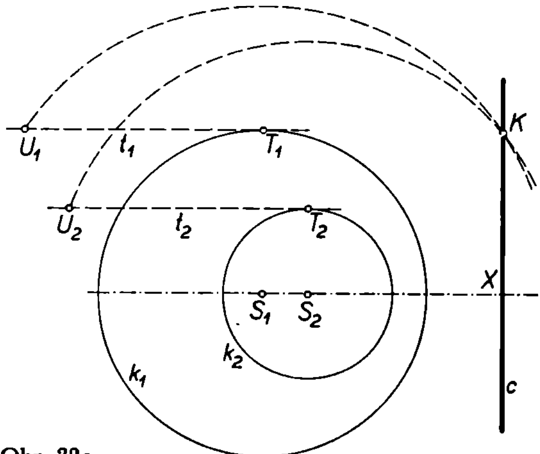
$$XS_1 + XS_2 \neq 0,$$

a proto

$$\cos\omega = 0, \quad \text{tj. } \omega = 90°$$

a bod Q leží na chordále c.

d) Zbývá ještě případ naznačený v obr. 32c, kdy kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod a jedna leží uvnitř druhé. Na základě příkladu 1 sestrojíme bod U_1, který



Obr. 32c

má danou, ale jinak libovolnou mocnost ke kružnici k_1, a bod U_2, který má tutéž mocnost ke kružnici k_2. Kružnice $(S_1; S_1U_1)$, $(S_2; S_2U_2)$ se protnou v bodě K. (Jestliže kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné a jestliže mocnost bodu U_1 je dostatečně velká, pak průsečík K vždy existuje.) Přímka c, jdoucí bodem K kolmo na střednou S_1S_2, je chordála daných dvou kružnic. Důkaz se provede jako v případě c.

Vyloženou teorii zakončíme větou, jejíž důkaz si můžete provést sami. (Viz cvičení 4.)

Věta 11. *Mějme tři kružnice k_1, k_2, k_3, z nichž žádné dvě nejsou soustředné. Chordály kružnic k_1, k_2; k_1, k_3; k_2, k_3 procházejí buď jediným bodem, nebo jsou rovnoběžné. Tento druhý případ nastane právě tehdy, leží-li středy uvažovaných kružnic v přímce.*

Příklady

5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2, které mají společné právě dva různé body M, N. Libovolná kružnice k, která se v bodě M dotýká přímky MN, protne dané kružnice ještě v bodech K, L. Dokažte, že přímka KL prochází středem O tětivy MN.

Důkaz (obr. 33). Bod O spojme s průsečíkem K. Tato spojnice protne kružnici k ještě v bodě L'' a kružnici k_1 ještě v bodě L'. Počítejme nyní mocnost bodu O ke kružnici k a ke kružnici k_1.

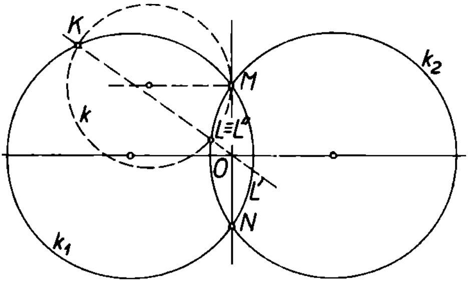
$$M_O = OM^2 = OK.OL'',$$

$$M'_O = -OM^2 = -OK.OL'.$$

Je vidět, že obě mocnosti jsou stejné, až na znaménko, a proto můžeme psát

$$OK . OL' = OK . OL'',$$

tj. $OL' = OL''$. Kružnice k_1, k_2 jsou souměrně sdružené podle středu O a proto bod L'' — který je souměrně sdružený s bodem L' — leží na kružnici k_2 a je to tedy společný bod L kružnic k, k_2, jak jsme měli dokázat.

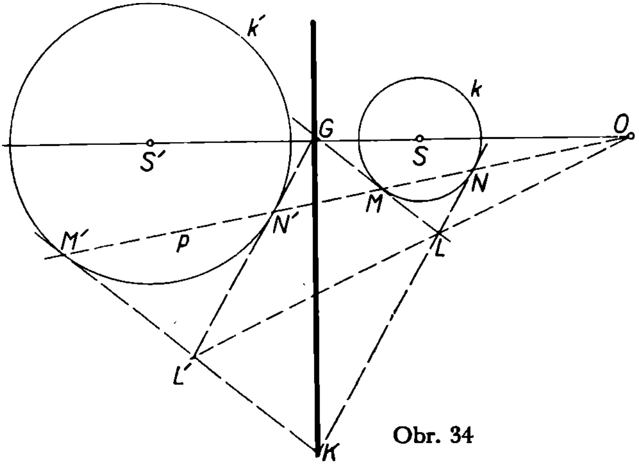


Obr. 33

6. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (S; r)$, $k' \equiv (S'; r')$ různých poloměrů, z nichž každá leží vně druhé. Jejich vnější střed stejnolehlosti je O. Jím je proložena přímka $p \neq SS'$, která dané kružnice protíná v bodech M, N; M', N'. Tečny sestrojené v těchto bodech tvoří rovnoběžník, jehož jedna úhlopříčka prochází bodem O a druhá leží na pevné přímce. Dokažte.

Řešení (obr. 34). Uvažované tečny tvoří čtyřúhelník $KLGL'$. Poněvadž tečny v bodech M, M' jsou rovnoběžné (jsou to přímky, z nichž jedna je obrazem druhé ve zmíněné stejnolehlosti) a tečny v bodech N, N' jsou také rovnoběžné z téhož důvodu, omezují tyto čtyři tečny rovnoběžník. Tím je první část tvrzení dokázána.

V uvažované stejnolehlosti si odpovídají i body L, L' a proto jejich spojnice prochází středem stejnolehlosti O, jak jsme měli dokázat.



Obr. 34

A posléze, trojúhelníky LMN, $KM'N$ jsou také stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě N. Poněvadž platí

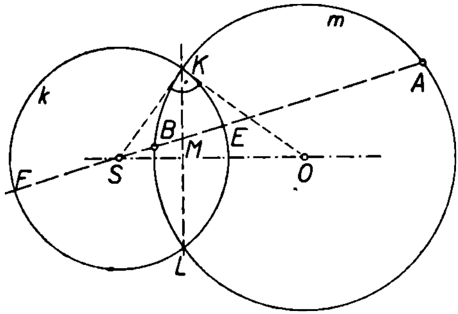
$$LM = LN,$$

musí také platit

$$KN = KM'.$$

To však znamená, že bod K má stejnou mocnost k oběma kružnicím a leží proto na chordále daných dvou kružnic. Ale totéž se dá dokázat i pro bod G a odtud je již patrno, že úhlopříčka KG leží na chordále daných dvou kružnic.

7. Je dána pevná kružnice $k \equiv (S; r)$ a pevný bod A neležící na kružnici k. Bodem A proložme libovolnou kružnici m, která danou kružnici protíná pravoúhle. Tato kružnice prochází dalším pevným bodem $B \neq A$, nezávislým na volbě kružnice m. Dokažte. (Jinak formulováno, máme dokázat, že všechny kružnice m tvoří svazek.)



Obr. 35

Důkaz (obr. 35). Uvažujme nejprve případ, že bod A leží vně kružnice k. Zvolme libovolnou kružnici m uvedené vlastnosti. Ta protne kružnici k v bodech K, L a přímku SA v bodě B. Mocnost M_S bodu S vzhledem ke kružnici m je

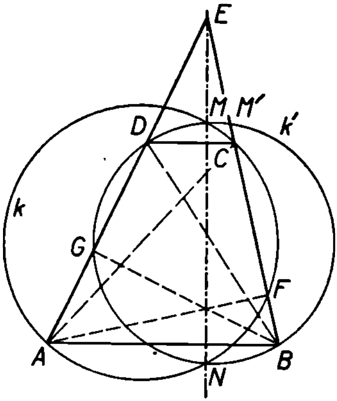
$$M_S = SK^2 = r^2 = SA.SB.$$

Z toho

$$SB = r^2 : SA.$$

Ale napsaný výraz je konstantní, nezávislý na volbě kružnice m, a bod B leží nutně na polopřímce SA (neboť mocnost bodu S je kladná) a proto bod B je neproměnný, pevný, jak jsme měli dokázat.

Kdyby bod A ležel uvnitř kružnice k, vyměnila by se úloha bodů A, B; důkaz by se prováděl stejným způsobem.



Obr. 36

8. Nad úhlopříčkami daného lichoběžníka $ABCD$ jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice. Jejich společná tětiva MN prochází (v prodloužení) průsečíkem různoběžných stran. Dokažte.

Řešení (obr. 36). Označme F průsečík kružnice k, sestrojené nad úhlopříčkou AC, s ramenem BC, a G průsečík kružnice k', sestrojené nad průměrem BD, s ramenem AD. Je patrno, že

$$\sphericalangle AGB = \sphericalangle AFB = 90°,$$

a proto body F, G leží na kružnici opsané nad průměrem AB. (Čtyřúhelník $ABFG$ je tětivový.)

Jeden z průsečíků kružnic k, k' označme N. Přímka EN protne kružnici k v bodě M a kružnici k' v bodě M'. Ukážeme, že $M \equiv M'$, a tím bude důkaz proveden.

Mocnosti bodu E ke kružnicím k, k' po řadě jsou:

$$M_E = EM.EN = EC.EF, \tag{a}$$

$$M'_E = EM'.EN = ED.EG. \tag{b}$$

Mocnost M bodu E vzhledem k pomocné kružnici nad průměrem AB je

$$M = EA.EG = EB.EF. \tag{c}$$

Poněvadž strany AB, CD jsou rovnoběžné, lze psát

$$EC : EB = ED : EA,$$

tj.

$$EA.EC = EB.ED. \tag{d}$$

Z rovnic (c), (d) lze dostat rovnici

$$EG : EC = EF : ED$$

čili

$$EG.ED = EC.EF.$$

Avšak součiny v této rovnici jsou mocnosti M_E, M'_E. Tedy

$$M_E = M'_E$$

a po dosazení

$$EM.EN = EM'.EN \quad \text{čili} \quad EM = EM'.$$

Avšak body M, M' leží na polopřímce EN a tudíž $M \equiv \equiv M'$, jak jsme měli dokázat.

Zde platí i věta obrácená.

9. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Jestliže společná tětiva kružnice k sestrojené nad průměrem AC a kružnice k'

sestrojené nad průměrem BD prochází průsečíkem E stran AD, BC, je daný čtyřúhelník lichoběžníkem.

Důkaz. Mocnost bodu E, který leží na chordále kružnic k, k', je

$$M_E = EM.EN = EC.EF = ED.EG.$$

Z toho máme úměru

$$ED : EC = EF : EG.$$

Z toho usuzujeme, že čtyřúhelník $CDGF$ je tětivový. Ale čtyřúhelník $ABFG$ je také tětivový, neboť

$$\sphericalangle GAB = 180° - \sphericalangle GFB = \sphericalangle GFC = 180° - \sphericalangle GDC,$$

což znamená, že strany AB, CD jsou vzájemně rovnoběžné, jak jsme chtěli dokázat.

Cvičení

1. Co vyplňují všechny body, jejichž mocnost k dané kružnici je stále táž?

2. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$. Sestrojte množinu všech bodů, které mají k této kružnici mocnost r^2; $2r^2$; $-\frac{1}{2}r^2$; $-\frac{1}{4}r^2$.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (S', r')$. Najděte bod, jehož mocnost k první kružnici je r_2^2 a k druhé $2r_1^2$. Proveďte diskusi.

4. Jsou dány tři kružnice, z nichž žádné dvě nejsou soustředné a každá protíná druhé vždy ve dvou různých bodech. Ukažte, že chordály první a druhé kružnice, druhé a třetí, první a třetí procházejí jediným bodem.

Platí věta i tehdy, když všechny tři kružnice mají své středy v přímce?

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A ležící vně této kružnice. Nechť MN je libovolný průměr kružnice k, a to takový, že body A, M, N jsou vrcholy trojúhelníka. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhleníku AMN prochází kromě bodu A ještě dalším pevným bodem, který nezávisí na volbě průměru MN. (Návod: Uvažujte mocnost bodu S ke kružnici opsané trojúhelníku AMN.)

Poznámka. Dá se ukázat, že $AM^2 + AN^2 =$ konst. (Viz partii o těžnici.)

6. Je dána pevná kružnice $k \equiv (S, r)$ a na ní pevný bod A. V něm je ke kružnici sestrojena tečna t a na ní zvolen bod B tak, aby $AB = d \neq 0$. Pak je sestrojena libovolná kružnice $k' \equiv (S', r')$ dotýkající se v bodě B přímky t a protínající kružnici k v různých bodech C, D. Předpokládáme, že útvary k, A, d jsou neproměnné.

a) Dokažte, že přímka CD prochází pevným bodem.
b) Najděte množinu všech středů úseček SS'.
c) Najděte množinu všech průsečíků přímek SS', CD.
d) Zjistěte, jaký je vztah mezi poloměry uvažovaných kružnic a délkou d, jestliže se kružnice protínají kolmo.

7. Je dán trojúhelník ABC. Nad těžnicemi AA', BB' jako nad průměry jsou opsány kružnice. Dokažte, že jejich chordála je výška daného trojúhelníka, jdoucí vrcholem C.

8. V dané kružnici $k \equiv (S, r)$ jsou dány dvě tětivy kolmo se protínající v bodě E, který je vnitřním bodem kružnice. Tím je jedna tětiva rozdělena na dva úseky, jejichž délky jsou a, b a druhá na dva úseky délek c, d. Ukažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2.$$