Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic

2. kapitola. Aplikace vzdálenosti dvou bodů

In: Milan Koman (author): Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 18–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403582

2. kapitola

APLIKACE VZDÁLENOSTI DVOU BODŮ

Jak napovídá již název kapitoly, budeme se nejdříve zabývat geometrickými místy takových bodů, jejichž polohu lze charakterizovat vzdálenostmi od předem daných pevných bodů.

2. Příklad. Je dán trojúhelník ABC a reálné číslo $c > 0$. Ke zvolenému bodu V sestrojíme postupně body X, Y, Z tak, aby body Y, X byly souměrně sdružené podle středu A, body X, Y souměrně sdružené podle středu B a konečně body V, Z souměrně sdružené podle středu C. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů V, pro něž je $VZ \leqq c$.

Řešení. Soustavu souřadnic zvolíme podle obrázku 4. Pro zjednodušení je zvolena za jednotku na osách souřadnic úsečka AC. Na obrázku jsou označeny též souřadnice všech potřebných bodů.

Nyní postupně určíme souřadnice bodů X, Y, Z pomocí souřadnic bodů A, B, C, V.

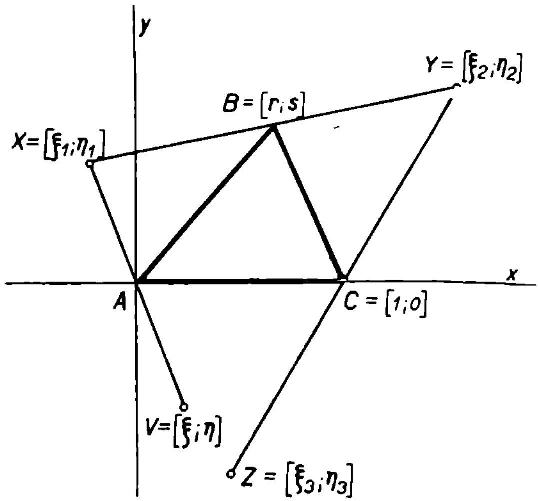
$$\left.\begin{array}{ll} \xi_1 = -\xi; & \eta_1 = -\eta; \\ \xi_2 = \xi + 2r; & \eta_2 = \eta + 2s; \\ \xi_3 = -\xi - 2r + 2; & \eta_3 = -\eta - 2s. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Jestliže bod $V = [\xi; \eta]$ patří množině $\boldsymbol{M}$, pak je podle předpokladu $VZ \leqq c$, neboli

$$\sqrt{(\xi - \xi_3)^2 + (\eta - \eta_3)^2} \leqq c. \quad (2)$$

Po dosazení za ξ_3 a η_3 z rovností (1) a po úpravě dostaneme nerovnost

$$[\xi - (1 - r)]^2 + (\eta + s)^2 \leqq \frac{1}{4} c^2. \tag{3}$$



Obr. 4

Souřadnice libovolného bodu $V = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovují tedy nerovnosti (3). Ta je však zároveň početním vyjádřením kruhu $\boldsymbol{U}$ se středem $D = [1 - r; -s]$ a s poloměrem $\frac{1}{2} c$. Tím je tedy dokázáno, že $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní se pokusíme zjistit, zda platí též vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Budeme postupovat tak, že ověříme podmínku [B].

Nechť bod $V = [\xi; \eta]$ patří kruhu $\boldsymbol{U}$, potom jeho souřadnice vyhovují nerovnosti (3). Tu však můžeme upravit na tvar

$$[\xi - (-\xi - 2r + 2)]^2 + [\eta - (-\eta - 2s)]^2 \leqq c^2;$$

resp. s použitím rovností (1) na tvar

$$(\xi - \xi_3)^2 + (\eta - \eta_3)^2 \leqq c^2.$$

Protože obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla, můžeme je odmocnit a tím dostaneme tvar (2). Ten však znamená, že $VZ \leqq c$, čili bod V patří množině $\boldsymbol{M}$. Tím je dokázáno, že $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Ze vztahů $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ již plyne rovnost $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}$. Je tedy geometrické místo $\boldsymbol{M}$ kruh $\boldsymbol{U}$ se středem v bodě $D = [1 - r; -s]$ a s poloměrem $\frac{1}{2}c$. To však ještě není v pravém slova smyslu výsledek, neboť v odpovědi se udává poloha bodu D pomocí souřadnic. Snadno si však ukážeme, že bod D dostaneme tak, že doplníme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kruh $\boldsymbol{U} \equiv (D; \frac{1}{2}c)$, jehož střed D je vrcholem rovnoběžníku $ABCD$.

Všimněte si, že metoda souřadnic nám dala více než to, co jsme žádali. Výpočty a výsledek platí i v tom případě, když body A, B, C nejsou vrcholy trojúhelníka, ale kdy leží v přímce a případně i všelijak splývají. Pak sice nelze v řešení hovořit o rovnoběžníku $ABCD$, ale to nevadí; v tom případě se užije jiné formulace.

Z příkladu 2 můžeme vytěžit navíc tyto obecnější poznatky:

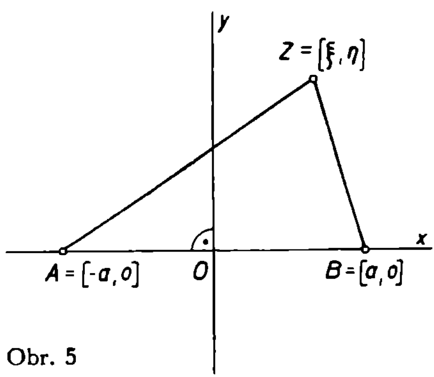
1. Analytická metoda může často automaticky vyřešit více než to, co se v dané úloze požaduje.

2. V některých případech je výhodné zvolit v soustavě souřadnic za jednotkovou úsečku jistou úsečku daného útvaru.

3. Výsledek máme vždy popsat pouze pomocí daných prvků, tzn. tak, aby se v něm nevyskytovaly matematické objekty (např. souřadnice, body, přímky ap.), které jsme zavedli sami až v průběhu řešení. Jinými slovy to znamená, že formulace výsledku má být jasná po přečtení zadání úlohy i bez studia jejího řešení.

3. Příklad. Je dána úsečka $AB = 2a$ a číslo $k > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\mathbf{M}$ všech bodů Z, které mají od bodů A, B stálý rozdíl druhých mocnin vzdáleností rovný k.

Řešení. Geometrické místo $\mathbf{M}$ je na první pohled souměrné podle přímky AB i podle osy úsečky AB. Soustavu souřadnic proto zvolíme podle obrázku 5.



Obr. 5

Podle předpokladu je pro každý bod $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$

$$| AZ^2 - BZ^2 | = k, \tag{4}$$

neboli

$$| [(\xi + a)^2 + \eta^2] - [(\xi - a)^2 + \eta^2] | = k. \tag{5}$$

Odtud postupně dostaneme

$$4a \,.\, | \xi | = k,$$

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{k}{4a}, & \text{pro} \quad \xi > 0, \\ -\dfrac{k}{4a}, & \text{pro} \quad \xi < 0. \end{cases} \tag{6}$$

To znamená, že každý bod $Z = [\xi; \eta]$ množiny $\boldsymbol{M}$ vyhovuje jedné z rovností (6). Z analytické geometrie víme, že rovnosti (6) jsou početním vyjádřením útvaru $\boldsymbol{U}$ složeného ze dvou rovnoběžek s osou y ve vzdálenosti $| \xi | = \dfrac{k}{4a}$ od počátku. Dokázali jsme tedy vztah $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Vztah $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$ dokážeme obrácením dosavadního postupu. Pro souřadnice libovolného bodu $Z = [\xi; \eta]$ útvaru $\boldsymbol{U}$ platí některý ze vztahů (6); z nich můžeme odvodit vztah (5) a tím i (4). Patří tedy bod $Z = [\xi; \eta]$, který vyhovuje jedné z rovností (6), skutečně množině $\boldsymbol{M}$, tzn. $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$.

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je útvar $\boldsymbol{U}$, který se skládá ze dvou přímek rovnoběžných s osou úsečky AB vedených ve vzdálenosti $\frac{1}{4} ka^{-1}$ od středu úsečky AB.

4. Příklad. Je dán rovnoramenný trojúhelník RST se základnou $RS = 2t$ a k ní příslušnou výškou v. Z je takový bod, že z úseček $a = RZ$, $b = SZ$, $c = TZ$ lze sestrojit ostroúhlý trojúhelník. Vyšetříme geometrické místo M všech bodů Z.

Řešení. Předně musíme zjistit nutnou a postačující podmínku pro to, aby úsečky a, b, c byly stranami ostroúhlého trojúhelníka. Podle kosinové věty a věty k ní obrácené víme, že trojúhelník (ať už ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý) o stranách a, b, c a protějších úhlech α, β, γ existuje právě tehdy, jestliže platí

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Duté úhly α, β, γ jsou ostré právě tehdy, když jsou jejich kosiny kladné. Tedy vzhledem k rovnostem (7) můžeme nutnou a postačující podmínku pro to, aby úsečky a, b, c byly stranami ostroúhlého trojúhelníka, vyjádřit soustavou nerovností

$$\left.\begin{aligned} a^2 &< b^2 + c^2, \\ b^2 &< a^2 + c^2, \\ c^2 &< a^2 + b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

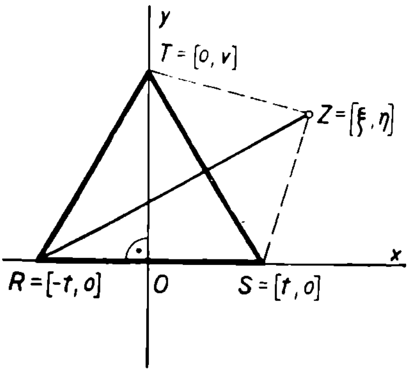
Nyní již můžeme začít s analytickým vyšetřováním geometrického místa M. Protože je zřejmě toto geometrické místo souměrné podle osy úsečky RS, zvolíme soustavu souřadnic podle obrázku 6. Nerovnosti (8) přepíšeme užitím souřadnic a uvedeme na konečné tvary

$$(\xi - 2t)^2 + (\eta - v)^2 > 4t^2, \qquad (9a)$$

$$(\xi + 2t)^2 + (\eta - v)^2 > 4t^2, \qquad (9b)$$

$$\xi^2 + (\eta + v)^2 > 2(v^2 - t^2). \qquad (9c)$$

Zjistili jsme tedy, že souřadnice každého bodu $Z = [\xi; \eta]$ patřícího množině $\boldsymbol{M}$, vyhovují nerovnostem (9a) až (9c). Přitom nerovnosti (9a) a (9b) jsou početní vyjádření vnějšků $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$ kružnic $k_1 \equiv (C_1; 2t)$, $k_2 \equiv (C_2; 2t)$, kde C_1, C_2 jsou (jak se sami snadno přesvědčíte) vrcholy rovnoběžníků RSC_1T a $RSTC_2$. Pro útvar $\boldsymbol{U}_3$, daný početním vyjádřením (9c), musíme rozlišit tři případy:



Obr. 6

1. Pravá strana nerovnosti (9c) je kladná. Pak $\boldsymbol{U}_3$ je vnějšek kruhu k_3 s poloměrem $\sqrt{2(v^2 - t^2)}$ a středem C_3 souměrně sdruženým s bodem T podle přímky RS. Tento případ nastane právě tehdy, je-li $v > t$, tzn. je-li trojúhelník RST ostroúhlý.

2. Pravá strana nerovnosti (9c) se rovná nule. Pak je $\boldsymbol{U}_3$ celá rovina s výjimkou bodu C_3. Tento případ nastane právě tehdy, je-li $v = t$, tzn. je-li trojúhelník RST pravoúhlý.

3. Pravá strana nerovnosti (9c) je záporná. Pak je $\boldsymbol{U}_3$ celá rovina bez výjimky. To nastane právě tehdy, je-li $0 < v < t$, tzn. je-li trojúhelník RST tupoúhlý.

Pro každý bod $Z = [\xi; \eta]$ geometrického útvaru $\boldsymbol{M}$ jsou splněny všechny tři nerovnosti (9a) až (9c) zároveň, a proto je množina $\boldsymbol{M}$ částí všech tří útvarů $\boldsymbol{U}_1$,

U_2, U_3. Množina M je tudíž částí průniku[1]) množin U_1, U_2, U_3, tj. $M \subset U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ (na obr. 7abc je množina U vyšrafována).

Nyní dokážeme obrácené tvrzení, tj. $U \subset M$. Dokážeme to nepřímo, tj. ověřením podmínky [B']. Jestliže z úseček $a = RZ$, $b = SZ$, $c = TZ$ nelze sestrojit ostroúhlý trojúhelník (tzn., že z nich buď vůbec nelze sestrojit trojúhelník, nebo je tento trojúhelník pravoúhlý či tupoúhlý), pak *neplatí aspoň jedna z nerovností* (8). V důsledku toho neplatí pro bod $Z = [\xi; \eta]$ aspoň jedna z nerovností (9a) až (9c). To však znamená, že bod Z nepatří aspoň jednomu z útvarů U_1, U_2, U_3 a tedy nemůže patřit ani jejich průniku $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Tím je tedy dokázán vztah $U \subset M$.

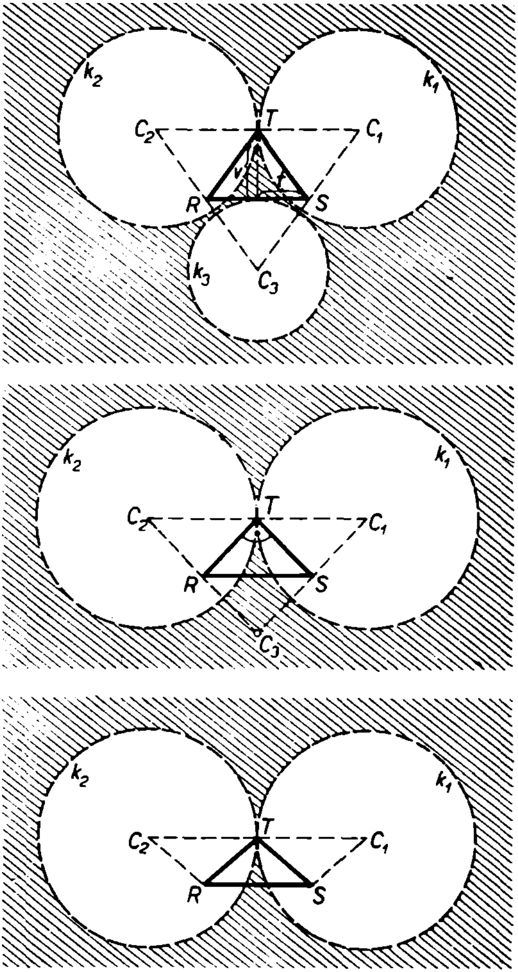
Výsledek. Geometrické místo M je útvar U, jehož konstrukce byla popsána (nezávisle na zvolené soustavě souřadnic) v průběhu řešení. (Viz obr. 7abc; hraniční kružnice k_1, k_2, k_3 geometrickému místu M nepatří a jsou proto vytaženy pouze čárkovaně.)

Příklad 4 ukazuje, že geometrické místo může být někdy charakterizováno několika podmínkami [viz nerovnosti (8)]. Každá z těchto podmínek určí jedno „pomocné" geometrické místo (viz útvary U_1, U_2, U_3). Hledané geometrické místo tvoří potom společná část neboli *průnik* těchto „pomocných" geometrických míst.

Někdy je „tvar" geometrického místa závislý na vzá-

---

[1]) Průnikem dvou množin M, N rozumíme množinu P, která se skládá právě z těch bodů, které patří zároveň oběma množinám M, N. (Zapisujeme to $P = M \cap N$.) Jestliže množiny M, N nemají žádný společný bod, říkáme, že jejich průnik je množina prázdná (označení $\varnothing$). Podobně se definuje průnik tří a více množin.



Obr. 7 abc

jemné poloze daných prvků. V takovém případě musíme provést samozřejmě příslušné třídění vyšetřovaného geometrického místa (viz podrobnou diskusi množiny $\boldsymbol{U}_3$ v příkladu 4).

V druhé části řešení příkladu 4 jsme potřebovali vyslovit negaci soustavy nerovností (8). Všimněte si, že negace správně zněla: *Aspoň jedna* z nerovností (8) *není splněna.* Často se totiž chybuje v tom, že za negaci se prohlásí výrok: „Žádná z nerovností (8) není splněna." Podobně se utvoří např. negace výroku: „Všechny vstupenky na dnešní představení jsou vyprodány." Negace správně zní: „Všechny vstupenky na dnešní představení nejsou (ještě) vyprodány čili alespoň jedna vstupenka je na prodej."

5. Příklad. Jsou dány různoběžky a, b a bod Z, pro který platí: Vzdálenost pat kolmic vedených z bodu Z na přímky a, b se rovná danému číslu $d > 0$. Vyšetříme geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z.

Řešení. Je zřejmé, že geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je souměrné podle obou os různoběžek a, b. Zvolíme proto tyto osy zároveň za osy soustavy souřadnic (obr. 8).

Předpokládejme, že bod $Z = [\xi; \eta]$ patří množině $\boldsymbol{M}$. Určíme souřadnice bodů A, B, které jsou patami kolmic, z bodu Z na přímky a, b. Výpočet provedeme napřed pro bod A. Určíme rovnici přímky AZ; je to kolmice k přímce $y = kx$ a prochází bodem $Z = [\xi; \eta]$. Směrnice přímky AZ je $-\frac{1}{k}$. Rovnice přímky AZ je tedy

$$y - \eta = -\frac{1}{k}(x - \xi).$$

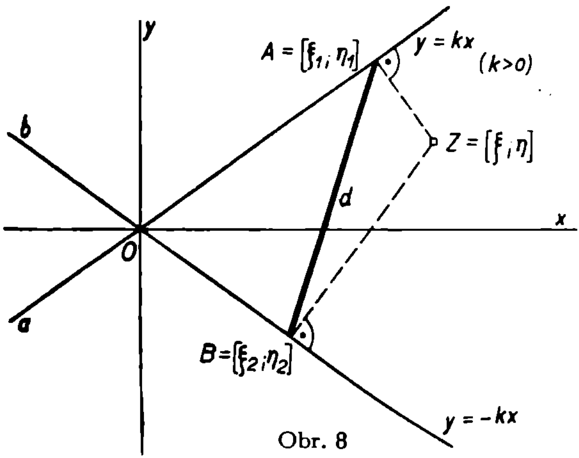
Souřadnice bodu A dostaneme tudíž řešením soustavy

$$y = kx,$$

$$y - \eta = -\frac{1}{k}(x - \xi).$$

Po snadném výpočtu vyjde

$$\xi_1 = \frac{k\eta + \xi}{1 + k^2}; \quad \eta_1 = \frac{k(k\eta + \xi)}{1 + k^2}. \qquad (10)$$



Obr. 8

Výpočet souřadnic bodu B bychom mohli provést úplně stejně; je to ovšem zbytečné. Stačí totiž ve výsledcích (10) nahradit všude číslo k číslem k němu opačným.

$$\xi_2 = \frac{-k\eta + \xi}{1 + k^2}; \quad \eta_2 = \frac{-k(-k\eta + \xi)}{1 + k^2}. \qquad (11)$$

Protože bod Z patří množině $\boldsymbol{M}$, je $AB = d$, tzn.

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} = d; \tag{12}$$

po dosazení z (10) a (11) a po úpravě vyjde

$$\xi^2 + \eta^2 = \left[\frac{d(1 + k^2)}{2k}\right]^2. \tag{13}$$

Rovnice (13) je početním vyjádřením kružnice $\boldsymbol{U}$ se středem O v průsečíku různoběžek a, b a s poloměrem $d(1 + k^2)(2k)^{-1}$. Tím je dokázána první část $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{U}$.

Nyní dokážeme obrácené tvrzení: $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{M}$. Nechť bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří množině $\boldsymbol{M}$, pak příslušná úsečka AB nemá délku d, tzn.

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} \neq d. \tag{12'}$$

Odtud pak, podobně jako výše, odvodíme nerovnost

$$\xi^2 + \eta^2 \neq \left[\frac{d(1 + k^2)}{2k}\right]^2. \tag{13'}$$

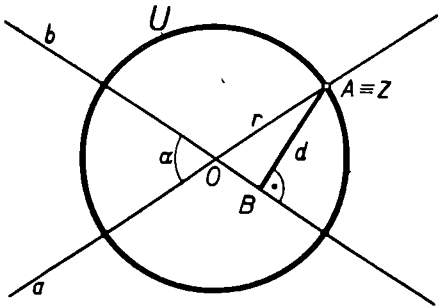
To však znamená, že bod $Z = [\xi; \eta]$ nepatří kružnici $\boldsymbol{U}$. Tím je důkaz ukončen.

Zbývá pouze určit poloměr kružnice $\boldsymbol{U}$ nezávisle na zvolené soustavě souřadnic. Označme α odchylku přímek a, b. Potom zřejmě směrnice k přímky a je $k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; jednoduchým výpočtem pak zjistíte, že poloměr kružnice $\boldsymbol{U}$ je

$$d(1 + k^2)\,(2k)^{-1} = d\,.\,(\sin \alpha)^{-1}.$$

Výsledek. Geometrické místo $\boldsymbol{M}$ je kružnice $\boldsymbol{U}$ se středem v průsečíku různoběžek a, b a s poloměrem $r = d\,.\,(\sin \alpha)^{-1}$, kde α je odchylka přímek a, b.

Všimněme si, že poloměr r kružnice **U** jsme mohli uhodnout i bez výpočtu. Stačí totiž zvolit bod Z geometrického místa **M** na některé z přímek a, b (obr. 9).



Obr. 9

Cvičení

1. a) Je dán čtyřúhelník $ABCD$ a číslo $d > 0$. Zvolte si bod V a sestrojte lomenou čáru $VWXYZ$ tak, že body A, B, C, D jsou po řadě středy úseček VW, WX, XY, YZ. Vyšetřete geometrické místo **M** bodů V, pro něž je velikost úsečky $VZ < d$.

   b) Řešte obdobnou úlohu pro pětiúhelník $ABCDE$!

2. a) Jsou dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, které mají od bodů A, B stálý součet druhých mocnin vzdáleností rovný k^2.

   b) Řešte obdobnou úlohu pro případ, že jsou dány tři body A, B, C, resp. čtyři body A, B, C, D. (Výsledné geometrické místo určete pomocí vzdáleností daných bodů.)

3. Je dána úsečka AB a číslo k $(0 < k \neq 1)$. Vyšetřete geometrické místo **M** všech bodů Z, pro něž platí $AZ : BZ = k$.

4. Je dán trojúhelník PQR. Vyšetřete množinu $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: $PZ^2 + QZ^2 = RZ^2$.
5. Půdorys místnosti je rovnostranný trojúhelník ABC o straně 10 m. Všechny stěny jsou obloženy zrcadly. Paprsek, který vyšel z bodu Z_0, se po odrazu od všech tří stěn vrátil zpět do bodu Z_0; přitom urazil vodorovnou dráhu dlouhou 20 m. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, které mají stejnou vlastnost jako bod Z_0.
6. Jsou dány dvě kolmice o_1, o_2. Po přímce o_1 se pohybuje bod A a po přímce o_2 bod B tak, že úsečka AB má stálou délku d. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: bod B je středem úsečky AZ.
7. Je dán tzv. deltoid $ABCD$, tj. čtyřúhelník souměrný podle úhlopříčky AC. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí:

$$AZ^2 < BZ^2 + DZ^2 < CZ^2.$$

8. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Vyšetřete geometrické místo $\boldsymbol{M}$ všech bodů Z, pro něž platí: $AZ + BZ = CZ$. (Návod: Soustavu souřadnic zvolte tak, aby $C = [0; -1]$ a těžiště trojúhelníka ABC bylo v počátku souřadnic.)