Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

3. kapitola. Aplikace vzdálenosti bodu a přímky

In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 32–60.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403583

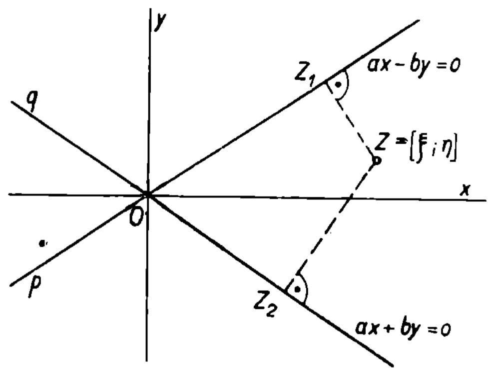
3. kapitola

APLIKACE VZDÁLENOSTI BODU A PŘÍMKY

Budeme vyšetřovat geometrická místa takových bodů, jejichž polohu lze charakterizovat pomocí vzdáleností od daných bodů a přímek.

6. Příklad. Jsou dány dvě různoběžky p, q a číslo $k > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímek p, q stálý součet vzdáleností rovný k.

Řešení. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je zřejmě souměrné podle obou os různoběžek p, q. Zvolíme proto tyto osy



Obr. 10

zároveň za osy soustavy souřadnic (obr. 10). Rovnice přímek p, q napíšeme po řadě ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} ax - by = 0, \\ ax + by = 0, \end{aligned}\right\} \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, potom je (viz obr. 10)

$$ZZ_1 + ZZ_2 = k, \tag{1}$$

kde Z_1, Z_2 jsou paty kolmic vedených z bodu Z na přímky p, q. Vyjádříme-li rovnost (1) pomocí analytické geometrie, dostaneme

$$|a\xi - b\eta| + |a\xi + b\eta| = k. \tag{2}$$

Nyní rozlišíme několik případů.

1. Za předpokladu, že je

$$a\xi - b\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta \geqq 0, \tag{3}$$

(tzn. za předpokladu, že bod $Z = [\xi; \eta]$ leží „pod" nebo na přímce p a zároveň „nad" nebo na přímce q), můžeme na základě definice absolutní hodnoty přepsat rovnici (2) ve tvaru

$$(a\xi - b\eta) + (a\xi - b\eta) = k$$

neboli

$$\xi = \frac{k}{2a}. \tag{4}$$

To znamená, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$, patřící geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ a vyhovující podmínkám (3), leží na přímce o rovnici (4); přesněji řečeno na úsečce u_1, kterou na této přímce vytínají různoběžky p, q. (Souřadnice η všech bodů této úsečky bychom mohli zjistit z nerovností (3) po dosazení za ξ z rovnice (4).)

2. Za předpokladu, že je

$$a\xi - b\eta \leqq 0, \quad a\xi + b\eta \geqq 0, \tag{5}$$

(tzn. za předpokladu, že bod $Z = [\xi; \eta]$ leží zároveň „nad“ nebo na přímce p i q), můžeme rovnici (2) přepsat ve tvaru

$$(-a\xi + b\eta) + (a\xi + b\eta) = k$$

neboli

$$\eta = \frac{k}{2b}. \tag{6}$$

Proto každý bod $Z = [\xi; \eta]$, patřící množině $\boldsymbol{M}$, musí za uvedených předpokladů ležet na přímce o rovnici (6); lépe řečeno na úsečce u_2, kterou na ní vytínají různoběžky p, q.

Všimněte si, že úsečky u_1 a u_2 mají na přímce p společný krajní bod. K tomuto výsledku můžeme dojít i bez výpočtu; z jednoduché syntetické úvahy totiž ihned plyne, že na každé z přímek p, q leží pouze dva body geometrického místa $\boldsymbol{M}$, které jsou souměrně sdružené podle průsečíku O různoběžek p, q.

Protože celé geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle průsečíku O přímek a, b, nemusíme zřejmě zbývající dva případy

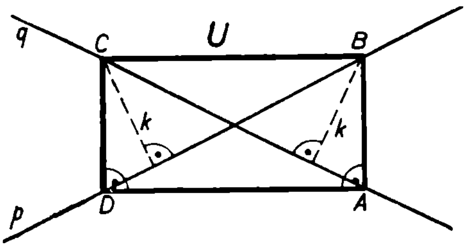
$$a\xi - b\eta \leqq 0, \quad a\xi + b\eta \leqq 0, \tag{7}$$

$$a\xi - b\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta \leqq 0 \tag{8}$$

ani početně vyšetřovat.

Z našich dosavadních úvah tedy vyplývá, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí obvodu $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$ s vrcholy na přímkách p, q. Body A, B, C, D dostaneme v souhlase se zadáním geometrického místa $\boldsymbol{M}$ tak, že na přímce p, resp. q najdeme body, které mají od přímky q, resp. p vzdálenost k (obr. 11).

Nyní vyšetříme obráceně, zda je obvod $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$ částí geometrického místa $\boldsymbol{M}$. Vzhledem k souměrnosti obdélníku $ABCD$ i množiny $\boldsymbol{M}$ podle středu O můžeme se omezit např. pouze na strany AB, BC



Obr. 11

(obr. 11). Stačí tedy dokázat, že $AB \subset \boldsymbol{M}$ a také $BC \subset \boldsymbol{M}$.

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří úsečce AB, pak jeho souřadnice vyhovují rovnici (4) a nerovnostem (3). Ale rovnici (4) můžeme přepsat ve tvaru

$$(a\xi - b\eta) + (a\xi + b\eta) = k$$

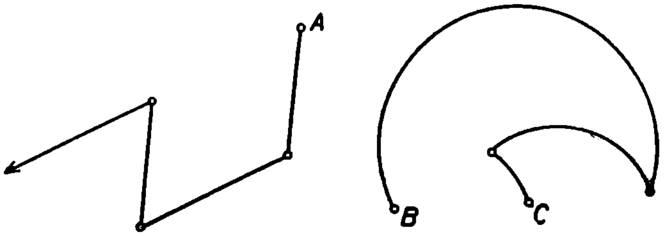
a vzhledem k nerovnostem (3) ve tvaru (2). Rovnost (2) je však jen jiný tvar rovnosti (1). Patří tedy uvažovaný bod Z též geometrickému místu $\boldsymbol{M}$ a proto je $AB \subset \boldsymbol{M}$.

Úplně stejně se dokáže $BC \subset \boldsymbol{M}$. Tím je důkaz hotov.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je obvod $\boldsymbol{U}$ obdélníku $ABCD$, jehož každý vrchol leží na jedné z různoběžek p, q a má od zbývající vzdálenost k.

Při řešení tohoto příkladu se nám vyplatila kombinace početní metody s jednoduchými syntetickými úvahami. Tím se totiž řešení znatelně zkrátilo.

Dále si řekněme ještě jednu praktickou radu. Při podrobnějším vyšetřování rovnic typu (2) se poměrně snadno udělá chyba ve znaménku. Dobrou kontrolu vý-



Obr. 12ab

počtů umožňuje někdy věta, kterou lze poměrně jednoduše dokázat.

Útvar **U**, *daný rovnicí s absolutními hodnotami mnohočlenů, je ve všech svých bodech „spojitou" čarou. Je to tedy útvar složený z jedné nebo několika „lomených čar nebo křivek", které nemají žádné krajní body.*

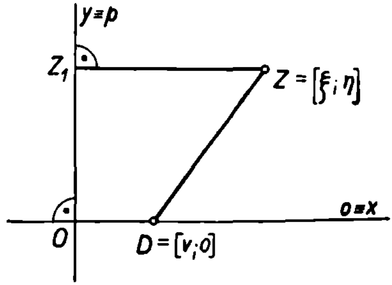
Nemůže to tedy být např. žádný z útvarů na obr. 12ab. První z nich má totiž jeden krajní bod (A), druhý má dva krajní body (B, C).

7. Příklad. Je dána přímka p a mimo ni ve vzdálenosti v ($v > 0$) bod D. Vyšetříme geometrické místo **M** bodů Z, které mají od přímky p a od bodu D součet vzdáleností nejvýše rovný k ($k > v$).

Řešení. Okamžitě je vidět, že geometrické místo **M**

je souměrné podle kolmice o k přímce p, procházející bodem D. Zvolíme proto přímku o za osu x a přímku p za osu y (obr. 13).

Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu M, pak platí



Obr. 13

$$ZZ_1 + ZD \leqq k, \qquad (9)$$

kde Z_1 je pata kolmice z bodu Z na přímku p. Nerovnost (9) přepíšeme užitím prostředků analytické geometrie ve tvaru

$$|\,\xi\,| + \sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k, \qquad (10)$$

resp. ve tvaru

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k - \xi, \text{ pro } \xi \geqq 0, \qquad (11a)$$

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq k + \xi, \text{ pro } \xi \leqq 0. \qquad (11b)$$

Nejdříve vyšetříme nerovnost (11a). Obě strany umocníme na druhou a po další úpravě dostaneme

$$\eta^2 \leqq 2\xi(v - k) - (v - k)(v + k). \qquad (12)$$

Nerovnost (12) připomíná početní vyjádření jistého rovinného útvaru omezeného parabolou, jejíž osa je rovnoběžná s osou x. Nerovnost (12) proto upravíme na tvar

$$\eta^2 \leqq 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]. \qquad (13)$$

Protože je podle předpokladu $v < k$, je $v - k < 0$. Je tedy nerovnost (13) početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}_1$, skládajícího se z paraboly $\boldsymbol{P}_1$ o rovnici

$$\eta^2 = 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]$$

a jejího vnitřku. Přitom vrchol paraboly $\boldsymbol{P}_1$ je bod $V_1 = \left[\frac{1}{2}(v + k);\ 0\right]$. Její ohnisko splývá s bodem $D = [v; 0]$, neboť

$$\frac{1}{2}(v + k) + \frac{1}{2}(v - k) = v.$$ [1]

Řídicí přímka d_1 má od přímky p vzdálenost k, neboť

$$\frac{1}{2}(v + k) - \frac{1}{2}(v - k) = k.$$ [1]

Zjistili jsme tedy, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$), patřící geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, náleží útvaru $\boldsymbol{U}_1$ (dokonce pouze té části útvaru $\boldsymbol{U}_1$, která leží v polorovině pD).

Úplně stejně můžeme vyšetřit nerovnost (11b). Zjistíme, že je početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}_2$, složeného z paraboly $\boldsymbol{P}_2$ o rovnici

$$\eta^2 = 2(v + k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v - k)\right]$$

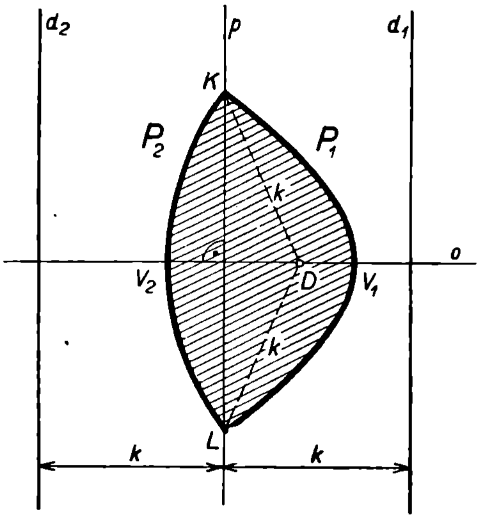
a jejího vnitřku. Parabola $\boldsymbol{P}_2$ má ohnisko opět v bodě D a její řídicí přímka d_2 má také od přímky p vzdálenost k. Proto každý bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \leqq 0$) patřící geo-

---

[1]) Viz např. [7], str. 88.

metrickému místu $\boldsymbol{M}$, náleží útvaru $\boldsymbol{U}_2$ (dokonce pouze té části útvaru $\boldsymbol{U}_2$, která patří k polorovině opačné k polorovině pD).

Obě paraboly $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ protínají přímku p v týchž bo-



Obr. 14

dech, které mají od bodu D vzdálenost rovnou k. Můžeme proto říci, že geometrický útvar $\boldsymbol{M}$ je částí útvaru $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$ (na obr. 14 je útvar $\boldsymbol{U}$ vyšrafován).

Zbývá dokázat, že je též $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Zde ukážeme pouze, že část $\boldsymbol{U}_1$, patřící polorovině pD, je součástí množiny $\boldsymbol{M}$. Důkaz obdobného tvrzení pro útvar $\boldsymbol{U}_2$ přenecháme čtenáři. Jestliže bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$) patří útvaru

$\boldsymbol{U}_1$, pak jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (13). Tu můžeme upravit na tvar

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} \leqq |k - \xi|. \tag{14}$$

Z definice útvaru $\boldsymbol{U}_1$ však ihned plyne, že $k > \xi$ neboli $k - \xi > 0$. Můžeme proto nerovnost (14) přepsat ve tvaru (11a), resp. (10). Tzn., že bod Z patří množině $\boldsymbol{M}$.

Výsledek. Označme $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ útvary skládající se z parabol (a jejich vnitřků), které mají společné ohnisko D, a jejichž řídicí přímky jsou rovnoběžky s přímkou p, vedené ve vzdálenosti k. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je pak útvar $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_2$.

Při řešení našeho příkladu jsme vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ dokazovali obrácením postupu, kterým jsme ověřili vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$, tj. ověřením podmínky [B].

V jistém smyslu bude poučné, jestliže důkaz vztahu $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ provedeme ještě jednou ověřením obměněné podmínky [B′]. Omezíme se však opět pouze na případ, že $\xi \geqq 0$. Případ $\xi \leqq 0$ přenecháme opět čtenáři.

Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ (kde $\xi \geqq 0$) nepatří množině $\boldsymbol{M}$. Potom postupně dostaneme:

$$ZZ_1 + ZD > k, \tag{9′}$$

$$|\xi| + \sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} > k, \tag{10′}$$

$$\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2} > k - \xi. \tag{11a′}$$

Nyní však musíme rozlišit dva případy.

a) Pravá strana nerovnosti (11a′) je záporná, tzn.

$$k < \xi. \tag{15}$$

Avšak žádný bod $Z = [\xi; \eta]$ vyhovující nerovnosti (15) nemůže náležet útvaru $\boldsymbol{U}_1$ (viz obr. 14) a tedy ani útvaru $\boldsymbol{U}$.

b) Pravá strana nerovnosti (11a') je nezáporná. Pak můžeme obě strany umocnit na druhou a dostaneme

$$(\xi - v)^2 + \eta^2 > (k - \xi)^2$$

a po dalších úpravách

$$\eta^2 > 2(v - k)\left[\xi - \frac{1}{2}(v + k)\right]. \qquad (13')$$

Tedy ani v tomto případě nepatří bod Z útvaru $\boldsymbol{U}_1$ a tudíž ani útvaru $\boldsymbol{U}$.

Připomeňme, že při tomto postupu nesmíme vynechat případ a). Opomenutí tohoto případu by mohlo v obdobných situacích vést k hrubé chybě. Můžeme se o tom přesvědčit na jednoduchém příkladu. Snadno totiž zjistíme, že z nerovnosti

$$\sqrt{\xi + \eta} > -2 \qquad (16)$$

neplyne nerovnost

$$\xi + \eta > 4,$$

která vznikne z (16), jestliže umocníme obě strany na druhou. Stačí zvolit např. $\xi = \eta = 1$.

K uvedenému řešení příkladu 7 připojíme ještě jednu poznámku. V okamžiku, kdy jsme zjistili tvar geometrického místa $\boldsymbol{M}$, tj. v okamžiku, kdy jsme dokázali vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$, mohli jsme již docela pohodlně řešení dokončit syntetickou metodou. (Pokuste se o to sami!) Početní metoda měla proto v tomto případě cenu hlavně „objevitelskou".

8. Příklad. Je dána přímka p a mimo ni ve vzdálenosti v ($v > 0$) bod D. Kromě toho je dáno číslo $k > 1$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: Poměr vzdáleností bodu Z od přímky p a od bodu D je stálý a rovná se k.

Řešení. Geometrické místo M je souměrné podle přímky o jdoucí bodem D kolmo k přímce p. Soustavu souřadnic zvolíme jako na obr. 13.

Označíme Z_1 patu kolmice z bodu $Z = [\xi; \eta]$ na přímku p. Jestliže bod Z patří množině M, pak je

$$\frac{ZZ_1}{ZD} = k. \tag{17}$$

Pomocí souřadnic přepíšeme rovnost (17) ve tvaru

$$\frac{|\xi|}{\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2}} = k,$$

resp.

$$|\xi| = k\sqrt{(\xi - v)^2 + \eta^2}. \tag{18}$$

Umocníme obě strany rovnice (18) na druhou a upravíme na tvar

$$\xi^2(k^2 - 1) - 2k^2v\xi + k^2v^2 + k^2\eta^2 = 0. \tag{19}$$

Dostali jsme rovnici, která je vzhledem k oběma souřadnicím ξ, η kvadratická. Rovnice (19) je proto pravděpodobně početním vyjádřením nějaké středové kuželosečky; upravíme ji proto na některý tvar uvedený v [8] nebo [9]. (Viz str. 88—90.) Postupně dostaneme

$$(k^2 - 1)\left(\xi - \frac{k^2v}{k^2 - 1}\right)^2 + k^2\eta^2 = \frac{k^2v^2}{k^2 - 1},$$

$$\frac{\left(\xi - \dfrac{k^2v}{k^2 - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{kv}{k^2 - 1}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\dfrac{v^2}{k^2 - 1}} = 1. \tag{20}$$

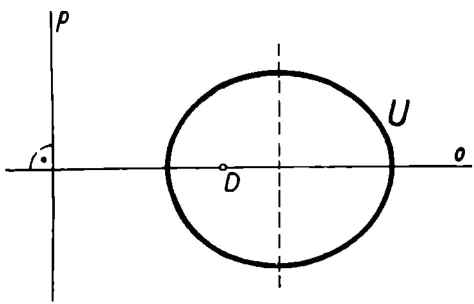
Protože $k > 1$, je $\frac{v^2}{k^2 - 1} > 0$. Proto je rovnice (20) početním vyjádřením elipsy $\boldsymbol{U}$ se středem $S = [k^2v(k^2 - 1)^{-1}; 0]$ a s délkami poloos

$$a = \frac{kv}{k^2 - 1}, \quad b = \frac{v}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Protože souřadnice každého bodu $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovují rovnici (20), je tím dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní obráceně předpokládejme, že bod $Z = [\xi; \eta]$ vyhovuje rovnici (20). Potom obráceným postupem dojdeme od rovnice (20) až k rovnici (18). Geometrický význam rovnice (18) je vyjádřen vztahem (17). To tedy znamená, že bod Z patří množině $\boldsymbol{M}$, neboli $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Zbývá popsat elipsu $\boldsymbol{U}$ nezávisle na zvolené soustavě souřadnic. Přitom chceme, aby popis byl co nejjednodušší. V takovém případě bývá výhodné zobrazit si pro určité k elipsu $\boldsymbol{U}$ a výsledek nejdříve uhodnout a pak teprve dokázat. Na obrázku 15 je znázorněna elipsa $\boldsymbol{U}$ pro $k = 2$. Jistě se vám bude zdát nápadná poloha



Obr. 15

bodu D. Není těžké přijít na to, že bod D je ohniskem elipsy $\boldsymbol{U}$. Tento odhad skutečně ověříme výpočtem. Excentricita elipsy $\boldsymbol{U}$ je

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{k^2v^2}{(k^2-1)^2} - \frac{v^2}{k^2-1}} = \frac{v}{k^2-1}$$

a ohniska mají první souřadnici

$$\xi_{1,2} = \frac{k^2v}{k^2-1} \pm \frac{v}{k^2-1} = \begin{cases} v\dfrac{k^2+1}{k^2-1}, \\ v\,. \end{cases}$$

Je tedy bod D to ohnisko elipsy $\boldsymbol{U}$, které je blíže přímce p.

Hlavní vrcholy mají první souřadnice

$$\xi_{3,4} = \frac{k^2v}{k^2-1} \pm \frac{kv}{k^2-1} = \frac{kv}{k \mp 1}\,.$$

Zřejmě jsou obě souřadnice ξ_3, ξ_4 kladné ($k > 1$), proto leží hlavní vrcholy v polorovině pD.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je elipsa $\boldsymbol{U}$ s ohniskem D, hlavní osou kolmou k přímce p. Hlavní vrcholy leží v polorovině pD a mají od přímky p vzdálenosti $kv(k-1)^{-1}$ a $kv(k+1)^{-1}$.

Při řešení příkladu 8 jsme dostali kvadratickou rovnici (19) pro souřadnice ξ, η. Všimněte si, že jsme se o geometrickém útvaru, jehož početním vyjádřením je rovnice (19), vyjádřili velmi opatrně. Nemusí být totiž každá kvadratická rovnice pro ξ, η početním vyjádřením kuželosečky, přesněji řečeno „nedegenerované“ kuželosečky. Uvedeme si příklady:

1. Rovnice

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4 = 0$$

je početním vyjádřením jediného bodu $S = [1;\ 0]$, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 + y^2 = 0.$$

2. Rovnice

$$4x^2 - 8x - y^2 + 4 = 0$$

je početním vyjádřením dvou různoběžek, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 - y^2 = 0\,,$$

resp. s rovnicí

$$(2x - y - 2)(2x + y - 2) = 0\,.$$

3. Rovnice

$$4x^2 - 8x + y^2 + 3 = 0$$

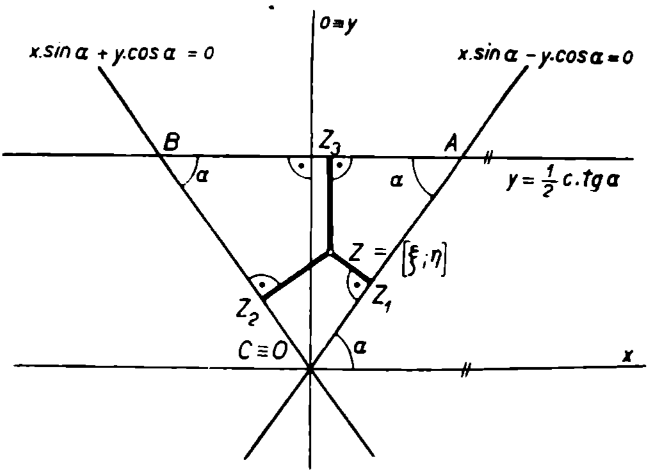
je početním vyjádřením množiny prázdné, neboť je ekvivalentní s rovnicí

$$4(x - 1)^2 + y^2 = -1\,.$$

Z uvedených příkladů je tedy vidět, že nestačí prohlédnout si, jak se to bohužel dost často stává, pouze koeficienty u kvadratických členů. Kromě toho je vidět, že početní vyjádření množiny bodů nemusí být jediné.

9. Příklad. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou $AB = c$ a úhlem α při základně. Vzdálenost libovolného bodu Z hledané množiny M od přímky AB je geometrickým průměrem jeho vzdáleností od přímek AC, BC. Vyšetříme toto geometrické místo M.

Řešení. Geometrické místo **M** je zřejmě souměrné podle osy o základny AB trojúhelníka ABC; zvolíme ji proto za jednu ze souřadnicových os. Trojúhelník ABC



Obr. 16

umístíme podle obr. 16. Směrový úhel přímky AC je α (neboť $AB \parallel x$); přímka AC má proto rovnici

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0 \tag{21}$$

a přímka BC, která je souměrně sdružená s přímkou AC podle osy y, má rovnici

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0 \,. \tag{22}$$

Položíme-li

$$\sin \alpha = a \,, \quad \cos \alpha = b \,,$$

můžeme rovnice (21) a (22) napsat ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= 0, \\ ax + by &= 0, \end{aligned}\right\} a^2 + b^2 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0\,. \tag{23}$$

Rovnice přímky AB je

$$y = \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \alpha\,,$$

resp.

$$y = v\,, \tag{24}$$

kde $v = \dfrac{1}{2} c \operatorname{tg} \alpha$ je výška trojúhelníka ABC na základnu AB.

Jestliže nyní bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$, potom je (viz obr. 16)

$$ZZ_3 = \sqrt{ZZ_1 \cdot ZZ_2}\,, \tag{25}$$

kde Z_1, Z_2, Z_3 jsou paty kolmic vedených z bodu Z na přímky AC, BC, AB. Tuto podmínku vyjádříme početně:

$$|\, v - \eta \,| = \sqrt{|\, a\xi - b\eta \,| \cdot |\, a\xi + b\eta \,|}\,. \tag{26}$$

Odtud vypočítáme, že

$$(v - \eta)^2 = |\, a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \,|\,. \tag{27}$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Nechť je $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \leqq 0$, neboli $a|\xi| \leqq b|\eta|$. Tato podmínka znamená, že bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří buď úhlu ACB, nebo úhlu k němu vrcholovému. Potom rovnice (27) má tvar

$$(v - \eta)^2 = -a^2\xi^2 + b^2\eta^2. \tag{28}$$

Rovnici (28) upravíme s použitím rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ na tvar

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{v}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{vb}{a^2}\right)^2. \tag{29}$$

Rovnici (29) přepíšeme ještě jednou s použitím daných prvků c, α:

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{c}{\sin 2\alpha}\right) = \left(\frac{c}{\sin 2\alpha}\right)^2. \tag{30}$$

V případě a) leží tedy body Z na kružnici $\boldsymbol{U}_1$ se středem $S = \left[0; \frac{c}{\sin 2\alpha}\right]$ a poloměrem $\frac{c}{2 \sin \alpha}$. Protože ze zadání úlohy je ihned patrné, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ musí obsahovat body A, B, snadno na základě dosavadních výsledků usoudíme, že množinu $\boldsymbol{U}_1$ lze sestrojit jako kružnici dotýkající se přímek AC, BC v bodech A, B (obr. 17). Stačí např. ukázat, že trojúhelník BCS má při vrcholu B pravý úhel. Víme, že

$$CS = \frac{c}{\sin 2\alpha}.$$

Odtud postupně dostaneme

$$CS = \frac{BD}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\cos (\mathrm{R} - \alpha)}$$

a tedy trojúhelník BCS je skutečně pravoúhlý. [K důkazu jsme ovšem mohli použít i metody souřadnic; např. vyšetřovat vzájemnou polohu kružnice $\boldsymbol{U}_1$ dané rovnicí (30) a přímek AC, BC daných rovnicemi (23).]

b) Nechť je $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \geqq 0$, neboli $a|\xi| \geqq b|\eta|$. Tato podmínka znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ patří některému z vnějších úhlů trojúhelníka ABC při vrcholu C. Potom rovnice (27) má tvar

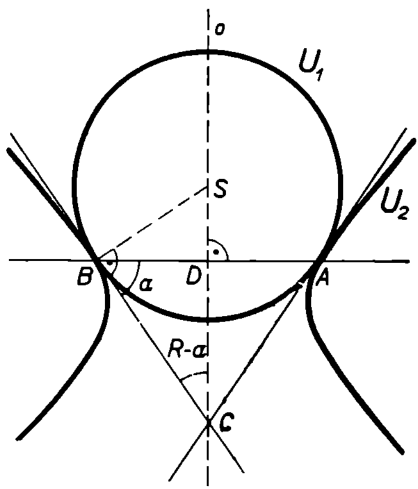
$$(v - \eta)^2 = a^2\xi^2 - b^2\eta^2. \tag{31}$$

Rovnici (31) uvedeme na tvar

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{v^2b^2}{a^2(1+b^2)}} - \frac{\left(\eta - \dfrac{v}{1+b^2}\right)^2}{\dfrac{v^2b^2}{(1+b^2)^2}} = 1; \qquad (32)$$

použijeme-li daných prvků c, α, dostaneme

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{c^2}{4(1+\cos^2\alpha)}} - \frac{\left(\eta - \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{2(1+\cos^2\alpha)}\right)^2}{\dfrac{c^2\sin^2\alpha}{4(1+\cos^2\alpha)^2}} = 1\,. \qquad (33)$$



Obr. 17

V tomto případě tedy leží body Z na hyperbole $\boldsymbol{U}_2$ dané rovnicí (33). Ze zadání úlohy je opět zřejmé, že body A, B patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$. Protože souřadnice těchto bodů vyhovují podmínce $a^2\xi^2 - b^2\eta^2 \geqq \geqq 0$, musí tedy hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ procházet body A, B.

Dokonce se hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ v bodech A, B přímek AC, BC dotýká. Ze zadání úlohy je totiž zřejmé, že body A, B jsou jediné dva body geometrického místa $\boldsymbol{M}$ ležící na přímkách AC, BC. To ovšem znamená, že každá z přímek AC, BC má s hyperbolou $\boldsymbol{U}_2$ společný jediný bod. Protože však přímky AC, BC nejsou rovnoběžné s žádnou z asymptot hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ (přesvědčte se o tom výpočtem sami!), musí být přímky AC, BC tečnami hyperboly $\boldsymbol{U}_2$. (Vzájemnou polohu přímek AC, BC bychom mohli samozřejmě vyšetřit i početně.)

Shrneme-li případy a) a b), dostaneme částečný výsledek: Každý bod geometrického místa $\boldsymbol{M}$ patří buď kružnici $\boldsymbol{U}_1$, nebo hyperbole $\boldsymbol{U}_2$, neboli $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U} = = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$ (obr. 17)[1].

Důkaz obráceného tvrzení $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ bude nyní již lehkou záležitostí. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$, pak neplatí rovnost (25). Odtud však snadno dojdeme k závěru, že souřadnice bodu Z nevyhovují ani rovnici (30), ani rovnici (32). To znamená, že bod Z nepatří ani množině $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$.

Výsledek. Nechť $\boldsymbol{U}_1$ značí kružnici dotýkající se přímek AC, BC v bodech A, B. Nechť $\boldsymbol{U}_2$ je hyperbola dotýkající se také přímek AC, BC v bodech A, B, s hlavní osou délky $c(1 + \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ rovnoběžnou s přímkou AB

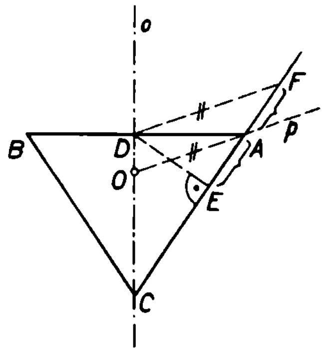
[1]) Množina $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2$ je tzv. sjednocení množin $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$; skládá se právě z těch bodů, které patří buď útvaru $\boldsymbol{U}_1$, nebo útvaru $\boldsymbol{U}_2$.

a vedlejší osou délky $c \sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha)^{-1}$ splývající s osou o úsečky AB. Potom geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je útvar složený z kružnice $\boldsymbol{U}_1$ a hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ (obr. 17).

Hyperbola $\boldsymbol{U}_2$ je sice ve výsledku příkladu 9 popsána jednoznačně, avšak tento popis pro přímou konstrukci není nejvhodnější. Potřebné prvky hyperboly $\boldsymbol{U}_2$ můžeme ovšem na základě uvedeného řešení určit též konstruktivně.

Předně určíme střed O hyperboly $\boldsymbol{U}_2$. Víme, že jeho vzdálenost od vrcholu C je [viz rovnici (32)]

$$\frac{v}{1 + b^2} = \frac{v}{1 + \cos^2 \alpha} = v \cdot \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha},$$



Obr. 18

kde v je výška trojúhelníka ABC k základně AB. Určíme proto nejdříve konstruktivně poměr $1 : (1 + \cos^2 \alpha)$. Ze středu D základny AB (obr. 18) spustíme kolmici na stranu AC; patu této kolmice označíme E. Potom je

$$AE = AC \cos^2 \alpha.$$

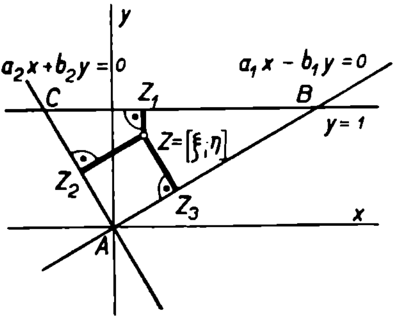
Sestrojíme bod F souměrně sdružený s bodem E podle středu A. Potom platí

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{AC(1 + \cos^2 \alpha)} = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Střed O je proto průsečík přímky CD s přímkou p vedenou bodem A rovnoběžně s DF.

Obdobně lze udat konstrukci délek obou os. To však již přenecháváme čtenáři.

Na závěr našeho příkladu znovu upozorňujeme na efektivnost kombinace syntetické metody s početní metodou. Kdo má dost trpělivosti, může si pro srovnání např. numericky vyšetřit vzájemnou polohu přímky AC a hyperboly $\boldsymbol{U}_2$.



Obr. 19

10. Příklad. Je dán trojúhelník ABC. Nechť Z je libovolný bod trojúhelníka ABC[1]); paty kolmic spuštěných z bodu Z na strany AB, BC, AC označme po řadě Z_3, Z_1, Z_2. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z trojúhelníka ABC, pro něž platí

$$|ZZ_2 - ZZ_3| \leqq ZZ_1 \leqq ZZ_2 + ZZ_3. \qquad (34)$$

Řešení. V každém trojúhelníku alespoň jedna pata výšky na příslušnou stranu náleží vnitřku této strany. Můžeme proto bez omezení obecnosti předpokládat, že to nastane pro výšku ke straně BC. Soustavu souřadnic pak zvolíme podle obrázku 19. Rovnice přímek AB, AC, BC můžeme pak napsat po řadě ve tvaru:

---

[1]) Bod trojúhelníka je jeho vnitřní bod nebo bod na jeho obvodu.

$$\left.\begin{aligned} a_1x - b_1y &= 0\,, \text{ kde } a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_1 > 0\,,\ b_1 > 0, \\ a_2x + b_2y &= 0\,, \text{ kde } a_2^2 + b_2^2 = 1,\ a_2 > 0\,,\ b_2 > 0, \\ y &= 1\,. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Nechť bod $Z = [\xi;\ \eta]$ patří geometrickému místu $\boldsymbol{M}$. To znamená, že bod Z patří trojúhelníku ABC a vyhovuje podmínce (34). Bod Z patří trojúhelníku ABC právě tehdy, jestliže leží zároveň „nad" nebo na přímkách AB, AC a „pod" nebo na přímce BC; pro bod Z tedy platí nerovnosti

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi - b_1\eta &\leqq 0\,, \\ a_2\xi + b_2\eta &\geqq 0\,, \\ \eta &\leqq 1\,. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Podmínku (34) nejdříve nahradíme ekvivalentní soustavou nerovností

$$\left.\begin{aligned} ZZ_1 &\leqq ZZ_2 + ZZ_3\,, \\ ZZ_2 &\leqq ZZ_3 + ZZ_1\,, \\ ZZ_3 &\leqq ZZ_1 + ZZ_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Soustavu (37) přepíšeme pomocí souřadnic bodu Z.

$$\left.\begin{aligned} |1 - \eta| &\leqq |a_2\xi + b_2\eta| + |a_1\xi - b_1\eta|\,, \\ |a_2\xi + b_2\eta| &\leqq |a_1\xi - b_1\eta| + |1 - \eta|\,, \\ |a_1\xi - b_1\eta| &\leqq |1 - \eta| + |a_2\xi + b_2\eta|\,. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Absolutní hodnoty odstraníme na základě nerovností (36). Po další jednoduché úpravě dostaneme

$$\left.\begin{aligned} (-a_1 + a_2)\xi + (b_1 + b_2 + 1)\eta - 1 &\geqq 0\,, \\ (-a_1 - a_2)\xi + (b_1 - b_2 - 1)\eta + 1 &\geqq 0\,, \\ (a_1 + a_2)\xi + (-b_1 + b_2 - 1)\eta + 1 &\geqq 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

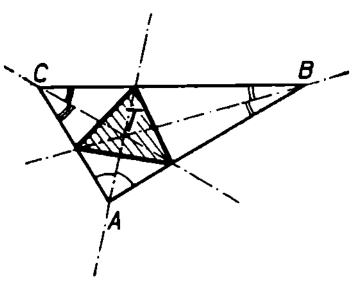
Každá z nerovností (39) je (za předpokladu, že vždy alespoň jeden z koeficientů u ξ a η se nerovná nule) početním vyjádřením jisté poloroviny. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ musí být proto částí všech těchto tří polorovin i daného trojúhelníka ABC. Průnikem těchto tří polorovin a trojúhelníka ABC bude zřejmě nějaký mnohoúhelník; jeho vrcholy bychom mohli zjistit početně. Místo počítání se nám však opět více vyplatí jiný postup. Vyšetříme totiž synteticky, kolik bodů má množina $\boldsymbol{M}$ na stranách trojúhelníka ABC. Nechť bod $\mathcal{Z}_0$ geometrického místa $\boldsymbol{M}$ leží např. na straně BC. Potom je $\mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_1 = 0$, takže poslední dvě z nerovností (37) mají zjednodušený tvar

$$\mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_2 \leqq \mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_3, \quad \mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_3 \leqq \mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_2. \tag{40}$$

Odtud však plyne, že $\mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_0\mathcal{Z}_3$ a tedy bod $\mathcal{Z}_0$ leží na ose vnitřního úhlu BAC. Přitom je zřejmé, že bod $\mathcal{Z}_0$ leží zároveň na hraničních přímkách polorovin vyjádřených posledními dvěma nerovnostmi v soustavě (39). Obdobná úvaha platí i pro zbývající dvě strany trojúhelníka ABC.

Z dosavadních úvah tedy plyne: Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je částí trojúhelníka $\boldsymbol{T}$, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnitřních úhlů s protějšími stranami trojúhelníka ABC (obr. 20).

Důkaz obráceného tvrzení $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{M}$ přenecháme již čtenářům.



Obr. 20

Všimněte si, jak lze charakterizovat nerovnostmi body vnitřku trojúhelníka T. Jaký geometrický význam mají pak body vnitřku trojúhelníka T?

Při řešení příkladu 10 jsme se omezili na body patřící trojúhelníku ABC. Je samozřejmě možné vyšetřovat stejným způsobem i vnějšek trojúhelníka ABC; viz cvičení 18.

11. Příklad. Je dána úsečka AB s vnitřním bodem V, který ji dělí na úsečky $VA = a$, $VB = b$ $(a > b)$. Vyšetříme geometrické místo M všech bodů C, pro něž platí: přímka CV je osou vnitřního úhlu trojúhelníka ABC.

Řešení. Úlohu bychom mohli samozřejmě řešit tak, že bychom početně vyjádřili podmínku

$$\sphericalangle BCV = \sphericalangle ACV. \tag{41}$$

Tento postup však není právě lákavý pro svou pracnost. Stačí si uvědomit, že jen k výpočtu úhlu BCV musíme znát směrnice přímek BC a VC.

Z planimetrie však víme, že podmínka (41) je splněna právě tehdy, jestliže má bod V od obou z přímek AC, BC stejnou vzdálenost. Protože budeme vyšetřovat vzdálenosti dvojic přímek od bodu V, umístíme kvůli zjednodušení výpočtů počátek soustavy souřadnic v bodě V. Soustavu souřadnic zvolíme podle obr. 21.

Podmínka (41) je tedy ekvivalentní s podmínkou

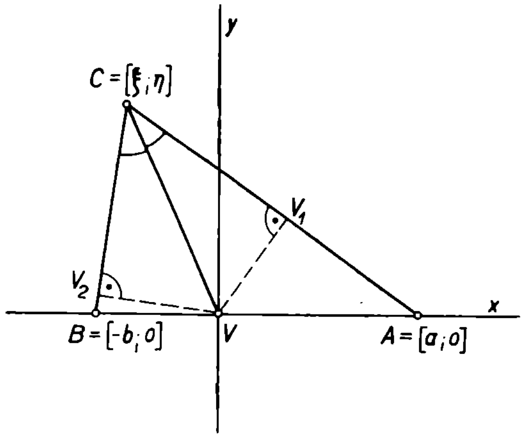
$$VV_1 = VV_2, \tag{42}$$

kde V_1, V_2 jsou paty kolmic z bodu V na přímky AC, BC. Nechť bod $C = [\xi; \eta]$ patří geometrickému místu M. Potom rovnice přímek AC, BC můžeme napsat popořadě ve tvaru (viz [3], str. 86)

$$\eta(x - a) - (\xi - a)y = 0\,,$$
$$\eta(x + b) - (\xi + b)y = 0\,,$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} \eta x - (\xi - a)y - \eta a &= 0\,,\\ \eta x - (\xi + b)y + \eta b &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$



Obr. 21

Užitím souřadnic bodu C můžeme nyní s pomocí rovnic (43) vyjádřit též rovnost (42):

$$\frac{|-\eta a|}{\sqrt{\eta^2 - (\xi - a)^2}} = \frac{|\eta b|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi + b)^2}}\,. \tag{44}$$

Protože bod C nemůže ležet na přímce AB, je $\eta \neq 0$. Můžeme tedy číslem η rovnici (44) dělit. Po odstranění zlomků a umocnění dostaneme

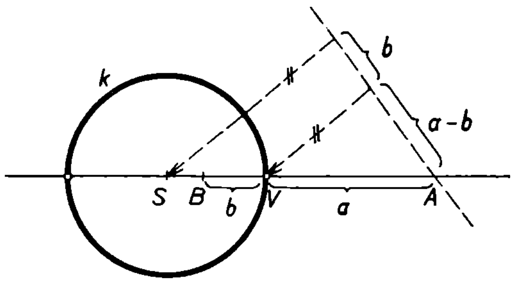
$$\xi^2(a^2 - b^2) + 2ab\xi(a + b) + \eta^2(a^2 - b^2) = 0\,, \qquad (45)$$

neboli po dělení součtem $a + b$ ($\neq 0$)

$$\xi^2(a - b) + 2ab\xi + \eta^2(a - b) = 0\,. \qquad (46)$$

Protože je $a > b$, můžeme rovnici (46) převést na tvar

$$\left(\xi + \frac{ab}{a - b}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{ab}{a - b}\right)^2. \qquad (47)$$



Obr. 22

Tak jsme zjistili, že geometrické místo ***M*** je částí útvaru ***U***, který se skládá ze všech bodů kružnice k se středem $S = \left[-\frac{ab}{a - b}\,;\,0\right]$ a poloměrem $\frac{ab}{a - b}$, s výjimkou průsečíků s přímkou AB.

Nyní obráceně nechť bod $C = [\xi; \eta]$ patří útvaru ***U***. Pak jeho souřadnice vyhovují rovnici (45), z níž snadno odvodíme rovnici

$$a^2[\eta^2 + (\xi + b)^2] = b^2[\eta^2 + (\xi - a)^2]\,, \qquad (48)$$

resp. rovnici

$$\frac{|a|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi - a)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{\eta^2 + (\xi + b)^2}}. \tag{49}$$

Protože bod C leží mimo osu x, je $\eta \neq 0$; můžeme tedy obě strany rovnice (49) násobit číslem $|\eta| = |-\eta|$. Tím dostaneme rovnici (44), která je jen jiným vyjádřením rovnosti (42). To však dokazuje, že platí též $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Nechť k značí kružnici, která má střed S na polopřímce VB ve vzdálenosti $\frac{ab}{a-b}$ od počátku V a která prochází bodem V. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je pak kružnice k s výjimkou jejích průsečíků s přímkou AB. (Konstrukce kružnice k je zřejmá z obrázku 22.)

Cvičení

9. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D stálý rozdíl vzdáleností rovný k ($k > 0$).
10. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D součet druhých mocnin vzdáleností menší než dané číslo $k > 0$.
11. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v ($v > 0$), bod D. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají od přímky p a bodu D stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k ($k > 0$).
12. Jsou dány dvě různoběžky a, b. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$

všech bodů Z, které mají od přímek a, b rozdíl vzdáleností aspoň k ($k > 0$).

13. Jsou dány dvě různoběžky a, b s odchylkou α. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od přímek a, b stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k^2 ($k > 0$).
14. Je dána úsečka $AB = 2a$ se středem S a číslo $k > 1$. Je-li C libovolný bod, značí body S_1, S_2 po řadě paty kolmic spuštěných z bodu S na přímky AC, BC. Vyšetřete geometrické místo **M** takových bodů C, pro něž platí $SS_1 = kSS_2$.
15. Je dána úsečka $AB = 2a$ se středem S. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů C, pro něž platí: součet převrácených hodnot druhých mocnin vzdáleností bodu S od přímek AC, BC je roven danému číslu k ($k > 0$).
16. Jsou dány dvě různoběžky a, b s odchylkou φ. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají stálý součet převrácených hodnot vzdáleností od přímek a, b rovný k ($k > 0$).
17. Je dán trojúhelník ABC a číslo $k > 0$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od přímek AB, AC, BC stálý součet vzdáleností rovný k. Geometrické místo **M** skutečně pro nějaký trojúhelník sestrojte.
18. Je dán trojúhelník ABC. Je-li Z libovolný bod, pak označíme Z_1, Z_2, Z_3 po řadě paty kolmic z bodu Z na přímky BC, AC, AB. Vyšetřete množinu **M** všech bodů Z vnějšku trojúhelníka ABC, pro něž platí:

$$|ZZ_1 - ZZ_2| < ZZ_3 < ZZ_1 + ZZ_2.$$

19. Je dán úhel $AVB = 2\varphi$ a na jeho ose o, ve vzdálenosti v od vrcholu, bod D. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Součin vzdáleností libovolného bodu Z od přímek AV, BV se rovná druhé mocnině jeho vzdálenosti od bodu D.
20. Je dán úhel $AVB = 2\varphi$ a na jeho ose o, ve vzdálenosti v od vrcholu V, bod D. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Vzdálenosti libovolného bodu Z od přímek

AV, BV jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má délku DZ.

21. Je dána přímka p a mimo ni, ve vzdálenosti v, bod D. Kromě toho je dáno kladné číslo $k < 1$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí: Poměr vzdálenosti bodu Z od přímky p a jeho vzdálenosti od bodu D je roven stále k.

22. Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a x, y, z jsou vzdálenosti libovolného bodu V od jeho stran. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů V trojúhelníka ABC, pro něž jsou čísla x, y, z délky stran ostroúhlého trojúhelníka.